

JOURNAL OF THE  
INTERNATIONAL ASTRONAUTICAL FEDERATION

# ASTRONAUTICA ACTA

VOLUMEN VII  
1961



SPRINGER-VERLAG · WIEN

ORGAN DER INTERNATIONALEN  
ASTRONAUTISCHEN FÖDERATION

ORGANE DE LA FÉDÉRATION INTERNATIONALE D'ASTRONAUTIQUE

ЖУРНАЛ МЕЖДУНАРОДНОЙ АСТРОНАВТИЧЕСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Vol.  
7  
1961

# ASTRONAUTICA ACTA

Herausgeber / Editor-in-Chief / Rédacteur en chef

**Theodore von Kármán-U.S.A.**

Mitherausgeber / Co-Editors / Rédacteurs adjoints

**Frank J. Malina-U.S.A. · Irene Sänger-Bredt-Deutschland**

**Leonid I. Sedov-U.S.S.R. · Raymond Siestrunck-France**

Fachbeirat / Editorial Advisory Board / Comité de conseil

**J. Ackeret-Schweiz · H. O. G. Alfvén-Sverige · P. Auger-France**

**A. D. Baxter-U.K. · W. von Braun-U.S.A. · A. V. Cleaver-U.K.**

**G. A. Crocco-Italia · A. Ehmert-Deutschland · A. Eula-Italia**

**B. Fraeijs de Veubeke-Belgique · A. G. Haley-U.S.A.**

**F. Hecht-Österreich · J. Kaplan-U.S.A. · W. B. Klemperer-U.S.A.**

**J. M. J. Kooy-Nederland · V. I. Krassovsky-U.S.S.R.**

**R. J. Lees-U.K. · W. R. Lovelace II-U.S.A. · G. Millán-España**

**K. F. Ogorodnikov-U.S.S.R. · F. I. Ordway III-U.S.A.**

**J. Pérès-France · R. Pešek-Č.S.S.R. · W. H. Pickering-U.S.A.**

**M. Roy-France · E. Sänger-Deutschland · K. Schütte-Deutschland**

**L. R. Shepherd-U.K. · S. F. Singer-U.S.A. · L. Spitzer Jr.-U.S.A.**

**H. J. Stewart-U.S.A. · H. Strughold-U.S.A. · M. Summerfield-U.S.A.**

**J. A. Van Allen-U.S.A. · E. Vassy-France**

Redaktionssekretär / Editorial Assistant / Secrétaire de la rédaction

**W. Peschka-Österreich**

Vo.  
7  
196



## Inhalt — Contents — Sommaire

<b>Baradell, D. L.,</b> siehe <b>Becker, J. V.</b>	
<b>Becker, J. V., D. L. Baradell, and E. B. Pritchard:</b> Aerodynamics of Trajectory Control for Re-Entry at Escape Speed (With 21 Figures) . . . . .	334
<b>Braun, W. von:</b> Status Report on the Saturn Space Carrier Vehicle and Its Potential Applications (With 14 Figures) . . . . .	92
<b>Broglio, L.:</b> Lois de similitude dans le calcul des trajectoires de rentrée et de l'ablation frontale des engins (Avec 14 Figures) . . . . .	21
<b>Eugster, J.:</b> Interstellare Materie mit besonderer Berücksichtigung der Dunkelwolken (Mit 1 Abbildung) . . . . .	247
<b>Faulders, C. R.:</b> Minimum-Time Steering Programs for Orbital Transfer with Low-Thrust Rockets (With 7 Figures) . . . . .	35
<b>Fetheroff, C. W.,</b> siehe <b>Saltzer, C.</b>	
<b>Fraeijs de Veubeke, B. M.:</b> L'étagement optimum des groupes de fusées en fonctionnement parallèle (Avec 4 Figures) . . . . .	359
<b>Gadomski, J.:</b> Die Ökosphären der Riesensterne und die ökosphärische Evolution des Planetensystems der Sonne (Mit 1 Abbildung) . . . . .	1
<b>Hilton, W. F.:</b> Possible Paths for Re-Entry Into the Earth's Gravitational Field Avoiding the Radiation Belts (With 2 Figures) . . . . .	325
<b>Houbolt, J. C.:</b> Problems and Potentialities of Space Rendezvous (With 14 Figures) . . . . .	406
<b>Isbell, B. S.,</b> siehe <b>Ordway, F. L., III.</b>	
<b>Jordan, P.:</b> Raumfahrt und Naturforschung . . . . .	59
<b>Jurney, W. H.,</b> siehe <b>Reismann, H.</b>	
<b>King-Hele, D. G.:</b> The Effect of Atmospheric Oblateness on a Satellite Orbit (With 9 Figures) . . . . .	390
<b>Kooy, J. M. J.:</b> Gravitational Speed and Unmanned Space Flight (With 8 Figures) . . . . .	203
<b>Kovalevsky, J.:</b> Aspects analytiques du problème des perturbations d'un satellite artificiel (Avec 1 Figure) . . . . .	376
<b>Libby, P. A.:</b> The First International Symposium of the International Academy of Astronautics (Foreword) . . . . .	323
<b>Malina, F. J., Irene Sänger-Bredt, L. I. Sedov, and R. Siestrunck:</b> Astronautica Acta Extends Congratulations to THEODORE VON KÁRMÁN on the Occasion of His Eightieth Birthday, 11 May 1961 . . . . .	55
<b>Meghreblian, R. V.:</b> Prospects for Advanced Nuclear Systems (With 4 Figures) . . . . .	276
<b>Moeckel, W. E.:</b> Interplanetary Trajectories for Electrically-Propelled Space Vehicles (With 4 Figures) . . . . .	430
<b>Naze, Jacqueline:</b> Action des champs magnétiques sur l'écoulement d'un fluide conducteur d'électricité dans une tuyère (Avec 1 Figure) . . . . .	261

<b>Ordway, F. I., III, and B. S. Isbell:</b> United States Space Carrier Vehicle and Spacecraft Developments (With 13 Figures) . . . . .	103
<b>Penner, S. S., and F. A. Williams:</b> The Theory of Steady, One-dimensional, Laminar Flame Propagation for One-step Chemical Reactions (With 2 Figures) . . . . .	171
<b>Peters, Th.:</b> Erzeugung von Plasmastrahlen hoher Temperaturen und Geschwin- digkeiten (Mit 18 Abbildungen) . . . . .	150
<b>Pritchard, E. B.,</b> siehe <b>Becker, J. V.</b>	
<b>Reismann, H., and W. H. Journey:</b> Temperature Distribution in a Spinning Spherical Shell During Atmospheric Entry (With 15 Figures) . . . . .	290
<b>Saltzer, C., and C. W. Fetheroff:</b> A Direct Variational Method for the Calculation of Optimum Thrust Programs for Power-Limited Interplanetary Flight (With 2 Figures) . . . . .	8
<b>Sandström, A. E.:</b> Predictions of Cosmic Ray Storms from Geomagnetic Data (With 6 Figures) . . . . .	141
<b>Sänger, E.:</b> Zur industriellen Technologie der Raumfahrt (Mit 11 Abbildungen) . . . . .	64
<b>Sänger-Bredt, Irene,</b> siehe <b>Malina, F. J.</b>	
<b>Sears, W. R.:</b> On a Boundary-Layer Phenomenon in Magneto-Fluid Dynamics (With 1 Figure) . . . . .	223
<b>Sedov, L. I.,</b> siehe <b>Malina, F. J.</b>	
<b>Sehnal, L.:</b> The Stability of the 24-Hour Satellite (With 7 Figures) . . . . .	445
<b>Siestrunek, R.,</b> siehe <b>Malina, F. J.</b>	
<b>Singer, S. F.:</b> Atmosphere Near the Moon . . . . .	135
<b>Thackwell, H. L., Jr., and J. A. Vandenkerekhove:</b> Optimum Staging of Solid- propellant Rocket Vehicles (With 10 Figures) . . . . .	190
<b>Vandenkerekhove, J. A.,</b> siehe <b>Thackwell, H. L., Jr.</b>	
<b>Vassy, E.:</b> Etude de l'émission radioélectrique des satellites artificiels (Avec 8 Figures) . . . . .	237
<b>Williams, F. A.,</b> siehe <b>Penner, S. S.</b>	

# Die Ökosphären der Riesensterne und die ökosphärische Evolution des Planetensystems der Sonne

Von

Jan Gądomski<sup>1</sup>

(Mit 1 Abbildung)

(Eingegangen am 30. September 1959)

## Zusammenfassung — Abstract — Résumé

**Die Ökosphären der Riesensterne und die ökosphärische Evolution des Planetensystems der Sonne.** Die Parameter der Ökosphären von 87 Riesensternen mit scheinbarer Helligkeit  $\geq 3^m 5$ , die im Raume von 650 Lichtjahren um die Sonne zerstreut sind, sowie der Ökosphären der Riesen von sieben Bedeckungssternen großer Masse werden berechnet. Die Frage der Evolution der Ökosphären im Zusammenhang mit den Hauptast-Sternen wird diskutiert. Zuletzt wird eine ökosphärische Hypothese der Entwicklung unseres Planetensystems angegeben (Tab. 5).

**The Ecospheres of the Giant Stars and the Ecospheric Evolution of Our Planetary System.** The parameters of the ecospheres of 87 giant stars of apparent brightness greater than magnitude 3.5 which are scattered within a space of 650 light years around the Sun, as well as those of the giants of 7 eclipsing binaries of large mass were computed. The question of the evolution of the ecospheres in connection with the main sequence stars is discussed. Finally an ecosphere hypothesis of the development of our planetary system is presented (Table 5).

**Les écosphères des étoiles géantes et l'évolution écosphérique de notre système solaire.** On a calculé les paramètres des écosphères de 87 étoiles géantes d'une magnitude apparente supérieure à 3,5, dispersées autour du soleil dans un espace de 650 années-lumière ainsi que les écosphères des compagnons géants de 7 étoiles multiples de grande masse. Le problème de l'évolution de l'écosphère en relation avec la séquence principale est discuté. Enfin on présente une hypothèse écosphérique du développement de notre système solaire (Tableau 5).

## I. Einleitung

Die belebten raschrotierenden Planeten können nur in den Sternökosphären bestehen. Künftige Forschungsreisen in die Sternenwelt werden zuerst die benachbarte Umgebung der Sonne als Ziel haben. Beim Astronautischen Kongreß in Barcelona im Jahre 1957 hat der Verfasser einen Katalog der Ökosphären der 59 nächsten Sterne, worunter 15 sonnenähnliche Zwerge und 44 Subzwerge entdeckt worden sind, vorgelegt [1]. In dem untersuchten Raum, der sich im Radius von 17 Lichtjahren um die Sonne ausdehnt, fehlen aber gänzlich Riesensterne, deren Ökosphären vom astronautischen Standpunkt aus gesehen interessant sein könnten.

<sup>1</sup> Obserwatorium, Warszawa, Al. Ujazdowskie 4, Polska.

Um die Ökosphären der Riesensterne untersuchen zu können, wurden als erste Näherung die Ökosphären aller Riesen des „Sternatlases“ von A. OPOLSKI [2], der alle hellen Objekte, heller als 3,5 Sterngröße, enthält, berechnet. Unter 135 Sternen fanden sich 87 Riesensterne mit Radien größer als der sechsfache Sonnenradius, verstreut bis zum radialen Abstand von 650 Lichtjahren um die Sonne. Die Ökosphären dieser Giganten sind, wie zu erwarten war, wirklich beachtlich und bieten viel Platz für Planeten. Die Mittelwerte der Zahlenwerte für die Ökosphären enthält Tab. 1.

## II. Eigenschaften der Ökosphären

### 1. Tabelle 1

Bei Berechnung der Größe der Sternökosphären wurden als Bereich der Außentemperaturen für lebendige, aus Eiweißverbindungen gebaute Organismen die folgenden Werte angenommen:

$$\begin{cases} T_A = 353^\circ \text{ K} = +80^\circ \text{ C} \\ T_E = 203^\circ \text{ K} = -70^\circ \text{ C} \end{cases} \quad (1)$$

Der Anfang  $d_A$  und das Ende  $d_E$  der Sternökosphären wurden mit Hilfe der nachstehenden Formel berechnet:

$$\begin{cases} d_A = \left( \frac{T_*}{T_A} \right)^2 \cdot \frac{R_*}{2d} \\ d_E = \left( \frac{T_*}{T_E} \right)^2 \cdot \frac{R_*}{2d} \end{cases} \quad (2)$$

wobei  $T_*$ ,  $R_*$  die Oberflächentemperatur bzw. den Radius des Sternes und  $d$  die Distanz des Planeten von dem Sternzentrum bezeichnen.  $M_*$ ,  $L_*$  in Tab. 1 beziehen sich auf Masse und Leuchtkraft des Sternes.

Tabelle 1. Mittelwerte der Ökosphären für 87 Riesensterne

*	$\frac{R_*}{\odot=1}$	$\frac{M_*}{\odot=1}$	$\frac{L_*}{\odot=1}$	$d_A$ 10 <sup>6</sup> km	$d_E$ 10 <sup>6</sup> km	$d_E - d_A$ 10 <sup>6</sup> km	$\frac{d_E - d_A}{\odot=1}$	$P_A$	$P_E$
Riesen	34	8	510	3200	9700	6500	35	35 <sup>a</sup>	182 <sup>a</sup>

In den letzten Spalten der Tab. 1 wurden die Umlaufzeiten der gegebenenfalls vorhandenen Planeten am Anfang und Ende der Ökosphären mit Hilfe von Formel (3) berechnet:

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{d^3}{K^2 M_*}} \quad (3)$$

Die Umlaufzeiten erfüllen die Beziehungen:

$$\frac{P_E}{P_A} = \left( \frac{d_E}{d_A} \right)^{3/2} = \left( \frac{T_A}{T_E} \right)^3 \quad (4)$$

Die Zahlenwerte der Tab. 1 sind offenbar als Mittelwerte zu groß, da im betrachteten Teil des Weltraums sicher viele im Atlas nicht enthaltene Riesensterne, deren scheinbare Größe kleiner als 3,5 ist, vorhanden sind.

Um die obigen Ergebnisse begründen zu können, wurden zusätzlich die Ökosphären der Riesen, die in Bedeckungssternen großer Masse auftreten, berechnet [3]. Die Ergebnisse enthält Tab. 2.

2. Tabelle 2

Aus Tab. 2 geht hervor, daß der Überriese UW CMa A von der mächtigsten Ökosphäre umgeben ist. Sie übertrifft die unserer Sonne ungefähr 740mal und die des Subzwerges Wolf 359 etwa 80 000mal [1]. Die hypothetischen Planeten,

Tabelle 2

*	$R_*$ ☉=1	$M_*$ ☉=1	$L_*$ ☉=1	$T_*$ °K	$d_A$ 10 <sup>6</sup> km	$d_E$ 10 <sup>6</sup> km	$d_E - d_A$ 10 <sup>6</sup> km	$d_A$ ☉=1	$P_A$	$P_E$
UW CMa A	23,4	40,0	18000	32000	66850	202140	135290	739	1496 <sup>a</sup>	7800 <sup>a</sup>
AO Cas A	23,8	36,3	19600	30000	59760	180700	120120	661	1324	6903
UW CMa B	17,0	31,0	10300	32000	48570	146870	98300	537	1050	5474
VV Cep A	2400	44,5	7800	2500	41850	126550	84700	463	703	3682
AO Cas B	15,5	33,8	8600	30000	38920	117690	78770	430	723	3769
ε Aur A	250:	30:	49600	6000	25110	75930	50820	278	398	2073
ε Aur B	2500:	30:	124000	3500	8540	25820	17280	94	79	411
V Pup A	7,5	21,2	1500	20000	8370	25310	16940	93	91	475
Y Cyg A	4,8	17,6	1100	25000	8370	25310	16940	93	100	521
Y Cyg B	4,8	17,4	1100	25000	8370	25310	16940	93	101	524
VV Cep B	24,0	35,4	2600	11000	8100	24490	16390	90	67	350
ζ Aut A	290	31,9	1500	3160	8000	24430	16350	89	70	367
V Pup B	6,8	16,3	940	17000	5480	16570	11090	61	55	287
ζ Aut B	4,0	12,9	310	15000	2510	7590	5080	28	19	100

die den erwähnten Überriesen am Ende ihrer Ökosphäre umkreisen, müßten eine Umlaufzeit von rund 7800 Jahren besitzen. Sie ist also etwa 1,8 millionenmal größer als die des Subzwerges Wolf 359, für welche die Formel (3) den Wert von 38 Stunden ergibt. Einer solchen Mannigfaltigkeit der Erscheinungen sind wir bei Untersuchungen der Sternökosphären begegnet. Jeder Stern besitzt eine Ökosphäre. Alle Ökosphären sind geometrisch einander ähnlich, nur ihre Größen sind sehr verschieden. In Abb. 1 sind die betreffenden Parameter von UW CMa A, der Sonne und von Wolf 359 eingetragen.

### 3. Die Evolution der Ökosphären

Auf Grund der Evolution der Sterne des Hauptastes kann die entsprechende Ökosphären-Evolution untersucht werden. Als Grundsatz der Berechnungen wurde die Zusammenstellung der Sterne des Hauptastes aus dem „Handbuch der Astronomie“ von E. RYBKA [4] entnommen. Die Ergebnisse sind in Tab. 3 zusammengestellt.

4. Tabelle 3

$\alpha_A$ ,  $\alpha_E$  bezeichnen die scheinbaren Durchmesser des mütterlichen Sternes, beobachtet von Anfang und Ende der Ökosphäre und berechnet mit Hilfe der Formeln:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\alpha_A}{2} = \frac{R_*}{d_A} \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha_E}{2} = \frac{R_*}{d_E} \end{cases} \quad (5)$$

WO:

$$\alpha_A = \alpha_E \cdot \frac{d_E}{d_A}. \quad (6)$$

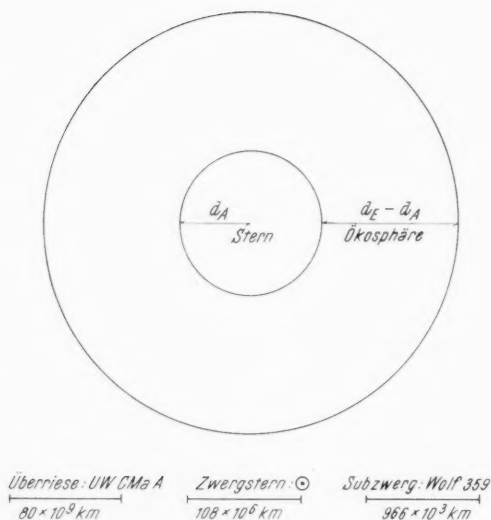


Abb. 1. Schema der Ökosphäre

Überriese: UW CMa A,  $R_* = 23 R_\odot$ ,  $M_* = 40 M_\odot$ ,  
 $L_* = 18\,000 L_\odot$ ,  $T_* = 32\,000^\circ$ ,  $d_E - d_A = 740 \cdot \odot$ .  
 Zwergstern:  $\odot$ ,  $R_\odot = 1$ ,  $M_\odot = 1$ ,  $T_\odot = 5700^\circ$ ,  
 $d_E - d_A = 1$ .

Subzwerg: Wolf 359,  $R_* = 0,032 R_\odot$ ,  $M_* = 0,25 R_\odot$ ,  
 $L_* = 0,000\,017 L_\odot$ ,  $T_* = 3100^\circ$ ,  $d_E - d_A = 0,0084 \cdot \odot$ .

Aus den Zahlen der Tab. 3 geht hervor, daß — entsprechend dem Abstieg des Sternes über die „Leitsprossen“ der Evolution der Sterne des Hauptastes — die Ökosphäre sich dem Sterne nähert und dünner wird, wobei das Verhältnis:

$$\frac{d_E}{d_A} = \left( \frac{T_A}{T_E} \right)^2 \quad (7)$$

gewahrt bleibt. Ein solches Verhalten der Ökosphäre ist eine natürliche Folge der Entwicklung des Sternes.

Tabelle 3. Zur Evolution der Ökosphären

*	Sp	M <sub>g</sub>	$R_* = 1$ ☉	$M_* = 1$ ☉	$L_* = 1$ ☉	T <sub>*</sub> °K	d <sub>A</sub> 10 <sup>6</sup> km	d <sub>E</sub> 10 <sup>6</sup> km	d <sub>E</sub> - d <sub>A</sub> 10 <sup>6</sup> km	P <sub>A</sub>	P <sub>E</sub>	α <sub>A</sub>	α <sub>E</sub>
Ori	09	3,6	7	27:	2000	28000°	15310	46300	30990	200 <sup>a</sup>	1043 <sup>a</sup>	2,2	0,7
α Vir	B2	2,3	5	11:	630	20000	5450	16480	60	66,5	347	4,3	1,4
α Lyr	A0	0,6	2,2	2,8:	52	12000	885	2676	10	8,6	44,8	11,9	3,9
α CMi A	dF5	2,8	1,8	1,2	5,8	7000	246	744	498	3,1	15,9	35,0	11,6
α Cen A	dG0	4,5	1,0	1,1	1,1	6000	100	304	203	0,53	2,76	47,6	15,7
ξ Boo B	dK4	7,7	0,65	0,58	0,06	4200	64	194	130	0,130	0,679	96,9	32,0
Krüger 60	dM3	11,9	0,14	0,30	0,001	3000	3,5	10,6	7,1	0,0021	0,011	191,	63,1

### III. Evolution des Planetensystems der Sonne

#### 1. Einleitung

Als Alter der Sonne (Spektraltypus dG2) werden rund sechs Milliarden Jahre angenommen. Wahrscheinlich ist die Sonne als ein Stern des Spektraltypus dG0 entstanden. Das Planetensystem wurde etwas später geboren, nicht schrittweise, sondern gleichzeitig. Wenn wir annehmen, daß die Evolution der Sonne auf diese Weise vor sich geht und in Zukunft wie die Evolution der Hauptast-Sterne (Tab. 3) fortschreiten wird, ergeben sich mit Hilfe unserer Formeln die Zahlen der Tab. 4.

Bei Berechnung der Zahlenwerte der Tab. 4 stützten wir uns auf folgende Anschauungen. Die Sonne verliert infolge der Ausstrahlung ununterbrochen Masse (jetzt etwa  $4 \times 10^6$  Tonnen pro Sekunde). Als Quelle der Ausstrahlungsenergie wird die Umwandlung von Wasserstoff in Helium nach der Formel von EINSTEIN:

$$E = c^2 M \quad (8)$$

angenommen. Als Ergebnis einer Verminderung der Sonnenmasse nimmt auch der Sonnenradius ab. Diese Verminderung verursacht nach und nach das Wegrücken der Planeten bei gleichzeitiger Zunahme ihrer Umlaufzeiten. Beide Veränderungen verlaufen nach den Formeln:

$$\begin{cases} D' = D (M'_\odot)^{-1/2} \\ P' = P (M'_\odot)^{-5/4}, \end{cases} \quad (9)$$

wobei  $D, P$  die aktuellen Distanzen und Umlaufzeiten der Planeten und  $D', P'$  die analogen Größen, welche der veränderten Sonnenmasse ( $M'_\odot$ ) entsprechen, bezeichnen.

Die Mittelwerte der jährlichen Oberflächentemperaturen der genügend rasch rotierenden Planeten werden sich nach und nach infolge Abnahme der Sonnentemperatur ( $T'_\odot$ ) und Zunahme der Distanz des Planeten ( $D'$ ) gemäß Gl. (10) vermindern:

$$T' = T'_\odot \sqrt{\frac{R'_\odot}{2 D'}}. \quad (10)$$

Aus den Zahlen der Tab. 4 können folgende Schlüsse gezogen werden: Man kann vermuten, daß die entfernteren Planeten — mit Jupiter beginnend — sich alle gleich nach ihrer Entstehung außerhalb der Ökosphäre befanden und infolgedessen nicht mehr belebt waren. Nach Abkühlen war ihre Oberflächentemperatur unter dem Einfluß der Sonnenstrahlung schon am Anfang kleiner als  $-140^\circ \text{C}$ . Der Planet Mars nahm sofort seinen Platz an den kühlen Grenzen der Ökosphäre ein und hat deshalb wahrscheinlich nicht mehr die höheren Stufen des Lebens erreicht. Die Erde placierte sich schon zu Beginn in der Mitte der Ökosphäre und wurde zuerst — nach Abkühlen — ein polarer Planet [5], der nur in subpolaren Gegenden belebt war, da in den Tropen mittags — wie man berechnen kann [1] — die Temperatur bis  $+150^\circ \text{C}$  zunahm.

#### 2. Die Gegenwart (Sonnentypus dG2)

Planet Mars rückt schon aus der Ökosphäre hinaus ( $T_{\text{Mars}} = -49^\circ \text{C}$ ). Die Erde ( $T_{\text{Erde}} = +4^\circ \text{C}$ ) schwebt in ihrem Zentrum. Die Biosphäre bedeckt die ganze Oberfläche des Planeten. Venus erlebt jetzt vermutlich den Zustand eines polaren Planeten ( $T_{\text{Venus}} = +51^\circ \text{C}$ ).

Tabelle 4. Die Evolution des Planetensystems der Sonne

$\odot$	$M_{\odot}'$ $\odot = 1$	$R_{\odot}'$ $\odot = 1$	$T_{\odot}'$ $^{\circ}\text{K}$	$d_A$ $10^6 \text{ km}$	$d_E$ $10^6 \text{ km}$	$d_E - d_A$ $10^6 \text{ km}$	Merkur	Venus	Erde	Mars	Jupiter	Saturn	Uranus	Neptun	Pluto	Parameter
<i>Sp</i>																
dG0	1,1	1,4	6000	102	309	207	55 479° 206° 0,214 2,0	103 351° 78° 0,548 1,1	143 299° 26° 0,888 0,8	217 240° -33° 1,671 0,5	742 135° -138° 10,53 0,2	1359 99° -174° 26,15 4,9	2736 71° -202° 74,58 2,4	4236 57° -216° 146,53 1,5	5625 50° -223° 219,59 1,2	$D' 10^6 \text{ km}$ $T' ^{\circ}\text{K}$ $T' ^{\circ}\text{C}$ $P'$ $\alpha'_{\odot}$
dG2	1,0	1,0	5700	92	275	183	58 449° +176° 0,241 1,4	108 324° +51° 0,615 0,7	150 277° +4° 1 <sup>a</sup> 0,5	228 224° -49° 1,881 0,3	778 125° -148° 11,86 6'	1425 85° -180° 29,46 3,4	2870 66° -207° 84,02 1,7	4495 54° -219° 169,8 1,1	5900 47° -226° 247,57 0,8	$D 10^6 \text{ km}$ $T ^{\circ}\text{K}$ $T ^{\circ}\text{C}$ $P$ $\alpha'_{\odot}$
dK4	0,58	0,65	4200	32,5	100	67	76 232° -41° 0,476 0,6	142 171° -102° 1,216 0,4	196 147° -126° 1,976 0,3	300 115° -158° 3,712 0,2	1020 65° -208° 23,44 3'	1875 49° -223° 58,21 1,7	3770 36° -237° 166,0 0,8	5905 29° -244° 325,56 0,5	7750 26° -247° 489,4 0,4	$D' 10^6 \text{ km}$ $T' ^{\circ}\text{K}$ $T' ^{\circ}\text{C}$ $P'$ $\alpha'_{\odot}$
dM3	0,30	0,14	3000	3,6	10,8	7,2	106 67° -206° 1,085 6,2	197 37° -236° 2,771 3,4	273 31° -242° 4,509 2,5	415 26° -247° 8,472 1,4	1420 15° -258° 53,43 0,5	2605 12° -260° 132,57 0,3	5240 9° -264° 378,4 0,1	8210 8° -265° 742,2 5'	10770 7° -266° 1115 <sup>a</sup> 4'	$D' 10^6 \text{ km}$ $T' ^{\circ}\text{K}$ $T' ^{\circ}\text{C}$ $P'$ $\alpha'_{\odot}$



### 3. Die Zukunft

Der Planet Mars wird die Ökosphäre verlassen und die Zahl der leblosen Planeten vermehren. Die Erde wird ein äquatorialer Planet [5]. Das Leben wird in die Tropen flüchten. Venus wird in die Mittelzone der Ökosphäre eindringen und die besten, milden thermischen Verhältnisse erreichen. Merkur wird, mangels einer Atmosphäre (freier Sauerstoff) und da kein Wasser in flüssigem Zustande vorhanden ist, weiterhin ein unfruchtbarer Planet bleiben.

### 4. Die weitere Zukunft (Sonne ein Stern des Typus dM3)

Alle Planeten werden ihre Distanzen von der Sonne verdoppeln und die Umlaufzeiten im Verhältnis zu den gegenwärtigen fünfmal vergrößern. Erde und Venus werden die Ökosphäre verlassen und ihre Oberfläche wird ganz gefroren sein. Es werden alle astrophysikalischen Vorgänge aufhören.

Zuletzt, wenn die Sonne den Zustand eines schwarzen Subzwerges erreichen wird, wird die Auflockerung des Planetensystems ganz aufhören. Das System — leblos und unsichtbar — wird mit der Sonne die Bahn um das Massenzentrum der Milchstraße ewig beschreiben.

## IV. Schlußfolgerungen

Wenn wir mit F. HOYLE [6] annehmen, daß nur Sterne mit gehemmter Rotation von Planeten umgeben sind, kommen wir zu dem Schluß, daß nur in der Umgebung der Zwerge der Spektraltypen F, G, K belebte Planeten in der Ökosphäre dieser Sterne zu suchen sind. Aus dem *Henry Draper Katalog* geht hervor, daß 63% der galaktischen Sterne zu diesen Spektraltypen gehören, daß also die Aussichten, belebte Planeten zu treffen, ziemlich groß sind. Die breiten Ökosphären der Riesensterne sind den Planetensystemen noch entzogen. Die Planeten werden dort erst nach Ablauf von vielen Milliarden Jahren entstehen.

### Literaturverzeichnis

1. J. GADOMSKI, Die Sternenökosphären im Radius von 17 Lichtjahren um die Sonne. *Proceedings of the VIIIth International Astronautical Congress, Barcelona 1957*, p. 127—136. Wien: Springer, 1958.
2. A. OPOLSKI, *Atlas Astronomiczny*. PZWS, 1948.
3. S. GAPOSCHKIN, Harvard College Observatory, Circular 421, p. 11 (1937).
4. E. RYBKA, *Astronomia Ogólna*. PWN, 1952.
5. J. GADOMSKI, Fünf Arten von ökosphärischen Planeten. *Proceedings of the IXth International Astronautical Congress, Amsterdam 1958*, Bd. II, p. 785—793. Wien: Springer, 1959.
6. M. H. BRIGGS, The Detection of Planets at Interstellar Distances. *J. Brit. Interplan. Soc.* 17, 59 (1959).

# A Direct Variational Method for the Calculation of Optimum Thrust Programs for Power-Limited Interplanetary Flight<sup>1</sup>

By

C. Saltzer<sup>2</sup> and C. W. Fetheroff<sup>3</sup>

(With 2 Figures)

(Received September 20, 1960)

## Abstract — Zusammenfassung — Résumé

**A Direct Variational Method for the Calculation of Optimum Thrust Programs for Power-Limited Interplanetary Flight.** A gradient method for determining optimum thrust programs for power-limited electric propulsion systems is presented. The method, which has been programmed for a medium-sized, stored-program digital computer, is given in detail for transfer between coplanar orbits in a central field for parameter ranges which correspond to interplanetary orbit transfer. Estimates of the magnitudes of the errors involved in application of the method are also given. Numerical results for an Earth-Mars mission are compared to results obtained by others utilizing indirect methods.

**Über eine direkte Variationsmethode zur Berechnung eines optimalen Schubprogramms für einen leistungsbegrenzten interplanetaren Flug.** Eine Gradientenmethode zur Bestimmung eines optimalen Schubprogramms für hinsichtlich der Leistung begrenzte elektrische Antriebssysteme wird angegeben; dieses Verfahren wurde für einen mittelgroßen Digitalrechner mit Programmspeicher programmiert. Abschätzungen der Größenordnung der Fehler werden ebenfalls angegeben. Numerische Resultate einer Erde-Mars-Reise werden mit Ergebnissen verglichen, die mit Hilfe anderer, indirekter Methoden erhalten wurden.

**Une méthode variationnelle directe pour le calcul de programmation optimale de poussée en vol interplanétaire avec poussée limitée.** Dans le cas d'une propulsion électrique de puissance limitée, une méthode de gradient est proposée pour la détermination du programme de poussée optimum. La méthode, programmée pour une calculatrice digitale de capacité moyenne, est détaillée pour le problème du transfert entre orbites coplanaires dans un champ de gravitation central. Les paramètres correspondent à un transfert interplanétaire. Les erreurs inhérentes à la méthode sont estimées. Les résultats numériques pour une mission Terre-Mars sont comparés à ceux obtenus par d'autres auteurs utilisant des méthodes indirectes.

<sup>1</sup> Portions of the material in this paper have been developed in connection with a project sponsored by the Advanced Research Projects Agency and monitored by the Propulsion Laboratory, Wright Air Development Division, Air Research and Development Command, United States Air Force.

<sup>2</sup> Professor of Applied Mathematics, University of Cincinnati, Cincinnati, Ohio, U.S.A.; Consulting Engineer, New Devices Laboratories, Tapco Group, Thompson Ramo Wooldridge Inc., Cleveland, Ohio, U.S.A.

<sup>3</sup> Project Engineer, New Devices Laboratories, Tapco Group, Thompson Ramo Wooldridge Inc., Cleveland, Ohio, U.S.A.

## 1. Introduction

The present interest in electric propulsion systems raises the problem of analyzing the performance capability of powered-flight vehicles. The objective of such an analysis is the determination of the relations between such parameters as the mass of the power plant per unit jet power, the duration of the mission, the vehicle payload fraction, the vehicle jet power, the specific impulse, and the thrust for various missions. Another objective is to determine the relative advantage of using an engine with a variable specific impulse and rate of mass flow as compared to using a less flexible engine.

In order to achieve these aims, it is first necessary to study the corresponding dynamical problems. For motion in field free space, constant fields, or linear fields, these dynamical problems have been solved [1, 2]. For escape from a circular orbit in a central field, numerical results were obtained by TSIEN [3] and verified by others, chiefly on a heuristic basis.

The difficulty of the general problem lies in the fact that the optimum thrust program is the solution of a boundary value problem for a system of non-linear ordinary differential equations subject to non-linear constraints. By selecting the jet power and the thrust acceleration as variables, IRVING and BLUM [4] have given an elegant formulation of the thrust programming problem for the power-limited engine when the criterion for optimality is the maximization of the payload fraction. It was shown that it is necessary to determine the minimum value for the integral of the square of the thrust acceleration for those thrust programs for which the initial and terminal conditions of the trajectory are satisfied. To obtain numerical solutions, the procedure followed by IRVING and BLUM consisted of assuming the required number of additional initial conditions and integrating the EULER equations numerically. The problem thus becomes the determination of the required additional initial conditions for which the resulting thrust program yields the specified terminal conditions for the trajectory. This procedure, however, is both lengthy and inaccurate.

The purpose of this paper is to present an alternative discretization for solving the variational problem formulated by IRVING and BLUM which allows the terminal conditions to be satisfied with any specified accuracy. The equations which result from this discretization are solved by HADAMARD's method of gradients [5]. An error analysis is also given.

The method described below has been programmed for a medium-size electronic digital computer (i.e., an IBM 653 and a Burroughs 204) and it has been found that the calculations converge rapidly<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Since completion of the work in this paper, an interesting gradient method has been suggested by H. J. KELLEY [10] for minimizing a given function of the terminal conditions or a functional of a set of variables where the time rates of change of these variables are a function of these variables, the time and a control function. Starting with a control function and a solution of the differential equations which satisfies the boundary conditions, he uses the linearized form of the differential equations to minimize the given function or functional by a "steepest descent" method. The numerical calculations are carried out for a discretized form of the linearized system. KELLEY's method is quite general and can be extended to the problem of this paper by formulating it for two control functions. A difficulty which can arise in KELLEY's method is based on the fact that in general the use of the linearized differential equations leads to a solution which violates the boundary conditions. If this is not corrected, the result may be in error, and if it is corrected, the correction process opposes the minimization procedure and the error of the function to be minimized will in general become oscillatory. An error analysis, which is

## II. Formulation of the Problem

Let

$m$  = total instantaneous vehicle mass,

$t$  = time,

$T$  = duration of mission,

$P$  = jet power,

$\bar{c}$  = exhaust velocity relative to the vehicle,

$\bar{a}$  = instantaneous acceleration of vehicle,

$\bar{f}$  = thrust force per unit mass of vehicle,

$\bar{f}'$  = total resultant force per unit mass on the vehicle excluding thrust and inertial forces.

The power in the jet is defined by

$$P = -\frac{1}{2} \dot{m} \bar{c}^2. \quad (1)$$

If the rocket equation is written as

$$\bar{f} = \frac{\dot{m} \bar{c}}{m}, \quad (2)$$

we have, following IRVING and BLUM,

$$\frac{\bar{f}^2}{2P} = -\frac{\dot{m}}{m^2}. \quad (3)$$

If the subscripts 0 and  $T$  are used to denote initial and terminal values, an integration yields

$$\frac{1}{m_T} = \frac{1}{m_0} + \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\bar{f}^2}{P} dt. \quad (4)$$

We will assume that the propellant exhaust velocity and rate of mass flow may be controlled independently, so that  $\bar{f}$  and  $P$  are independent. If we further assume a power limitation on the engine, then the payload fraction is a maximum with respect to  $P$  for  $P$  fixed at its maximum value<sup>1</sup>. Thus, if

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T \bar{f}^2 dt, \quad (5)$$

not given by KELLEY, would show that this factor, which depends on the deviation of the initial approximation, limits the accuracy of the method, and that for good results, a good initial approximation is required for certain classes of problems.

In the terminology of KELLEY's paper, the method of the present paper is based on the restriction of the "control functions" considered to a finite dimensional subspace of functions for which the terminal conditions are satisfied exactly, i.e. to within round-off error. The present method is thus analogous to the RAYLEIGH-RITZ method. The gradient method is used to solve the resulting system of non-linear simultaneous equations, and the accuracy can be controlled. It should be noted, however, that if the independent variable is to be minimized, the present method necessitates a transformation to parametric form while KELLEY's method is not subject to this restriction.

<sup>1</sup> The assertion that  $P$  must be fixed at its maximum value is valid only if there are no coasting arcs, i.e., the thrust never vanishes. For a general class of problems which includes this problem, the proof that there are no coasting arcs was given by G. LEITMANN [11].

then

$$\frac{1}{m_T} = \frac{1}{m_0} + \frac{J}{P}, \quad (6)$$

and, as noted by IRVING and BLUM, the maximum payload is obtained for that trajectory for which  $J$  is a minimum.

By NEWTON's Law

$$\ddot{a} = \ddot{r} + \ddot{r}'. \quad (7)$$

Hence

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T (\ddot{a} - \ddot{r}')^2 dt. \quad (8)$$

For motion in an inverse square central field, the circumferential and radial components of  $\ddot{a}$  are

$$a_\theta = \frac{1}{r} \dot{h} \quad (9)$$

$$a_r = \ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} \quad (10)$$

where  $r$  and  $\theta$  are the polar coordinates of the vehicle, and  $h$  is the angular momentum per unit mass,

$$h = r^2 \dot{\theta} \quad (11)$$

The field force is directed towards the center of the field and has the magnitude

$$f' = \frac{\mu}{r^2} \quad (12)$$

where  $\mu$  is the field strength, i.e., the product of NEWTON's constant and the mass of the central body. Eq. (8) then becomes

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T \left[ \left( \ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} + \frac{\mu}{r^2} \right)^2 + \left( \frac{\dot{h}}{r} \right)^2 \right] dt. \quad (13)$$

It may be noted that  $\ddot{r}'$  need not be a potential force. This term may include the field forces due to several bodies as well as time dependent forces.

The missions considered in this paper will consist of coplanar orbit transfers starting from a circular orbit. For these missions the boundary conditions which need be specified for solution of (13) are the initial conditions

$$\left. \begin{aligned} r &= r_0 \\ \dot{r} &= 0 \\ h &= h_0 = \sqrt{\mu r_0} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

and the terminal conditions

$$\left. \begin{aligned} r &= r_T \\ \dot{r} &= \dot{r}_T \\ h &= h_T \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

where the terminal values may be prescribed arbitrarily. Eqs. (13), (14), and (15) constitute a classical problem of the calculus of variations for the functions

$$r = r(t) \quad (16)$$

$$h = h(t). \quad (17)$$

The EULER equations for the integral (13), together with (14) and (15), is a two-point boundary value problem.

### III. Discretization of the Variational Problem

By analogy with the RAYLEIGH-RITZ method [5], we consider a set of functions with a finite number of parameters which satisfy the initial and terminal conditions, (14) and (15). This set consists of functions with piece-wise constant third derivatives for  $r(t)$  and piece-wise constant second derivatives for  $h(t)$  as indicated below.

Let  $x$ ,  $y$ , and  $z$  be defined by

$$z = \dot{h} \quad (18)$$

$$y = \dot{r} \quad (19)$$

$$x = \ddot{r} = \dot{y} \quad (20)$$

If  $n$  is a positive integer and  $j$  is an integer between zero and  $n$ , then the subscript  $j$  will denote the value of the variable at the time  $j T/n$ , e.g.,

$$r_j = r(j T/n).$$

The functions used are represented by

$$x(t) = x_j + \frac{n}{T} (x_{j+1} - x_j) (t - t_j) \quad (21)$$

$$z(t) = z_j + \frac{n}{T} (z_{j+1} - z_j) (t - t_j) \quad (22)$$

where

$$t_j \leq t \leq t_{j+1}$$

$$t_j = j T/n$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, (n-1).$$

The values of  $r$  and  $h$  at  $t = t_k$  are found by integration to be given precisely by the recursion formulas

$$h_{k+1} = h_k + \frac{T}{2n} (z_k + z_{k+1}) \quad (23)$$

$$r_{k+1} = r_k + \left(\frac{T}{n}\right) y_k + \frac{1}{6} \left(\frac{T}{n}\right)^2 (2x_k + x_{k+1}), \quad (24)$$

where

$$y_{k+1} = y_k + \frac{T}{2n} (x_k + x_{k+1}) \quad (25)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

The values of  $r_0$ ,  $y_0$ , and  $h_0$  are the initial values of  $r$ ,  $\dot{r}$ , and  $h$  as given in eq. (14).

The set of functions defined by (21) and (22) is a  $(2n+2)$  parameter set, depending on the parameters  $x_0, x_1, \dots, x_n, z_0, z_1, \dots, z_n$ , which satisfies the initial conditions. To satisfy the terminal conditions we note that these parameters must satisfy the requirements,

$$\left. \begin{aligned} r_n &= r_T \\ y_n &= \dot{r}_T \\ h_n &= h_T \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

It is a consequence of the recursion formulas that these constraints are linear and can be represented in the following way.

Let the functions  $u_1$ ,  $u_2$ , and  $u_3$  be defined by

$$u_1(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^n C_k x_k, \quad (27)$$

$$u_2(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^n D_k x_k, \quad (28)$$

$$u_3(z_0, z_1, \dots, z_n) = \sum_{k=0}^n C_k z_k, \quad (29)$$

where

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= C_n = \frac{T}{2n} \\ C_j &= \frac{T}{n}, \quad j = 1, 2, \dots, (n-1) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= \left( \frac{3n-1}{6} \right) \left( \frac{T}{n} \right)^2 \\ D_j &= (n-j) \left( \frac{T}{n} \right)^2, \quad j = 1, 2, \dots, (n-1) \\ D_n &= \frac{1}{6} \left( \frac{T}{n} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

By the recursion formulas

$$y_n = y_0 + u_1(x_0, x_1, \dots, x_n), \quad (32)$$

$$r_n = r_0 + y_0 T + u_2(x_0, x_1, \dots, x_n), \quad (33)$$

$$h_n = h_0 + u_3(z_0, z_1, \dots, z_n). \quad (34)$$

The constraints expressed by eqs. (26) thus become

$$u_1(x_0, x_1, \dots, x_n) = y_T - y_0, \quad (35)$$

$$u_2(x_0, x_1, \dots, x_n) = r_T - r_0 - y_0 T, \quad (36)$$

$$u_3(z_0, z_1, \dots, z_n) = h_T - h_0 \quad (37)$$

The pairs of functions defined by (21) and (22) form a  $(2n+2)$  dimensional vector space for which the coordinates of any point may be taken as a set of values for  $(x_0, x_1, \dots, x_n, z_0, z_1, \dots, z_n)$ . The constraints (35), (36), and (37) define an affine  $(2n-1)$  dimensional subspace of the  $(2n+2)$  dimensional space.

The radial and circumferential components,  $f_r$  and  $f_\theta$ , of the thrust acceleration can be computed from the trajectory defined by the pair of functions  $r(t)$  and  $h(t)$  by the formulas

$$f_r = \ddot{r} - \frac{\dot{h}^2}{r^3} + \frac{\mu}{r^2} \quad (38)$$

$$f_\theta = \frac{\dot{h}}{r} \quad (39)$$

Since the thrust acceleration is given by

$$\dot{f}^2 = \dot{f}_r^2 + \dot{f}_\theta^2, \quad (40)$$

$J$  becomes a function of the  $(2n+2)$  variables  $(x_0, x_1, \dots, x_n, z_0, z_1, \dots, z_n)$  subject to the above constraints. Moreover, every thrust program defined in this way gives a trajectory which satisfies the initial and terminal conditions exactly.

Although the integral  $J$  can be evaluated in closed form for the functions defined above, the trapezoidal approximation was used in the evaluation of  $J$  for simplicity. Thus the numerical approximation  $I$  for the value of  $J$  is defined by

$$I = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n C_j (\dot{f}_{rj}^2 + \dot{f}_{\theta j}^2) \quad (41)$$

where

$$\dot{f}_{rj} = x_j - \frac{h_j^2}{r_j^3} + \frac{\mu}{r_j^2} \quad (42)$$

$$\dot{f}_{\theta j} = \frac{z_j}{r_j}. \quad (43)$$

The discretized form of the problem is to determine values of  $(x_0, x_1, \dots, z_n)$  which satisfy (35), (36), and (37), and minimize the value of  $I$ .

#### IV. The Gradient Method of Solution

To minimize a function of several variables by the gradient method [5], any set of values of the variables which satisfies the constraints is selected, and the gradient of the function is computed at this point. Since the only trajectories which satisfy the initial and terminal conditions are those represented by points of the  $(2n-1)$  dimensional affine subspace defined by eqs. (35), (36), and (37), new values of the variables are taken which lie on the projection in this subspace of the gradient line through the selected point. This is accomplished by means of LAGRANGE multipliers.

Thus, in place of  $I$ , the function to be minimized is

$$S = I + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 \quad (44)$$

where  $\lambda_1, \lambda_2$ , and  $\lambda_3$  are the LAGRANGE multipliers. The components of the gradient of  $S$  are denoted by  $Q_k$  and are

$$Q_k = \frac{\partial S}{\partial x_k} = \frac{\partial I}{\partial x_k} + \lambda_1 C_k + \lambda_2 D_k \quad (45)$$

$$Q_{k+n+1} = \frac{\partial S}{\partial z_k} = \frac{\partial I}{\partial z_k} + \lambda_3 C_k \quad (46)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

where

$$\frac{\partial I}{\partial x_k} = C_k \dot{f}_{rk} + \sum_{j=0}^n C_j \left[ \dot{f}_{rj} \left( \frac{3h_j^2}{r_j^4} - \frac{2\mu}{r_j^3} \right) - \frac{\dot{f}_{\theta j}^2}{r_j} \right] r_{jk} \quad (47)$$

$$\frac{\partial I}{\partial z_k} = \frac{C_k \dot{f}_{\theta k}}{r_k} - 2 \sum_{j=0}^n \left( \frac{C_j \dot{f}_{rj} h_j}{r_j^3} \right) h_{jk} \quad (48)$$



$$r_{jk} = \begin{cases} 0 & (j = k = 0 \quad \text{or} \quad k > j) \\ \left(\frac{3j-1}{6}\right) \left(\frac{T}{n}\right)^2 & (k = 0, \quad j \neq 0) \\ (j-k) \left(\frac{T}{n}\right)^2 & (1 \leq k \leq j-1) \\ \frac{1}{6} \left(\frac{T}{n}\right)^2 & (k = j \neq 0) \end{cases} \quad (49)$$

$$h_{jk} = \begin{cases} 0 & (j = k = 0 \quad \text{or} \quad k > j) \\ \frac{T}{2n} & (k = 0, \quad j \neq 0 \quad \text{or} \quad k = j \neq 0) \\ \frac{T}{n} & (1 \leq k \leq j-1) \end{cases} \quad (50)$$

If  $(x_0, x_1, \dots, z_n)$  is a set of values of  $x_k$  and  $z_k$  which satisfies the constraints, then a new set of values  $(\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{z}_n)$  which satisfies the constraints may be defined by

$$\tilde{x}_k = x_k + \eta Q_k \quad (51)$$

$$\tilde{z}_k = z_k + \eta Q_{k+n+1} \quad (52)$$

$$(k = 0, 1, \dots, n)$$

where  $\eta$  is a parameter proportional to the distance moved along the gradient, and the  $Q_k$  ( $k = 0, 1, \dots, 2n+1$ ) are computed using the set of values  $(x_0, x_1, \dots, z_n)$ . Hence by (35), (36), and (37),

$$u_1(Q_0, Q_1, \dots, Q_n) = 0 \quad (53)$$

$$u_2(Q_0, Q_1, \dots, Q_n) = 0 \quad (54)$$

$$u_3(Q_{n+1}, Q_{n+2}, \dots, Q_{2n+1}) = 0 \quad (55)$$

By (45) and (46) these three equations are a system of three simultaneous equations for the three LAGRANGE multipliers  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ , and  $\lambda_3$ .

$$B_1 \lambda_1 + B_2 \lambda_2 = - \sum_{k=0}^n C_k \frac{\partial I}{\partial x_k} \quad (56)$$

$$B_2 \lambda_1 + B_3 \lambda_2 = - \sum_{k=0}^n D_k \frac{\partial I}{\partial x_k} \quad (57)$$

$$B_1 \lambda_3 = - \sum_{k=0}^n C_k \frac{\partial I}{\partial z_k} \quad (58)$$

where

$$B_1 = \frac{T^2}{n} \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \quad (59)$$

$$B_2 = \frac{T}{2} B_1 \quad (60)$$

$$B_3 = \frac{T^4}{n} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4n} + \frac{1}{18n^3}\right) \quad (61)$$

With the values of  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ , and  $\lambda_3$  determined by this system of linear equations,  $(\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{z}_n)$  specify a one parameter set of trajectories for which the initial

and terminal conditions are satisfied, and  $I$  becomes a function of the single variable  $\eta$ . Since the magnitudes of the components of the gradient are likely to be quite large compared to the magnitudes of  $x_k$  and  $z_k$  for the initial set of values selected for  $x_k$  and  $z_k$ , it is necessary to restrict the magnitude of  $\eta$  to prevent the loss of too many significant figures in the computation of  $\tilde{x}_k$  and  $\tilde{z}_k$ . A trial value of  $\eta$  was obtained by setting the linearized expression for  $dI/d\eta$  equal to zero. This value of  $\eta$  was used providing it satisfied the inequality

$$0 > \eta \geq -10 \left[ \frac{\sum_{k=0}^n (x_k^2 + z_k^2)}{2n+1} \frac{\sum_{k=0}^n Q_k^2}{Q_{k+n+1}} \right]^{1/2} \quad (62)$$

If this inequality was not satisfied, the term on the right was used.

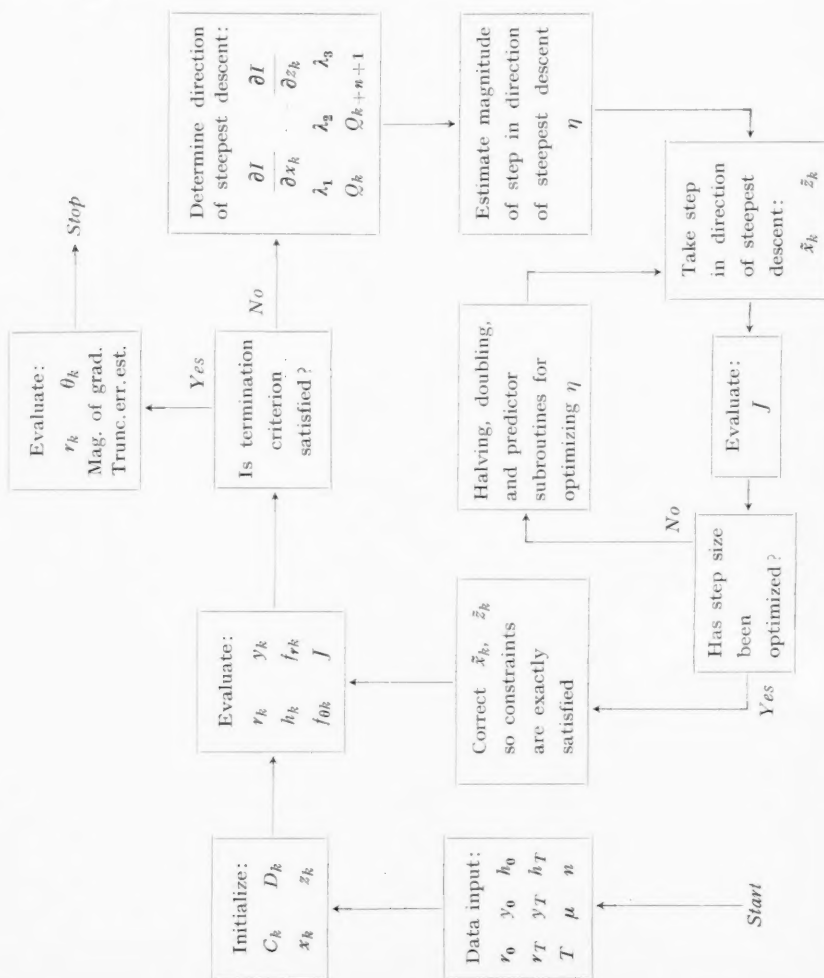


Fig. 1. Computation procedure

The value of  $I$  was computed for the trial value of  $\eta$  and also for half and double the trial value. This halving or doubling process was continued until the corresponding values computed for  $I$  stopped decreasing. Quadratic interpolation was used simultaneously to predict and verify the value of  $\eta$  for which  $I$  is a minimum. When the optimum value of  $\eta$  was determined, the corresponding values of  $(\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{z}_n)$  were utilized to recompute the gradient of  $I$  and the values of the LAGRANGE multipliers, and the preceding calculations were repeated. Two or three repetitions of the method were usually found to be sufficient.

For the initial approximations for  $x_k$  and  $z_k$ , any set of values which satisfies the initial and terminal conditions may be used. The initial approximation used was defined by

$$x_k = B_4 + B_5 k \quad (63)$$

$$z_k = \frac{h_T - h_0}{T} \quad (64)$$

where

$$B_4 = \frac{2}{T^2} [3(r_T - r_0 - y_0 T) - (y_T - y_0) T] \quad (65)$$

$$B_5 = \frac{6}{n T^2} [(y_T - y_0) T - 2(r_T - r_0 - y_0 T)] \quad (66)$$

A simplified flow chart indicating the procedure is shown in Fig. 1. Satisfactory results were obtained by this method for  $n$  equal to 10 or 20 for trip times up to approximately one period in the initial orbit. For the longer trip times round-off error became increasingly significant, and a subroutine to distribute this error was incorporated into the calculation of  $\tilde{x}_k$  and  $\tilde{z}_k$  as indicated in Fig. 1.

### V. Error Estimate

The sources of error in the preceding calculations are:

1. The restriction of the trajectories considered.
2. The replacement of the integral  $J$  by the sum  $I$ .
3. The termination of the iteration procedures.
4. Round-off error.

For the integrand considered, the gradient method is essentially stable when the changes of  $(x_1, x_2, \dots, z_n)$  are not too large. The limitation on the magnitude of these changes together with the round-off error correction in the computation makes the round-off error, as well as its effect on the convergence, negligible. The number of iterations required for convergence was determined by noting the magnitude and rate of change of the gradient. For the parameter ranges considered, the termination error was also found to be negligible.

If the functions  $r(t)$  and  $h(t)$  for the optimum trajectory have continuous derivatives of the fourth and third orders respectively, then the piece-wise linear approximations for  $\dot{r}$  and  $\dot{h}$  would not deviate from the true optimum solutions by more than one half the product of  $(T/n)^2$  and the maximum modulus of  $d^4 r/dt^4$  or  $d^3 h/dt^3$  respectively in each of the subintervals. The corresponding error in  $J$  is of the order of  $T^3/n^2$  for sufficiently large  $n$ .

The truncation error due to the use of the trapezoidal rule for evaluating the integral  $J$  in each subinterval does not exceed the product of  $1/24 (T/n)^3$  and the maximum modulus of the second derivative of the square of the thrust acceleration in that subinterval [6]. Since the derivative for the actual solution is not known, this factor is estimated by using the quotient of the symmetric second

difference of the computed solution for the square of the thrust acceleration and  $(T/n)^2$ . The error due to the replacement of  $J$  by  $I$  was therefore estimated by

$$\frac{1}{24} \left( \frac{T}{n} \right)^2 \sum_{j=1}^{n-1} (|f_{r,j+1}^2 - 2f_{r,j}^2 + f_{r,j-1}^2| + |f_{\theta,j+1}^2 - 2f_{\theta,j}^2 + f_{\theta,j-1}^2|)$$

Since the error in  $J$  due to the restriction of the trajectories considered would be of the same order as that due to truncation error resulting from use of the trapezoidal rule, twice the above estimate was used as the overall error estimate.

Although the error estimates obtained with the above expression were acceptable for the parameter ranges considered, several possible methods for improving the accuracy or extending the range of parameters over which the method would be applicable have been considered. Among these are the use of SIMPSON's rule instead of the trapezoidal rule in evaluation of the integral in each subinterval; the use of higher order derivatives of  $r$  and  $h$  as parameters in the discretization; and the use of CHEBYSHEV points [7] instead of equally spaced points for the specification of the subintervals, since the largest contributions to the value of the integral are obtained during the initial and terminal phases of the mission.

## VI. Earth—Mars Orbit Transfer

A typical application of the method just described would be the calculation of a heliocentric transfer between the orbits of the Earth and Mars. For this example the orbits will be assumed to be coplanar, and the Earth's orbit will be assumed to be circular. The actual perihelion distance and eccentricity are used for the orbit of Mars [8].

For the mission just described, some numerical results were obtained by IRVING and BLUM [4]. These results were obtained by generating repeated numerical solutions of the EULER equations on a large stored-program digital computer (1103 A), varying the assumed initial conditions until the desired terminal conditions were approximately matched. For a powered flight duration of three months and a rendezvous with the Mars orbit approximately 15 degrees from perihelion, IRVING and BLUM obtained a value for  $J$  of 0.0317 kw/kg with a terminal velocity mismatch of approximately three percent. For the same terminal conditions obtained by IRVING and BLUM, the direct method described in this paper yielded a value for  $J$  of 0.0320 kw/kg, a difference of less than one percent.

To determine the sensitivity of  $J$  to small changes in the terminal conditions, the values of  $J$  for the above mission were calculated both for an exact velocity match at the same point on the orbit of Mars and also for an exact match at the perihelion. The corresponding values obtained for  $J$  were 0.0359 kw/kg and 0.0382 kw/kg respectively. Thus what appears to be a negligible error in matching the terminal velocity leads to an error of over 12 percent in the value of  $J$ . It is therefore apparent that the payload of a low thrust vehicle can be extremely sensitive to the terminal conditions specified for the mission, and that care must be taken in selecting these specifications.

In further support of this observation, it is interesting to note that the closest point on the Mars orbit, i.e., perihelion, is not the optimum point for rendezvous with respect to vehicle payload capability. In Fig. 2 the variation in  $J$  for the Earth-Mars transfer is plotted against the heliocentric angle between the rendezvous point and the perihelion of Mars for several flight durations. It is apparent that the optimum value of the true anomaly in the orbit of Mars for rendezvous

is a function of the duration of powered flight. The large penalty in  $J$  for the selection of a non-optimum rendezvous point in the terminal orbit can be seen in Fig. 2. The use of the transversality condition [4] to determine the optimum point directly requires much more calculation than the procedure used above.

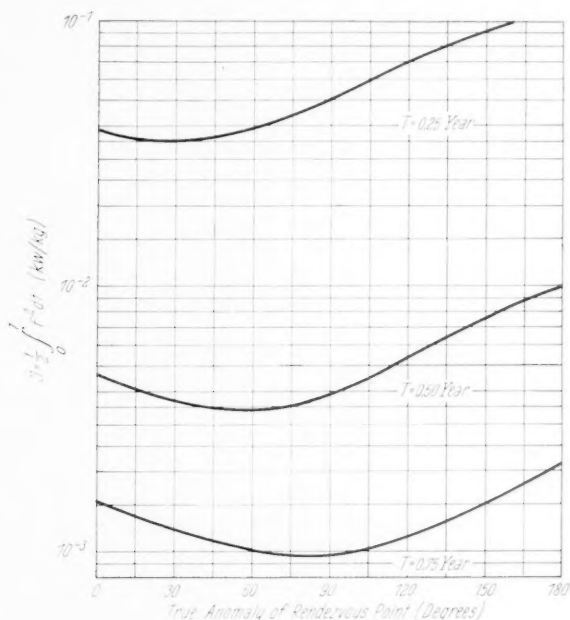


Fig. 2. Value of  $J$  required for heliocentric orbit transfer from Earth to Mars vs. true anomaly of rendezvous in Mars orbit for several powered-flight durations

The results of a parametric study of the relative payload capabilities of electric and chemical propulsion vehicles for missions to Mars and Venus, utilizing results calculated by the method presented in this paper, have appeared elsewhere [9].

#### References

1. D. B. LANGMUIR, Low-Thrust Flight: Constant Exhaust Velocity in Field-Free Space. Space Technology, edited by H. SEIFERT, chapter 9. New York: J. Wiley, 1959.
2. D. E. OKHOTSIMSKII and T. M. ENEEV, Certain Variational Problems Associated with the Launching of an Artificial Earth Satellite. The Russian Literature of Satellites, Part I, Article 1. International Physical Index, 1958.
3. H. S. TSIEN, Take-Off From Satellite Orbit. J. Amer. Rocket Soc. **23**, No. 4 (1953).
4. J. H. IRVING, Low-Thrust Flight: Variable Exhaust Velocity in Gravitational Fields. Space Technology, edited by H. SEIFERT, chapter 10. New York: J. Wiley, 1959.
5. R. COURANT, Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations. Bull. Amer. Math. Soc. **49** (1943).
6. F. B. HILDEBRAND, Introduction to Numerical Analysis, p. 75. New York: McGraw-Hill, 1956.

7. See [6], p. 280.
8. The American Ephemeris and Nautical Almanac for the Year 1960. Washington: U. S. Government Printing Office, 1958.
9. C. SALTZER, R. T. CRAIG and C. W. FETHEROFF, Comparison of Chemical and Electric Propulsion Systems for Interplanetary Travel. Proc. I.R.E. **48**, No. 4 (1960).
10. H. J. KELLEY, Gradient Theory of Optimal Flight Paths. J. Amer. Rocket Soc. **30**, No. 10 (1960).
11. G. LEITMANN, Minimum Transfer Time for a Power-limited Rocket. Lockheed LMSD Tech. Memo. 49769, August 1959 (presented at the XIth International Astronautical Congress, Stockholm, August 1960).

## Lois de similitude dans le calcul des trajectoires de rentrée et de l'ablation frontale des engins

Par

L. Broglio<sup>1</sup>

(Avec 14 Figures)

(Reçu le 28 novembre 1960)

### Résumé — Zusammenfassung — Abstract

**Lois de similitude dans le calcul des trajectoires de rentrée et de l'ablation frontale des engins.** Parmi les problèmes posés par la rentrée des corps balistiques dans l'atmosphère, le calcul des trajectoires de rentrée et celui de l'ablation de l'engin sont, dans quelques cas comme celui des corps météoriques, intimement liés, du fait que si la trajectoire influence directement l'ablation, celle-ci, à son tour, réagit sur la trajectoire elle-même par suite de la variation de masse qu'elle entraîne.

L'auteur montre ici comment il est possible de définir, dans l'étude de ces phénomènes complexes, des variables réduites qui ramènent au tracé d'un petit nombre de courbes universelles la représentation des intégrales des équations du mouvement, du transfert de chaleur et de la variation de masse par ablation, obtenues par intégration numérique ou sous forme d'expressions explicites approchées. Les lois de similitude ainsi dégagées permettent une discussion rapide et aisée, en fonction des paramètres adimensionnels restants, de la plupart des problèmes pratiques qui se posent dans le projet des engins appropriés à la rentrée dans une atmosphère planétaire.

**Ähnlichkeitsgesetze zur Bestimmung von Rückkehrbahnen und der frontalen Ablation von Flugkörpern.** Unter den Problemen, die beim Wiedereintauchen von ballistischen Flugkörpern in die Atmosphäre auftreten, sind die Bestimmung der Wiedereintauchbahn und die Bestimmung der Ablation des Körpers in einigen Fällen, ähnlich wie bei Meteoriten, eng verbunden, weil die Bahn die Ablation beeinflusst und umgekehrt durch die Änderung der Masse durch die Ablation wiederum die Bahn beeinflusst wird.

Es zeigt sich nun, daß man reduzierte Variablen einführen kann, mit deren Hilfe die Gleichungen für die Bewegung, für den Wärmeübergang und für den Massenverlust graphisch durch eine geringe Zahl von Kurven dargestellt werden können, die durch numerische Integration oder in Form von Näherungsausdrücken erhalten werden können. Diese Ähnlichkeitsgesetze ergeben auf einfache Weise einen Überblick über das Eintauchen von Flugkörpern in Planetenatmosphären.

**Similitude Law in the Computation of Re-entry and Frontal Ablation of Missiles.** Among the problems arising from the re-entry of ballistic missile bodies into the atmosphere, the computation of the re-entry trajectories and that of the ablation

<sup>1</sup> Preside della Scuola d'Ingegneria Aeronautica, Università degli Studi di Roma, Via Eudossiana, 18, Roma, Italia.

of the body are, in some cases, like meteorites, intimately interconnected due to the fact that, if the trajectory influences the ablation, this in turn affects the trajectory in consequence of the change of mass which it entails.

The author here shows how in the study of such complex phenomena it is possible to define reduced variables which condense the representation of the integrals of the equations of motion, of the heat transfer and of the mass loss into a graphical presentation of a small number of universal curves which are obtained by numerical integration or in the form of approximate explicit expressions. The laws of similitude thus derived lend themselves to quick and easy discussion, in terms of nondimensional constant parameters, of most of the practical problems which arise in the design of missiles suitable for re-entry into a planetary atmosphere.

## I. La trajectoire

### 1. Position du problème

Considérons la rentrée d'un corps balistique dans une atmosphère planétaire, en nous bornant au cas d'une planète parfaitement sphérique entourée d'une atmosphère elle-même à symétrie sphérique au repos par rapport à la planète. Ce problème classique a été longuement étudié, et les deux équations qui déterminent la trajectoire du corps dans l'atmosphère sont bien connues; malheureusement, ces équations, non linéaires, ne peuvent être intégrées, dans le cas général, que numériquement.

Les efforts des chercheurs se sont développés dans deux principales directions: d'une part on a tenté d'obtenir des solutions approchées simples, telle la représentation bien connue d'ALLEN et EGGERS pour la rentrée balistique sous les grands angles [1]; d'autre part on a établi, comme l'a fait, par exemple, D. R. CHAPMAN [2], des lois de similitude. L'étude de CHAPMAN est cependant approchée, puisqu'il néglige deux termes, dont le premier est petit à très grande altitude, et le deuxième au voisinage du sol. Malgré cette approximation, les équations de CHAPMAN doivent encore être intégrées numériquement, mais elles ne contiennent plus le paramètre balistique, c'est-à-dire qu'elles représentent des lois de trajectoires universelles, indépendantes du corps particulier considéré.

Dans le présent travail, le problème est formulé sans le recours à aucune approximation; les équations obtenues sont donc rigoureuses à toute altitude *sans contenir cependant, elles non plus, le paramètre balistique*. Il en résulte que les lois qui peuvent en être dégagées sont générales et permettent de calculer les flux de chaleur et les accélérations avec toute la précision souhaitable dans l'évaluation de ces grandeurs fondamentales, ce que n'autorisent pas toujours les méthodes approchées précédemment rappelées. Nous insistons sur le fait que le calcul exact du flux de chaleur et des accélérations est essentiel pour le projet d'un véhicule spatial, surtout avec un équipage humain.

### 2. Équations générales

Les quantités nécessaires pour définir la trajectoire que parcourt le mobile dans un plan diamétral sont la distance  $r$  au centre de la planète, la vitesse  $V$  sur la trajectoire, et l'angle  $\theta$  de la vitesse avec l'horizontale du lieu.

Les forces extérieures agissant sur le corps sont représentées sur la Fig. 1. Elles se réduisent au poids  $W = mg$ , à la résistance aérodynamique  $D$  et à la force de portance  $L$ . On prend pour  $D$  l'expression:

$$D = (1/2) c_D \rho A V^2, \quad (1)$$



où  $c_D$  est le coefficient de résistance,  $A$  la section principale. Dans les conditions de rentrée, et dans le domaine hypersonique,  $c_D$  est essentiellement indépendant des conditions de vol, c'est-à-dire de  $q$  et  $V$ .

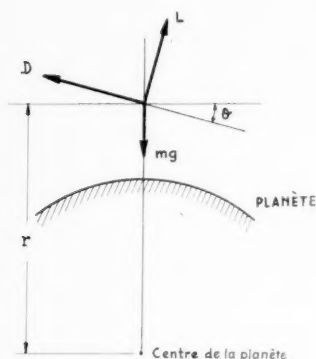


Fig. 1

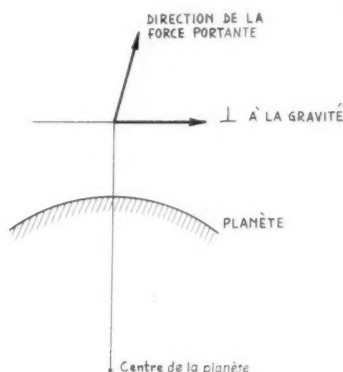


Fig. 2

Les forces extérieures, ainsi que l'accélération, sont projetées sur deux directions non perpendiculaires: la direction de la portance, et la normale à la gravité (Fig. 2). On obtient ainsi:

$$\frac{d \log w^2}{dr} - \frac{k q}{\sin \theta} \left( 1 - \frac{L}{D} \tan \theta \right) = 0 \quad (2)$$

$$r^2 \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \right) + \frac{2 g r^2}{w^2} - \frac{L}{D} \frac{k q}{\cos^3 \theta} = 0, \quad (3)$$

où

$$w^2 = V^2 r^2 \cos^2 \theta. \quad (4)$$

La quantité

$$k = \frac{g A c_D}{W} \quad (5)$$

est reliée au paramètre balistique  $\Delta$  par la relation:

$$k \Delta = g. \quad (6)$$

On voit sur les équations (2) et (3) que, dans le cas balistique ( $L = 0$ ), la deuxième n'est autre que celle de la trajectoire Képlérienne, tandis que la première ne dépend que de la résistance aérodynamique.

Il faut remarquer aussi que la décélération maximale, la contribution de gravité mise à part, est proportionnelle à la résultante des forces autres que la pesanteur, qui se réduisent à la résistance et à la portance; le rapport de cette décélération à l'accélération de la pesanteur, représenté dans la suite par  $n$ , est alors donné par:

$$n = \frac{\sqrt{L^2 + D^2}}{W^2} = \frac{k q V^2}{2 g} \sqrt{1 + \left( \frac{L}{D} \right)^2}. \quad (7)$$

### 3. Maximum de $ng$

Les équations précédentes permettent de trouver des relations entre les valeurs des différentes quantités correspondant au maximum de  $ng$ ; en effet, ce maximum est défini par:

$$\frac{d}{dt} \left[ \varrho V^2 \sqrt{1 + \left( \frac{L}{D} \right)^2} \right] = 0, \quad (8)$$

soit:

$$2 \frac{dV}{dt} + \frac{V}{\varrho} \frac{d\varrho}{dt} - V^2 \sin \theta \frac{d}{dr} \log \sqrt{1 + \left( \frac{L}{D} \right)^2} = 0. \quad (9)$$

Si on utilise alors la loi exponentielle usuelle de variation de la densité

$$\varrho = \varrho_0 \exp(-\beta z), \quad (10)$$

on a

$$\frac{d\varrho}{dt} = \beta \varrho V \sin \theta,$$

tandis que, par ailleurs, l'accélération sur la trajectoire est donnée par:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{Dg}{W} + g \sin \theta = g \sin \theta - \frac{k}{2} \varrho V^2. \quad (11)$$

Partant, si on indique par un astérisque les quantités relatives au point de  $ng$  maximum, il vient:

$$\frac{k \varrho_*}{\sin \theta_*} = \beta + \frac{2g_*}{V_*^2} - \left[ \frac{d}{dr} \log \sqrt{1 + \left( \frac{L}{D} \right)^2} \right]_*.$$

Enfin, en introduisant la relation de définition (7), écrite au point \*, on obtient la relation suivante caractéristique du maximum de  $ng$ :

$$\frac{k \varrho_*}{\sin \theta_*} = \frac{\beta - \left[ \frac{d}{dr} \log \sqrt{1 + \left( \frac{L}{D} \right)^2} \right]_*}{1 - \frac{\sin \theta_*}{n_*} \sqrt{1 + \left( \frac{L}{D} \right)^2}_*} \quad (12)$$

Dans la plupart des cas,  $\theta_*$  est un angle petit, et  $n_*$  bien supérieur à l'unité, tandis que  $(L/D)$ , en vol hypersonique, ne saurait atteindre des valeurs élevées: en conséquence, le deuxième terme du dénominateur de (12) est petit par rapport à 1. Si  $L/D$  au point \* est, de plus, supposé nul, on a la forme approchée

$$\frac{k \varrho_*}{\sin \theta_*} \sim \beta. \quad (12')$$

#### 4. Forme adimensionnelle des équations du mouvement

Les équations générales (4) peuvent se mettre sous une forme adimensionnelle qui permet l'élimination du paramètre balistique, ou des quantités qui lui sont liées, en rapportant chaque grandeur à sa valeur au point \*: on introduit ainsi les variables

$$\xi = 1 - \frac{r_*}{r}; \quad U = \frac{w_*^2}{w^2}; \quad X = \frac{\sin \theta_*}{\sin \theta}; \quad Y = \frac{\cos \theta_*}{\cos \theta}; \quad (13)$$

si on admet pour le rapport de la portance à la résistance la représentation

$$L/D = \frac{\lambda f(\xi)}{\operatorname{tg} \theta_*}, \quad (14)$$

où  $f(\xi)$  est une fonction donnée et  $\lambda$  une constante, et si on évalue  $k$  au moyen de son expression (12') en posant  $\alpha = \beta r_*$ , on obtient les équations adimensionnelles suivantes:

$$\begin{aligned} \frac{d \log U}{d\xi} + \alpha \frac{X - \lambda Y f(\xi)}{(1 - \xi)^2} \exp\left(-\frac{\alpha \xi}{1 - \xi}\right) &= 0, \\ \frac{d}{d\xi} [Y^2 (1 - \xi)^2] + \frac{\alpha \sin \theta_*}{\bar{n}_*} U - \alpha \lambda Y^3 f(\xi) \exp\left(-\frac{\alpha \xi}{1 - \xi}\right) &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

où:

$$\bar{n}_*/n_* = [1 + \lambda^2/f^2(0) \operatorname{tg}^2 \theta_*]^{-1/2}, \quad (16)$$

$X$  et  $Y$  étant par ailleurs liés par la relation

$$\frac{\sin^2 \theta_*}{X^2} + \frac{\cos^2 \theta_*}{Y^2} = 1. \quad (17)$$

Les conditions initiales qui déterminent les solutions des équations (15) sont simplement:

$$\text{pour } \xi = 0: \quad U = 1; \quad X = 1; \quad Y = 1. \quad (18)$$

On voit que les seuls paramètres subsistant dans les équations (16), (17) et (18) sont  $n_*$ ,  $\theta_*$ ,  $\lambda$ ; en particulier, le paramètre balistique a été éliminé; les équations deviennent ainsi indépendantes de chaque mobile particulier et présentent donc un caractère universel; si on les intègre avec les conditions initiales (18), on obtient:

$$\begin{aligned} U &= \exp \left[ -\alpha \int_0^\xi \frac{X - \lambda Y f(\xi)}{(1 - \xi)^2} \exp\left(-\frac{\alpha \xi}{1 - \xi}\right) d\xi \right], \\ Y^2 &= \frac{1}{(1 - \xi)^2} \left\{ 1 - \frac{\alpha \sin \theta_*}{\bar{n}_*} \int_0^\xi \left[ U - \frac{\bar{n}_* \lambda Y^3}{\sin \theta_*} f(\xi) \exp\left(-\frac{\alpha \xi}{1 - \xi}\right) \right] d\xi \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Une méthode d'intégration pas à pas, combinée avec un procédé d'approximations successives, peut s'appliquer avec succès aux équations (19).

### 5. Solution approchée

Revenant aux équations (4), on voit que la deuxième peut s'écrire:

$$\frac{d \cos \theta}{dr} = -\frac{k \varrho L}{2D} + \left( \frac{g}{V^2} - \frac{1}{r} \right) \cos \theta. \quad (20)$$

Le dernier terme du second membre de l'équation (20) s'annule pour la vitesse orbitale: jusqu'au point où les phénomènes d'échauffement cinétique et d'accélération ont de l'importance, les deux termes  $g/V^2$  et  $-1/r$ , qui sont toujours de signe opposé, sont du même ordre de grandeur. Ainsi, principalement si  $L/D$  a une valeur assez élevée, on peut négliger ce dernier terme, et on obtient une solution approchée sous la forme

$$\begin{aligned} \cos \theta - \cos \theta_* &= -\frac{k}{2} \int_{r_*}^r \frac{L}{D} \varrho dr, \\ \frac{\bar{w}^2}{\bar{w}_*^2} &= \exp k \int_{r_*}^r \frac{\varrho}{\sin \theta} \left( 1 - \frac{L}{D} \operatorname{tg} \theta \right) dr. \end{aligned} \quad (21)$$

Les équations (21) ont déjà été obtenues par l'Auteur, sous une forme très voisine, dans [3]: elles ont été reprises en [4]. Cette solution peut s'écrire, avec les variables adimensionnelles,

$$\frac{1}{Y} = 1 - \frac{\alpha \lambda}{2} \int_0^{\xi} \frac{f(\xi)}{(1-\xi)^2} \exp\left(-\frac{\alpha \xi}{1-\xi}\right) d\xi,$$

$$U = \exp\left[-\alpha \int_0^{\xi} \frac{X - \lambda Y f(\xi)}{(1-\xi)^2} \exp\left(-\frac{\alpha \xi}{1-\xi}\right) d\xi\right], \quad (22)$$

où  $X$  est encore donné par (17) lorsque  $Y$  a été calculé.

### 6. Échauffement cinétique

Une fois la trajectoire calculée, on peut obtenir le flux de chaleur par unité de surface et de temps. Sa valeur au point de stagnation, pour un corps arrondi, est donnée, pour une rentrée sur la terre, par [5]:

$$q \text{ (kW/m}^2\text{)} = \frac{1,1 \cdot 10^5}{\sqrt{R(\text{m})}} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{1/2} \left(\frac{V}{\sqrt{g r_0}}\right)^3, \quad (23)$$

où  $R$  est le rayon de courbure au nez de l'engin, et  $r_0$  le rayon de la terre (on obtient des formules analogues, avec d'autres constantes, pour les autres planètes). Introduisant les quantités adimensionnelles utilisées précédemment, on obtient:

$$q = \frac{q_u}{\sin \theta_*} \left[ Y (1-\xi) \sqrt{\frac{\tilde{n}_*}{U}} \right]^3 \exp\left(-\frac{\alpha}{2} \frac{\xi}{1-\xi}\right), \quad (24)$$

où

$$q_u \text{ (kW/m}^2\text{)} = \frac{1,1 \cdot 10^5}{\sqrt{R(\text{m})}} \left(\frac{\alpha}{k r_* \rho_0}\right)^{1/2} \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{3/2}. \quad (25)$$

On voit ainsi que les paramètres définissant la forme du corps apparaissent seulement dans  $q_u$ , tandis que le rapport  $q/q_u$  est une fonction intrinsèque des variables adimensionnelles de la trajectoire, ce qui précise la loi de similitude à laquelle obéissent, eux aussi, les flux de chaleur instantanés.

La quantité de chaleur totale transmise au corps jusqu'au point de décélération maximale est:

$$Q = Q_u \left(\frac{1}{\sin \theta_*}\right)^{3/2} \tilde{n}_* \int_0^1 \frac{X Y^2}{U} \exp\left(-\frac{\alpha}{2} \frac{\xi}{1-\xi}\right) d\xi, \quad (26)$$

où

$$Q_u = q_u \sqrt{\frac{\alpha r_*}{2 g_*}}. \quad (27)$$

On voit qu'il y a donc aussi une loi de similitude pour les quantités de chaleur totales.

### 7. Résultats et discussion

*Rapport (portance/résistance) constant.* La théorie développée aux paragraphes précédents a été appliquée à la détermination des caractéristiques de vol pour une rentrée soit à vitesse orbitale, soit à vitesse de fuite.

En premier lieu, on a effectué les calculs pour tout un ensemble de valeurs, supposées constantes dans chaque cas, du rapport portance/résistance.

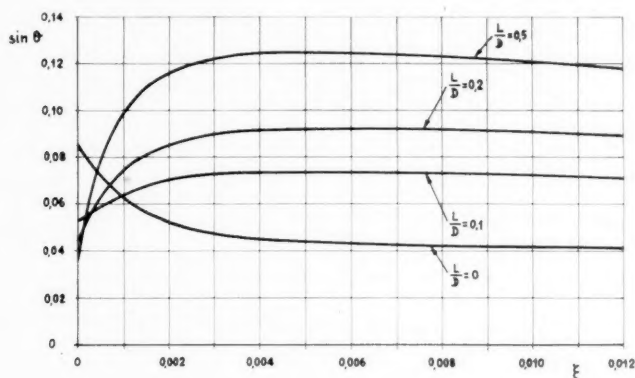


Fig. 3. Vitesse orbitale; variation de l'angle de vol avec  $\xi = 1 - r^*/r$ ; rapport  $L/D$  constant (décélération maximale = 10 g)

On a pris une valeur de la décélération totale maximale égale à 10 g. Pour chaque valeur du rapport  $L/D$ , on a déterminé les valeurs de  $\theta_*$  d'une façon telle que la vitesse limite (à très grande altitude) soit égale à la vitesse orbitale (ou de fuite).

Les résultats relatifs à la rentrée à la vitesse orbitale sont donnés sur la Fig. 3, qui représente les variations de l'angle d'entrée en fonction de l'altitude. On voit qu'en usant d'une portance moyenne, par exemple, pour  $L/D$  compris entre 0,1 et 0,5, l'angle d'entrée varie entre  $4^\circ$  et  $7^\circ$ : les problèmes de guidage se trouvent largement facilités par rapport au cas balistique pur ( $L/D = 0$ ) rappelé également sur la Fig. 3. D'autres quantités intéressantes sont représentées sur les Fig. 4 et 5, toujours dans le cas d'une rentrée à vitesse orbitale. La Fig. 4 donne la variation de la quantité de chaleur totale transmise avant la décélération maximale: on y voit l'effet bénéfique des valeurs élevées du rapport  $L/D$ . Ces résultats sont en bon accord avec ceux de [4].

La Fig. 5 donne la variation du flux de chaleur maximal en fonction de  $L/D$ . On voit que cette variation est très faible.

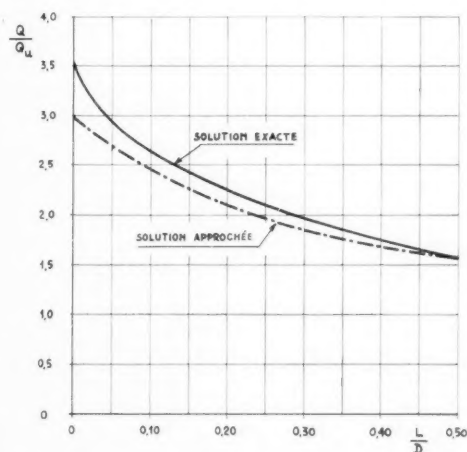


Fig. 4. Vitesse orbitale; rapport  $L/D$  constant; chaleur totale (décélération maximale = 10 g)

On peut tirer des conclusions analogues en observant les Fig. 6, 7 et 8 relatives aux rentrées à la vitesse de fuite. Il faut remarquer que l'analyse est en fait

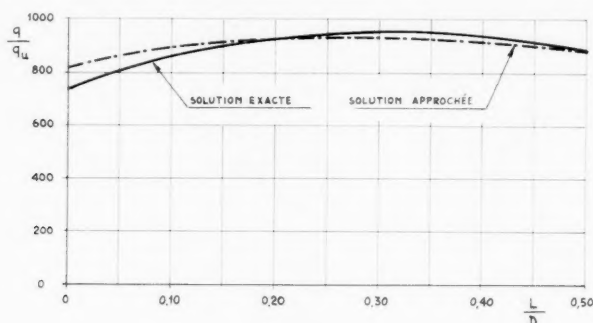


Fig. 5. Vitesse orbitale; rapport  $L/D$  constant; variation du flux de chaleur maximal (décélération maximale = 10 g)

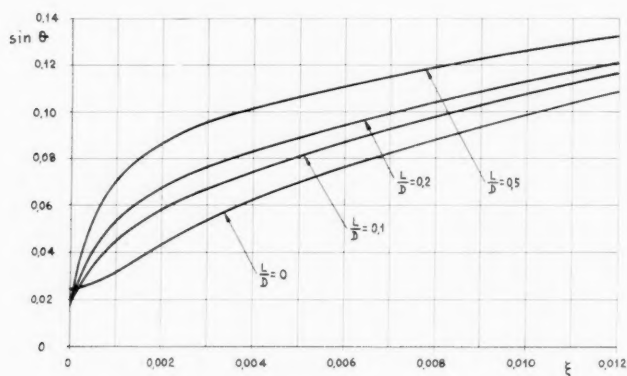


Fig. 6. Vitesse de fuite; variation de l'angle de vol avec  $\xi = 1 - r_*/r$ ; rapport  $L/D$  constant (décélération maximale = 10 g)

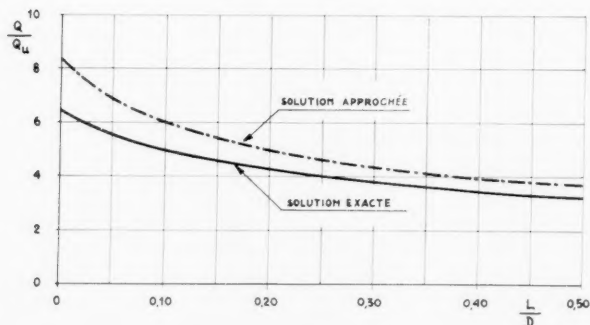


Fig. 7. Vitesse de fuite; rapport  $L/D$  constant; chaleur totale (décélération maximale = 10 g)

incomplète puisqu'il faudrait en principe considérer aussi des grandeurs telles que la quantité de chaleur transmise après le point de décélération maximale. Mais ces régimes dépendent essentiellement de la loi de variation de  $L/D$  adoptée alors afin d'éviter les ricochets ou les accroissements excessifs de décélération, aussi on ne saurait tirer de conclusions générales.

*Rapport  $L/D$  variable.* On a effectué des calculs analogues dans le cas particulier suivant de variation du rapport portance/résistance:

$$L/D = 0,2 \exp\left(-\frac{\gamma \xi}{1 - \xi}\right).$$

Des résultats typiques sont donnés sur les Fig. 9 et 10, en échelle logarithmique. Pour les deux cas de vitesse orbitale et de vitesse de fuite, on a représenté la quantité de chaleur totale et le flux de chaleur en fonction de  $\gamma/\alpha$ . On voit que les courbes présentent deux tendances asymptotiques, respectivement pour  $\gamma/\alpha$  voisin de 1 et pour  $\gamma/\alpha$  très petit. On observe au contraire des variations im-

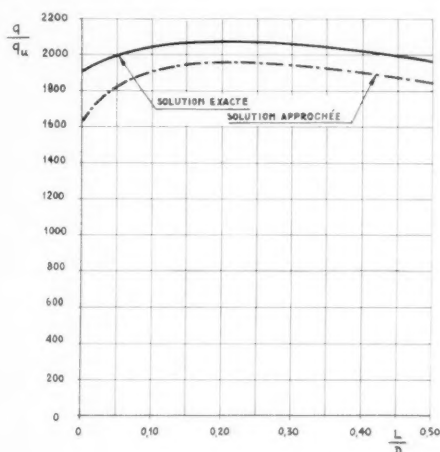


Fig. 8. Vitesse de fuite; rapport  $L/D$  constant; variation du flux de chaleur maximal (décélération maximale = 10 g)

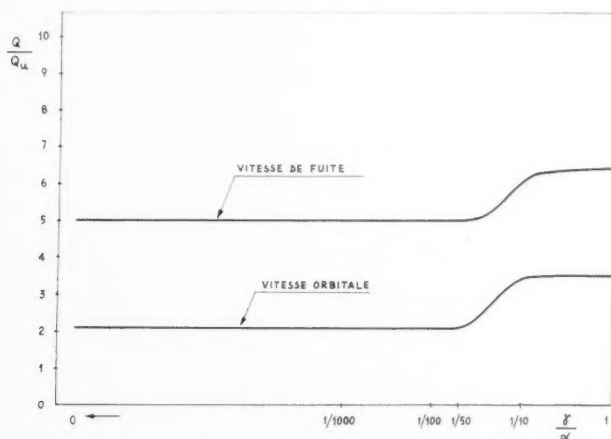


Fig. 9. Rapport  $L/D$  variable; chaleur totale (décélération maximale = 10 g)

portantes entre 1/50 et 1/10. De toutes façons l'effet de la portance est ici aussi favorable par la diminution de chaleur transmise qui en résulte.

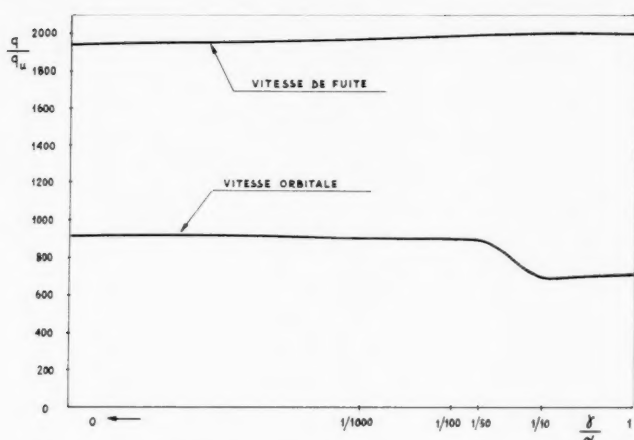


Fig. 10. Rapport  $L/D$  variable; flux de chaleur maximal en fonction de  $\gamma/\alpha$  (décélération maximale = 10 g)

## II. L'ablation

### 1. Position du problème

On considère, dans ce chapitre, l'ablation météorique se produisant dans la rentrée. Les revêtements de protection par ablation sont, comme on sait, caractérisés par deux paramètres principaux, le coefficient d'ablation  $L$  (masse sublimée par unité de quantité de chaleur transmise au corps) et la température d'ablation  $T_a$ . Il faut pour obtenir un effet protecteur satisfaisant que  $L$  soit suffisamment grand et  $T_a$  suffisamment bas. Les matériaux qui présentent ces caractères ont aussi, en général, une conductivité calorifique très faible; dans ce qui suit, on se place pour étudier le problème, dans le cas limite d'une conductivité nulle.

### 2. Equations générales

Considérons le cas d'une trajectoire balistique faisant un angle constant  $\theta_E$  avec l'horizontale. La vitesse  $V$  du corps satisfait alors à l'équation bien connue:

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dz} = \frac{c_D \rho A g}{2 W \sin \theta_E}, \quad (28)$$

à laquelle nous ajoutons l'équation exprimant l'équilibre des flux de chaleur à la surface du corps au cours de la sublimation

$$L' \frac{dS}{dt} + q = 0, \quad (29)$$

où  $L' = L + c T_a$ ;  $S$  est l'épaisseur du corps à l'instant considéré du processus d'ablation, tandis que  $dS/dt$  est la vitesse d'ablation, et  $Q$  le flux de chaleur transmis au corps.

Pour résoudre le système (28) et (29), on pose:

$$W = \alpha A \gamma_a (S_a + S_f) = \alpha A \gamma_a S, \quad (30)$$

$$q = q_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{1/2} \left( \frac{V}{\sqrt{g r_0}} \right)^3. \quad (31)$$



Dans (30),  $\alpha$  est un coefficient dépendant de la géométrie du corps ( $\alpha = 2$  pour l'hémisphère mince creux);  $S_f$  épaisseur fictive représentant la contribution de la structure et de la charge utile au poids total de l'engin, est une constante, tandis que l'épaisseur totale  $S = S_a + S_f$  est une fonction du temps à déterminer. L'équation (31) n'est autre que l'équation (23), dans laquelle on a posé

$$q_0 \text{ (kW/m}^2\text{)} = 1,1 \cdot 10^5 / \sqrt{R(\text{m})}.$$

Si on emploie les deux autres relations:

$$dz/dt = -V \sin \theta_E, \quad (31)$$

$$dQ/dz = -\beta Q, \quad (32)$$

on peut dire que les équations (28) et (29) constituent un système reliant les inconnues  $V$  et  $S$  à la variable indépendante  $t$ .

### 3. Loi de similitude

Posons:

$$\begin{aligned} u &= \frac{S}{S_E}; & v &= \frac{V^2}{V_E^2}; & x &= x_0 \sqrt{\frac{Q}{Q_0}}, \\ x_0^2 &= \frac{Q_0 g c_D}{\alpha \gamma_a \beta S_E \sin \theta_E}, & (33) \\ H &= \frac{Q_0}{L' \sqrt{g r_0}} \frac{V_E^2}{g r_0} \left( \frac{2}{\beta S_E \sin \theta_E} \frac{\alpha \gamma_a}{Q_0 g c_D} \right)^{1/2}; \end{aligned}$$

Les équations (28) et (29) deviennent respectivement:

$$u \frac{dv}{dx} + x v = 0, \quad (34)$$

$$\frac{du}{dx} + H v = 0, \quad (35)$$

auxquelles il faut ajouter les conditions aux limites:

$$\text{pour } x = 0: \quad u = 1 \quad \text{et} \quad v = 1. \quad (36)$$

Le problème est ainsi réduit à ne dépendre que d'un seul paramètre,  $H$ , qui est le paramètre principal de cette étude. On voit sur les équations (34), (35) et (36) que  $u$  est toujours positif,  $du/dx$  toujours négatif, et  $d^2u/dx^2$  toujours positif. Cela veut dire que, pour chaque  $H$ , la courbe  $u = u(x)$  décroît rapidement en tendant asymptotiquement vers une valeur limite  $u_\infty$ .

La valeur limite  $u_\infty$  correspond, théoriquement, à  $x = \infty$ , mais tous les calculs montrent qu'elle est en fait atteinte aux grandes altitudes. Il existe une relation entre  $H$  et  $u_\infty$ , ce qui constitue le résultat le plus important de l'étude, car la connaissance du comportement asymptotique de  $u$  au voisinage de  $u_\infty$  peut contribuer efficacement à la résolution du problème de la protection thermique de la structure et de la charge utile. D'ailleurs  $u_\infty$  donne le pourcentage de poids structural et de charge qu'on peut transporter avec sûreté dans les conditions de rentrée caractérisées par le paramètre  $H$  qui dépend du corps ainsi que de la température.

On tire, des équations (34), (35) et (36):

$$u \frac{d^2u}{dx^2} + x \frac{du}{dx} = 0, \quad (37)$$

avec, pour  $x = 0$ :

$$u = 1; \quad du/dx = -H. \quad (38)$$

L'intégration pas à pas de l'équation (37), avec les conditions initiales (38), ne présente pas de difficultés.

#### 4. Solution asymptotique

Il est possible d'obtenir une solution approchée des équations (37) et (38) qui semble assez satisfaisante. Dans (37) on peut remplacer  $x/u$  par  $x/u_\infty$ : en effet, lorsque  $x = 0$ , ces deux termes sont égaux et restent par conséquent toujours très voisins puisque, comme on l'a remarqué,  $u$  atteint rapidement sa limite  $u_\infty$ . On a ainsi, par intégration directe:

$$\frac{1-u}{H} = \int_0^x \exp(-x^2/2 u_\infty) dx, \quad (39)$$

ce qui, pour  $x \rightarrow \infty$ , donne:

$$\frac{1-u_\infty}{\sqrt{u_\infty}} = H \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (40)$$

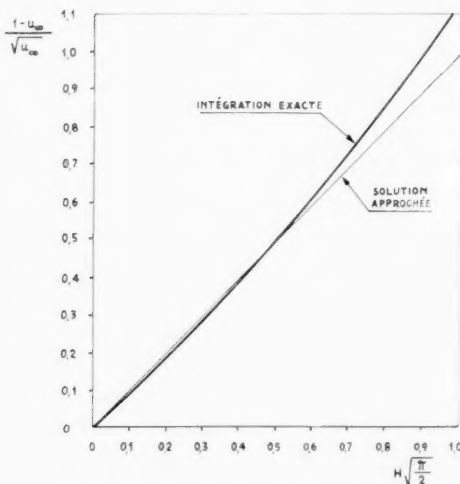


Fig. 11. Variations de l'épaisseur

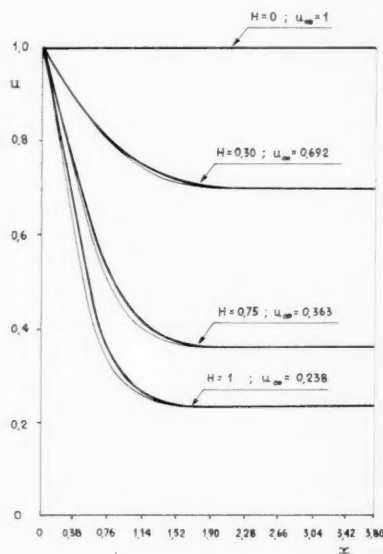


Fig. 12. Ablation atmosphérique; variation de l'épaisseur avec  $x$

On obtient de la sorte, pour tout engin et toute trajectoire (paramètre  $H$ ), la proportion  $u_\infty$  de poids structural qu'on peut transporter. On a aussi:

$$\frac{1-u}{1-u_\infty} = \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2 \sqrt{u_\infty}} \right), \quad (41)$$

$$(V/V_E)^2 = \exp(-x^2/2 u_\infty), \quad (42)$$

$$-\frac{dV}{dt} = \beta V_E^2 \frac{\sin \theta_E}{2} \cdot \frac{x^2}{2 u_\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2 u_\infty}\right), \quad (43)$$

$$\frac{2Q}{\beta S_E L' V_E \sin \theta_E} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1-u_\infty}{u_\infty} = \frac{x}{\sqrt{2 u_\infty}} \exp\left(-\frac{3x^2}{4 u_\infty}\right). \quad (44)$$

On voit que, dans la solution asymptotique, la décélération maximale est atteinte pour  $x^2/2 u_\infty = 1$ , et ne dépend pas du processus d'ablation, mais de  $u_\infty$ . Le flux de chaleur maximal se produit lorsque  $x^2 = (2/3) u_\infty$ , mais dépend des caractéristiques d'ablation, et décroît lorsque  $(1 - u_\infty)/u_\infty$  croît.

Il est également intéressant de remarquer que toutes les formules approchées précédentes se réduisent, lorsque  $u_\infty = 1$  (pas d'ablation), aux formules exactes valables dans ce cas.

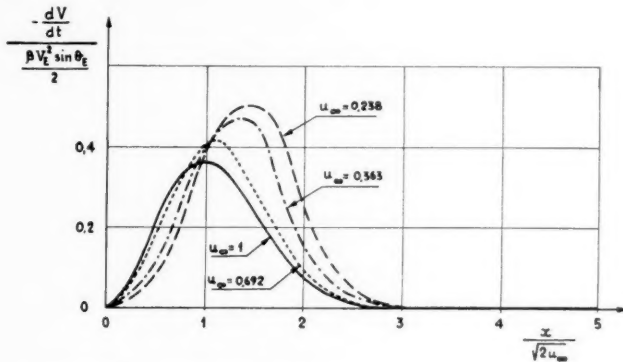


Fig. 13. Ablation atmosphérique; variation de l'accélération avec  $x/\sqrt{2u_\infty}$

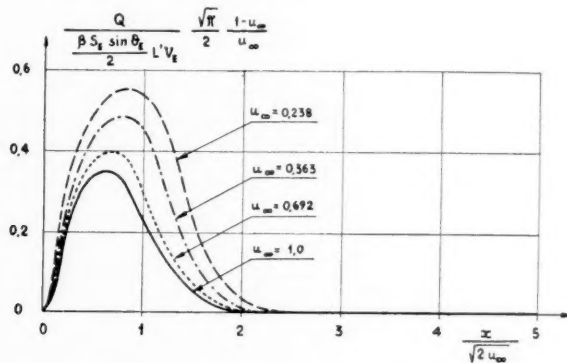


Fig. 14. Ablation atmosphérique; flux de chaleur convective

### 5. Résultats typiques

Les résultats précédents sont résumés sur des graphiques directement utilisables dans les projets d'engins.

La Fig. 11 donne la quantité  $(1 - u_\infty)/\sqrt{u_\infty}$  en fonction de  $H\sqrt{\pi/2}$ ; la solution approchée donnée par (40) y est également indiquée: on voit que la différence est très petite.

Pour diverses valeurs de  $H$ , c'est-à-dire, de  $u_\infty$ , les courbes de la Fig. 12 donnent la variation en fonction de  $x$  de l'épaisseur  $u$ . Les courbes en traits épais donnent la solution exacte qui est comparée à la solution approchée (41), tracée en traits minces. La différence est absolument négligeable.

Enfin, les Fig. 13 et 14 donnent, pour les mêmes valeurs de  $H$ , la variation des accélérations et des flux de chaleur en fonction de  $x/2\sqrt{u_\infty}$ .

Il est clair, puisque le choix de la valeur de  $H$  est dicté par des considérations portant sur la trajectoire et les caractéristiques de l'engin, qu'une analyse de l'ablation atmosphérique peut être conduite très rapidement et avec facilité à partir de ces courbes.

#### Bibliographie

1. J. H. ALLEN et A. J. EGGERS, JR., A Study of the Motion and Aerodynamic Heating of Missiles Entering the Earth's Atmosphere at High Supersonic Speeds. NACA TN 4047, October 1957.
2. D. R. CHAPMAN, An Approximate Analytical Method for Studying Entry into Planetary Atmospheres. NACA TN 4276, May 1958.
3. L. BROGLIO, Heat Conduction in Solids at Hypersonic Speeds. AGARD Report 209, October 1958.
4. L. LEES, F. W. HARTWIG et C. B. COHEN, Use of Aerodynamic Lift During Entry into the Earth's Atmosphere. J. Amer. Rocket Soc., September 1959.
5. M. W. RUBESIN, The Influence of Aerodynamic Heating on the Structural Design of Aircraft. V.I.D.Y.A. Associates, Palo Alto, California, 1958.

## Minimum-Time Steering Programs for Orbital Transfer with Low-Thrust Rockets

By

C. R. Faulders<sup>1</sup>

(With 7 Figures)

(Received December 11, 1960)

### Abstract — Zusammenfassung — Résumé

#### Minimum-Time Steering Programs for Orbital Transfer with Low-Thrust Rockets.

Variational calculus is applied to the determination of steering programs for minimum-time transfer of a low-thrust rocket between coplanar orbits in an inverse-square gravitational field. The thrust acceleration is assumed constant. Differential equations and boundary conditions are derived for the general problem of transfer between noncircular orbits. With the analysis restricted to circular orbits, an approximate analytical solution of the variational differential equations for steering angle as a function of time is obtained by assuming small changes in orbital radius. This solution indicates that, depending on the boundary conditions, the steering angle measured from the tangential direction may either be confined to the first and fourth quadrants and have both positive and negative time derivatives, or may vary through all four quadrants with the time derivative always positive. The complete differential equations are integrated numerically for a radius ratio of 1.5, circular initial and final orbits, and a ratio of thrust to initial gravity force of 1/6, conditions which correspond to an Earth-to-Mars transfer with a thrust acceleration of  $10^{-4}$  Earth gravities. The steering program for this case is found to be of the category wherein the time derivative of the steering angle is always positive, the thrust vector rotating through roughly 280 degrees of arc.

Über hinsichtlich der Zeit minimisierte Steuerprogramme für Bahnübergänge mit Raketen von sehr kleinem Schub. Der Übergang zwischen zwei komplanaren Bahnen in einem NEWTONschen Gravitationsfeld wird für Raketen mit sehr geringem Schub als Variationsproblem formuliert. Die Gleichungen werden zunächst allgemein aufgestellt, dann für Kreisbahnen spezialisiert. Man erhält eine Näherungslösung für den Steuerwinkel als Funktion der Zeit, wenn man weiters annimmt, daß sich der Radius der Anfangs- von dem der Endbahn wenig unterscheidet. Diese Lösung zeigt, daß je nach den Randbedingungen der Steuerwinkel — gemessen von der Tangente weg — entweder auf den ersten und vierten Quadranten beschränkt bleibt und positive und negative Ableitungen nach der Zeit besitzt, oder aber in alle vier Quadranten fallen kann, wobei seine Ableitungen nach der Zeit wesentlich positiv sind. Die Differentialgleichungen wurden numerisch für einen Übergang von der Erdbahn auf die Marsbahn integriert (Radienverhältnis 1,5, Kreisbahnnäherung, Beschleunigung infolge des Schubes  $10^{-4} g$ ). In diesem Fall ist die zeitliche Ableitung des Steuerwinkels stets positiv und der Schubvektor dreht sich um etwa 280°.

<sup>1</sup> Aero-Space Laboratories, Missile Division, North American Aviation, Inc., Downey, California, U.S.A.

**Programmes de guidage à temps minimum pour les transferts entre orbites à l'aide de fusées de poussée faible.** Le calcul des variations est appliqué à la recherche des programmes de guidage assurant un transfert à temps minimum par fusées de faible poussée entre orbites coplanaires dans un champ de gravitation variant suivant l'inverse du carré de la distance. L'accélération est supposée constante. Les équations différentielles et conditions aux limites sont obtenues pour le problème général des orbites non circulaires. Pour les orbites circulaires une solution analytique approchée est obtenue sous l'hypothèse que les changements de rayon orbital sont faibles. Suivant les conditions aux limites, l'angle de guidage, mesuré à partir de la tangente à la trajectoire, peut être confiné au premier et quatrième quadrant avec des variations temporelles positives et négatives ou parcourir les quatre quadrants avec une dérivée temporelle toujours positive.

Une intégration numérique complète est faite pour un rapport de 1.5 des rayons d'orbites et un rapport 1/6 de la poussée à la force de gravitation initiale. Ces conditions correspondent à un transfert Terre-Mars avec une accélération de  $10^{-4} g$ . Le programme de guidage est alors de la catégorie où la dérivée de l'angle de guidage est toujours positive, le vecteur poussée tournant environ de  $280^\circ$ .

### List of Symbols

$f$	Ratio of thrust per unit mass to initial gravitational acceleration	$\theta$	Angle between radius and reference direction in polar coordinate system
$F$	Function defined by Eq. (6)	$\mu$	Gravitational constant
$g_e$	Gravitational acceleration of Earth at sea level	$\mu_j$	Unspecified function corresponding to Lagrangian multiplier
$h$	Angular momentum per unit mass	$\nu$	Ratio of $\mu_j$ to $\mu_h$ expressed by Eqs. (16) and (17)
$I$	Time integral of $F(t)$	$\xi$	Function of $\theta$
$k$	Constant of integration	$\phi$	Steering angle, or angle between thrust vector and positive tangential direction ( $\phi$ increases as thrust vector rotates toward outward radial direction)
$r$	Radius measured from center of gravitational field		
$t$	Time		
$t_0$	Constant of integration		
$T$	Total time of flight		
$u$	Radial component of velocity		
$x_j$	Dependent variable (i.e., $u, r, h, \phi, \theta$ )		
$z$	$\tan \phi$		
$\alpha$	$(t + t_0)$		
$\mathcal{H}$	$v_1 - \int_0^t f \cos \phi \, dt$		
$\eta$	Function of $\theta$		

### Subscripts

$f$	Final orbit
$i$	Initial orbit
$T$	Time of arrival at destination orbit

### Superscripts

(\*) Dimensional reference value of ( )

## I. Introduction

Electrically powered propulsion systems offer a potential means for continuous application of low thrust over an entire space flight trajectory, except for planetary escape and landing phases. The ion rocket and the plasma rocket are typical forms of electrical propulsion. An attractive future application of low-thrust rockets is in the transfer of a space vehicle from one planetary orbit to another. Here, the inherent advantage of a powered-flight trajectory over a ballistic trajectory, where thrust is applied impulsively by means of chemical rockets, lies in possible reduction of the overall mass ratio due to the higher specific impulse of the electrical system. Additional advantages might include use of a single nuclear powerplant for both propulsion and on-board electrical power and the possibility of continuous trajectory corrections during the

midcourse portion of the flight. A more immediate application of low-thrust rockets might be in transfer between Earth satellite orbits.

With interplanetary flight using continuous thrust, as with the more traditional modes of transportation, minimizing travel time is of great importance. In general, time is a precious commodity to be conserved wherever possible. In particular, the requirements of equipment reliability and, with manned missions, the rigors of crew confinement are direct functions of the time of flight. Certainly there are other considerations that may be equally important. In [1], for example, the minimization of propellant mass is discussed, while in [2] and [3] some approaches to simplifying the guidance scheme are proposed. Regardless of the compromises made for a particular mission, however, the necessity of establishing the characteristics of minimum-time trajectories is apparent.

Steering programs for minimum-time orbital transfer were first considered in [4]. Thrust acceleration was assumed constant, and the calculus of variations was employed to determine differential equations describing the steering-angle program resulting in a minimum time integral. Numerical integration was carried out for a radius ratio of 1.5 and a ratio of thrust to initial gravity force of 1/6, corresponding to an Earth-to-Mars flight with a thrust acceleration of  $10^{-4}$  Earth gravities. Initial and final orbits were assumed to be of zero eccentricity. Unfortunately, the radius was selected as the independent variable, and infinite derivatives of radial velocity with respect to the radius at the boundaries necessitated integrating between intermediate radii where the radial velocity was small but non-zero. An analytical solution of the equations of motion based upon a somewhat arbitrary assumption for the steering angle was required to connect the boundaries of the numerical integration with the physical boundaries of the problem. Because a significant fraction of the total time was expended in these end regions, where an optimum steering program was not used, it appeared that the results of [4] were subject to further investigation.

A revised analysis of the minimum-time transfer between Earth and Mars is presented here. Time is taken as the independent variable to eliminate infinite derivatives at the boundaries, and a numerical solution which exactly matches the boundary conditions is presented. Also, the basic analysis is extended to include transfer between non-circular orbits. Finally, an approximate analytical solution of the variational differential equations for steering angle as a function of time is derived for the case of circular initial and final orbits.

Three basic assumptions of the analysis are as follows:

1. Initial and final orbits are coplanar.
2. Thrust acceleration, or thrust per unit mass, is constant.
3. Only a single central force field is present (i.e., gravity fields of initial and destination planets are neglected) so that boundary conditions are fully specified by the planetary orbit.

The last assumption deserves some comment. A vehicle destined for Mars might be launched from the Earth into an Earth satellite orbit from which continuous flight may be initiated. By the time the vehicle reached a distance where the Earth's gravitational force is negligible, its velocity relative to the Earth would be extremely small compared with the velocity of the Earth relative to the Sun [5]. The third assumption would therefore closely represent the actual problem. Determination of minimum-time steering programs for those phases of the flight where the planetary gravitational field predominates over that of the Sun is omitted from the analysis.

## II. Analysis of General Problem

In the general problem of transfer between coplanar orbits, the orbits have non-zero eccentricity and arbitrary orientation relative to each other. The initial and final angular momenta are prescribed, but the radial velocity and radius at each orbit are functions of the angle between the radius and some reference direction lying in the plane of the orbits. Neither the starting point on the initial orbit nor the point of intersection of the transfer trajectory with the final orbit are known beforehand.

The equations of motion in a polar system of coordinates are

$$f \sin \phi = \dot{u} + \frac{1}{r^2} - \frac{h^2}{r^3} \quad (1)$$

$$f \cos \phi = \frac{\dot{h}}{r} \quad (2)$$

where

$$u = \dot{r} \quad (3)$$

The angle,  $\theta$ , between the radius and a reference direction is expressed by

$$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2} \quad (4)$$

The variables  $u$ ,  $r$ ,  $h$ , and  $t$  and the constant  $f$  have been normalized through the use of dimensional reference values designated by an asterisk and related by

$$h^{*2} = \mu r^*$$

$$u^* = \frac{\dot{h}^*}{r^*}$$

$$t^* = \frac{r^{*2}}{h^*}$$

$$f^* = \frac{\mu}{r^{*2}}$$

The radius at perigee of the initial orbit is a convenient reference. When the eccentricity of the initial orbit is zero, then  $u$  is the ratio of radial velocity to initial tangential velocity,  $h$  is measured in terms of initial angular momentum,  $f$  is the ratio of thrust per unit mass to initial gravitational acceleration, and a unit of time is  $1/(2\pi)$  orbital periods.

The total time required for travel between orbits is now to be minimized. Adopting the MAYER formulation, the function  $\phi(t)$  must be determined for which the integral

$$I = \int_0^T F(x_i, \dot{x}_i) dt, \quad x_i = u, r, h, \phi, \theta \quad (5)$$

is stationary, where

$$F = 1 + \mu_1 \left( f \sin \phi - \dot{u} - \frac{1}{r^2} + \frac{h^2}{r^3} \right) + \mu_2 (f r \cos \phi - \dot{h}) + \mu_3 (u - \dot{r}) + \mu_4 \left( \dot{\theta} - \frac{h}{r^2} \right) \quad (6)$$



and the upper limit of the integral in Eq. (5) is unknown. The first term on the right-hand side of (6) is the integrand of the integral to be minimized, the remaining four terms are the constraints given by Eqs. (1) through (4), and  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$ , and  $\mu_4$  are unspecified functions of time. The EULER-LAGRANGE equations

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j} = 0, \quad x_j = u, r, h, \phi, \theta \quad (7)$$

become

$$\mu_3 + \dot{\mu}_1 = 0 \quad (8)$$

$$\mu_1 \left( \frac{2r - 3h^2}{r^4} \right) + \mu_2 f \cos \phi + \mu_4 \left( \frac{2h}{r^3} \right) + \dot{\mu}_3 = 0 \quad (9)$$

$$\mu_1 \left( \frac{2h}{r^3} \right) - \mu_4 \left( \frac{1}{r^2} \right) + \dot{\mu}_2 = 0 \quad (10)$$

$$\mu_1 \cos \phi - \mu_2 r \sin \phi = 0 \quad (11)$$

$$\dot{\mu}_4 = 0 \quad (12)$$

Eqs. (8) through (12) can be reduced to simpler form after eliminating  $\mu_1$  by means of Eq. (11), dividing through by  $\mu_2$ , and recognizing that  $\mu_4$  is a constant. Combining the resulting equations,

$$\frac{d}{dt} (r \tan \phi) = v_1 + \left( \frac{2h}{r} \right) \tan^2 \phi - \left( \frac{v_2}{r} \right) \tan \phi \quad (13)$$

$$\dot{v}_1 = f \cos \phi + \left( \frac{2r - 3h^2}{r^3} \right) \tan \phi + v_1 \left( \frac{2h}{r^2} \right) \tan \phi - \frac{v_1 v_2}{r^2} + v_2 \left( \frac{2h}{r^3} \right) \quad (14)$$

$$\dot{v}_2 = v_2 \left( \frac{2h}{r^2} \right) \tan \phi - \left( \frac{v_2}{r} \right)^2 \quad (15)$$

where

$$v_1 = - \frac{\mu_3}{\mu_2} \quad (16)$$

$$v_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2} \quad (17)$$

Eqs. (1) through (4) and (13) through (15) form a seventh order set, and, with time of arrival at the destination orbit  $T$  unknown, eight boundary conditions must be specified. The six known boundary conditions are

$t = 0$	$t = T$ (unknown)
$h_i$	$h_f$
$u_i = \xi_i(\theta_i)$	$u_f = \xi_f(\theta_f)$
$r_i = \eta_i(\theta_i)$	$r_f = \eta_f(\theta_f)$

Two additional conditions must be derived from the requirement that the integral in Eq. (5) be stationary. Writing the variation of Eq. (5),

$$\Delta I = \int_0^T \left( \frac{\partial F}{\partial x_j} \delta x_j + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j} \delta \dot{x}_j \right) dt + F_T \Delta T, \quad x_j = u, r, h, \phi, \theta \quad (18)$$

where  $\delta$  represents a variation at constant time  $t$  and  $\Delta$  represents a variation in the boundary value. Integrating the second term of the integrand by parts,

substituting for  $F_T$  from Eq. (6), and recalling Eqs. (1) through (4) and (7), Eq. (18) is reduced to

$$\Delta I = \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j \right)_{t=T} - \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j \right)_{t=0} + \Delta T \quad (19)$$

Variations in boundary values are related to variations with time held fixed by

$$\delta x_j = \Delta x_j - (\dot{x}_j) \Delta T \quad (20)$$

Substituting from Eq. (20) into Eq. (19), and setting  $\Delta I$  equal to zero,

$$\left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j} \Delta x_j \right)_{t=T} - \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j} \dot{x}_j - 1 \right)_{t=T} \Delta T - \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j} \Delta x_j \right)_{t=0} = 0 \quad (21)$$

The conditions to be met at the initial and final orbits are independent of time, and  $\theta_i, \theta_f$  are not related. Each term of Eq. (21) must, therefore, be equal to zero. Substituting for  $x_j$  and taking the partial derivatives of  $F$  in Eq. (6),

$$(\mu_1 \Delta u + \mu_2 \Delta h + \mu_3 \Delta r - \mu_4 \Delta \theta)_{i,f} = 0 \quad (22)$$

$$(\mu_1 \dot{u} + \mu_2 \dot{h} + \mu_3 \dot{r} - \mu_4 \dot{\theta})_f + 1 = 0 \quad (23)$$

Eq. (23) is of no interest, as only ratios of  $\mu_2$  through  $\mu_4$  appear in Eqs. (13) through (15). In Eq. (22),  $(\Delta h)_{i,f}$  is zero by virtue of the specified angular momenta. Thus,

$$(\mu_1 \Delta u + \mu_3 \Delta r - \mu_4 \Delta \theta)_{i,f} = 0 \quad (24)$$

With the relationships

$$u_{i,f} = \xi_{i,f}(\theta_{i,f}) \quad (25)$$

$$r_{i,f} = \eta_{i,f}(\theta_{i,f}) \quad (26)$$

at the boundaries,

$$\Delta u_{i,f} = \xi'_{i,f} \Delta \theta_{i,f} \quad (27)$$

$$\Delta r_{i,f} = \eta'_{i,f} \Delta \theta_{i,f} \quad (28)$$

Substituting in Eq. (24),

$$(\mu_1 \xi' + \mu_3 \eta' - \mu_4)_{i,f} = 0 \quad (29)$$

Dividing by  $\mu_2$  and introducing Eqs. (11), (16), and (17),

$$v_{1,i} \eta'_i + v_{2,i} - \xi'_i r_i \tan \phi_i = 0 \quad (30)$$

$$v_{1,f} \eta'_f + v_{2,f} - \xi'_f r_f \tan \phi_f = 0 \quad (31)$$

Eqs. (30) and (31) are the two additional boundary conditions needed to specify the solution. For numerical integration,  $h_i$  would have to be supplemented by six arbitrary initial conditions. Initial values of  $u, r$  and values of  $\xi'_i, \eta'_i$  can be obtained from an assumed  $\theta_i$ . Then  $v_{1,i}, v_{2,i}$  can be related to assumed values of  $\phi_i, \phi_f$  by means of Eqs. (13) and (30). Finally, the combination of  $\theta_i, \phi_i$ , and  $\phi_f$  would have to be determined that would satisfy Eqs. (25), (26), and (31) coincidentally with the boundary condition on angular momentum at the final orbit.

If the starting point on the initial orbit is known, Eq. (24) is automatically satisfied at the initial boundary by virtue of the vanishing  $\Delta x_j$  quantities. The added boundary condition is then the initial value of  $\theta$ . If the initial orbit is circular,  $\xi'_i$  and  $\eta'_i$  are zero. From Eq. (29),  $\mu_4$  is initially zero, and from Eqs. (12) and (17),  $v_2$  is zero at all times. A stationary solution is then obtained by satisfying Eq. (31) at time  $T$ , with  $v_2$  of zero. Similar reasoning applies if the position is specified on the final orbit or if the final orbit is circular. The simplification of the equations resulting from elimination of  $v_2$  will be discussed next.

### III. Transfer between Circular Orbits

When the initial and final orbits are of zero eccentricity,  $u$ ,  $r$ , and  $h$  are specified at the boundaries. With  $v_2$  of zero, Eqs. (13) through (15) reduce to

$$\frac{d}{dt}(r \tan \phi) = v_1 + \left(\frac{2h}{r}\right) \tan^2 \phi \quad (32)$$

$$\dot{v}_1 = f \cos \phi + \left(\frac{2r - 3h^2}{r^3}\right) \tan \phi + v_1 \left(\frac{2h}{r^2}\right) \tan \phi \quad (33)$$

Eliminating  $v_1$  from Eqs. (32) and (33), recalling Eqs. (1) through (3), and taking  $\phi$  as the dependent variable to avoid possible ambiguities in the angle corresponding to a particular value of  $\tan \phi$ ,

$$\ddot{\phi} = \frac{f \cos \phi}{r} + \frac{3 \sin(2\phi)}{2r^3} - \frac{2u\dot{\phi}}{r} - 2\left(\dot{\phi} - \frac{2h}{r^2}\right)\left(\dot{\phi} - \frac{h}{r^2}\right) \tan \phi \quad (34)$$

The requisite function is found from the simultaneous solution of Eqs. (1) through (3) and (34). These four equations are of fifth order, and the six boundary conditions on  $u$ ,  $r$ , and  $h$  are sufficient for their solution.

Because Eqs. (1) through (3) and (34) are nonlinear, they must be solved numerically. An approximate solution of the differential equation for the steering angle  $\phi$  is of interest, therefore, to indicate the characteristics of the exact solution. Returning to Eqs. (32) and (33), it is to be noted that  $\tan \phi$  may vary between positive and negative infinity while  $r$  and  $h$  are bounded by the values of these parameters at the final orbit. If attention is restricted to orbital transfers where the radius ratio is of the order of unity and  $f$  is small compared with unity, the approximations  $r = 1$ ,  $h = 1$ , and  $f = 0$  can be made without significantly altering the equations. Thus, Eqs. (32) and (33) become

$$\dot{z} = v_1 + 2z^2 \quad (35)$$

$$\dot{v}_1 = 2v_1 z - z \quad (36)$$

where

$$z \equiv \tan \phi$$

Multiplying Eq. (35) by  $v_1$  and Eq. (36) by  $z$ , subtracting, and dividing by  $v_1^2$ ,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{z}{v_1}\right) = 1 + \left(\frac{z}{v_1}\right)^2$$

or

$$z = v_1 \tan \alpha \quad (37)$$

with

$$\alpha = t + t_0$$

Substituting Eq. (37) into Eq. (36), writing

$$\dot{v}_1 = (1 + \tan^2 \alpha) \frac{dv_1}{d(\tan \alpha)}$$

and integrating,

$$v_1 = \frac{\cos \alpha}{2 \cos \alpha - k} \quad (38)$$

Then combining Eqs. (37) and (38),

$$z = \frac{\sin \alpha}{2 \cos \alpha - k} \quad (39)$$



With  $k^2 < 4$  and  $\phi = \pm \pi/2$ ,  $\cos \alpha = k/2$  according to Eq. (39). From Eq. (40),  $\dot{\phi}$  at this value of  $\alpha$  is exactly 2. Referring to Eq. (34) with  $f = u = 0$  and  $r = h = 1$ , it can be seen that this value of  $\dot{\phi}$  prevents a discontinuity in  $\ddot{\phi}$  which would otherwise occur when  $\tan \phi$  approached infinity. This behavior is of consequence in numerical solutions of the exact equation. Along either of the curves of Fig. 1 where  $k = \pm 2$ ,  $\dot{\phi}$  approaches unity as  $\phi$  approaches  $\pm \pi/2$ . In this case, however,  $\ddot{\phi}$  is discontinuous in spite of the fact that the value of  $\dot{\phi}$  now corresponds to the second root of the coefficient of  $\tan \phi$  in Eq. (34).

To summarize these features of the approximate expression for  $\phi(t)$ ,  $\dot{\phi}$  is plotted against  $\phi$  in Fig. 2 for various values of  $k$  less than zero. Also shown are curves of zero  $\ddot{\phi}$  obtained from Eq. (34) with  $f = u = 0$  and  $r = h = 1$ . The curves representing Eq. (39) cross the curves of zero  $\ddot{\phi}$  with non-zero curvature when  $\phi$  is  $\pi/2$  due to infinite  $\tan \phi$ . It is clear that  $\dot{\phi}$  is always positive when  $k^2$  is less than 4.

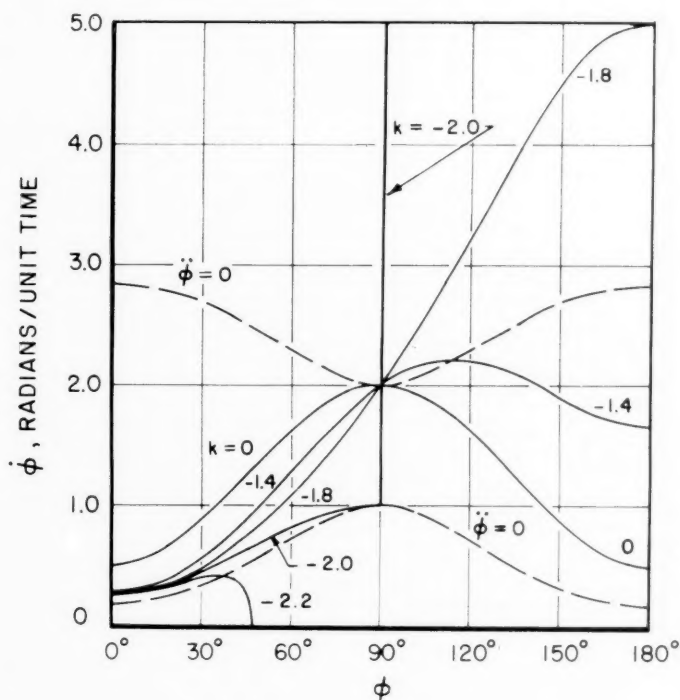


Fig. 2. Derivative of steering angle from approximate solution of minimum-time transfer problem (Radius ratio of order of unity)

The range of application of Eq. (39) is not entirely restricted to  $f$  small compared with unity. If the function

$$\mathcal{H} = v_1 - \int_0^t f \cos \phi \, dt$$

is introduced in Eqs. (32) and (33), then Eqs. (35) and (36) with  $r_1$  replaced by  $\mathcal{R}$  are valid as long as the assumptions

$$\begin{aligned} h &= 1 \\ u &= 0 \\ \int_0^T f \cos \phi \, dt &= 0 \end{aligned}$$

can be made. As the order of magnitude of  $f$  increases, the time of transit for a given radial displacement,  $\Delta r$ , will decrease according to

$$T \sim 2 \sqrt{\frac{\Delta r}{f}}$$

while the increments in  $u$  and  $h$  and the integral of  $f \cos \phi$  will increase by

$$\begin{aligned} \Delta u &\sim \sqrt{f \Delta r} \\ \Delta h &\sim \sqrt{f \Delta r} \\ \int_0^T f \cos \phi \, dt &\sim 2 \sqrt{f \Delta r} \end{aligned}$$

Thus, the general limitation on Eq. (39) is that  $(f \Delta r)^{1/2}$  be small compared with unity. For  $f$  of unity, for example, the radius ratio would be restricted to a maximum of approximately 1.05.

The value of  $k$  with which the required steering program for a particular problem can be approximated depends upon the boundary conditions. Even with  $\phi$  given by Eq. (39), the equations of motion are not amenable to direct integration. Some general observations will be possible, however, after the numerical solution for the Earth-Mars problem is considered.

#### IV. Numerical Solution for Earth-Mars Orbital Transfer

Boundary conditions which were selected for this problem are as follows:

$t = 0$	$t = T$ (unknown)
$r_i = 1$	$r_f = 1.500$
$h_i = 1$	$h_f = 1.225$
$u_i = 0$	$u_f = 0$

The radial velocity of zero at both boundaries results from the assumption that the orbits are circular. A thrust-to-mass ratio of  $10^{-4} g_e$  was assumed, where  $g_e$  is the gravitational acceleration of the Earth at sea level. The solar gravitational acceleration at the mean distance of the Earth from the Sun is  $5.95 \times 10^{-4} g_e$ , or approximately  $6 \times 10^{-4} g_e$ . A value of 1/6 was therefore assigned to  $f$ .

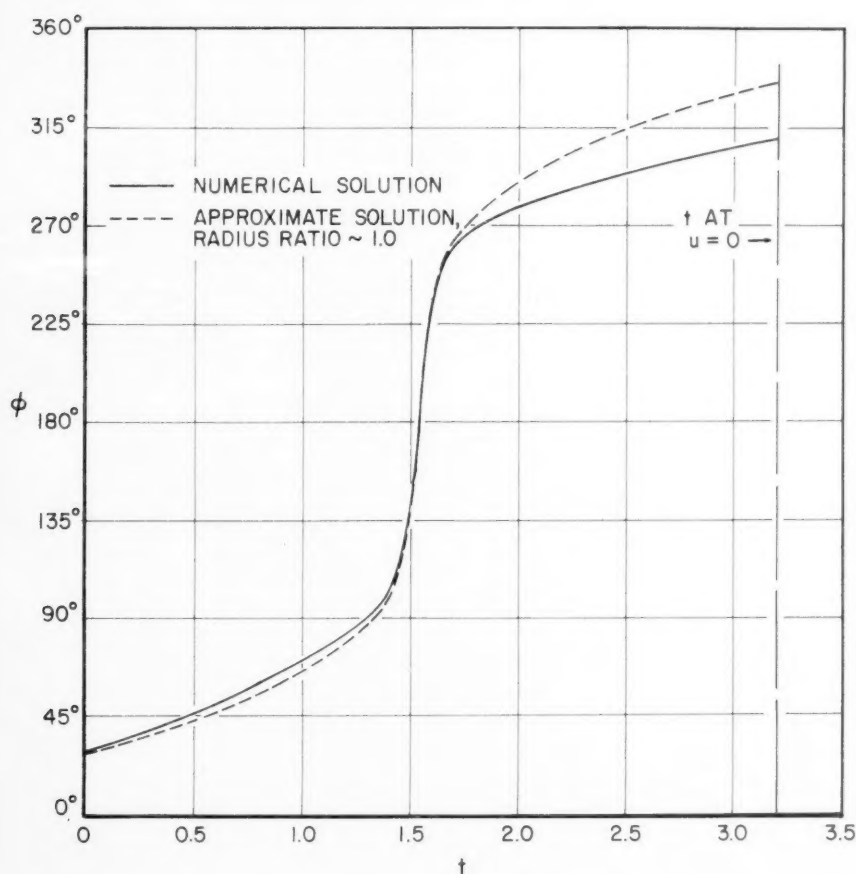
The equations of motion and Eq. (34) were programmed for integration on a Bendix G-15D digital computer. A predictor-corrector scheme of numerical integration was employed having a specified convergence accuracy of 1 percent and a minimum time increment of 0.01. Initial values of  $\phi$  and  $\dot{\phi}$  were selected as additional initial conditions for numerical integration, and a trial-and-error procedure was used to determine the values of  $\phi_i$  and  $\dot{\phi}_i$  which yielded the required values of  $r$  and  $h$  at the time  $u$  went through zero.

It became apparent after some initial sets of  $\phi_i, \dot{\phi}_i$  were tried that, in order for the outer boundary conditions to be approached, the initial  $\ddot{\phi}$  must be positive.

and the initial  $\phi$  must lie in the general vicinity of 30 degrees. With Fig. 2 as a guide, but with the lower curve of zero curvature corrected by the non-zero  $f$  in Eq. (34), the region in a  $\phi_i - \dot{\phi}_i$  plane by which the required initial conditions were bounded was steadily decreased until the data of Table I were obtained.

Table I. Summary of Numerical Integrations

Initial Data Set	$\phi_i$	$\dot{\phi}_i$	$u_f$	$r_f$	$h_f$	$T_f$
1	29.0°	0.450	0	1.505	1.227	3.22
2	29.2°	0.454	0	1.495	1.192	3.11
3	29.5°	0.455	0	1.495	1.245	3.25

Fig. 3. Steering program from numerical solution of Earth-Mars transfer problem ( $f = 0.1667$ )

Reference to the required boundary values indicates that the exact set of initial data was closely bracketed by the sets listed in Tab. I. The curves of  $\phi$ ,  $\dot{\phi}$ ,  $u$ ,  $r$ , and  $h$  obtained with data set 1, the closest to the exact  $\phi_i$ ,  $\dot{\phi}_i$ , are

presented in Figs. 3 through 7. These curves are nearly indistinguishable, incidentally, from curves generated by the initial data of sets 2 and 3. Clearly, the solution is of the class corresponding to  $-2 < k < 0$  (Fig. 1).

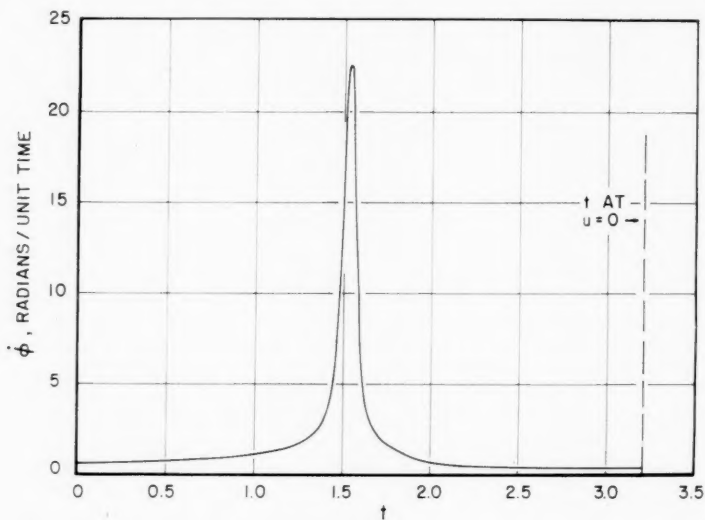


Fig. 4. Steering angle derivative from numerical solution of Earth-Mars transfer problem ( $f = 0.1667$ )

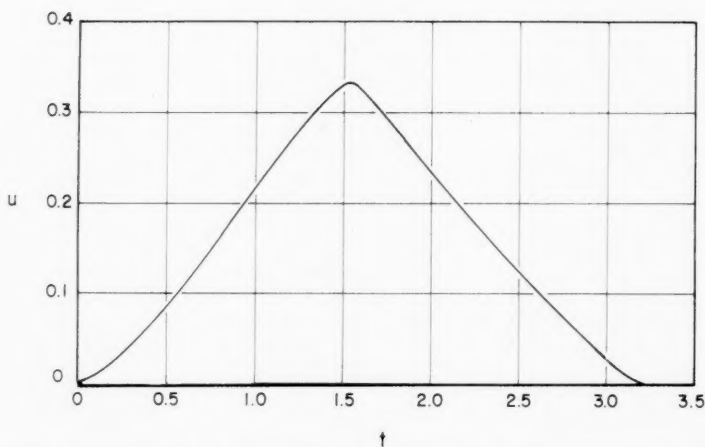


Fig. 5. Radial velocity from numerical solution of Earth-Mars transfer problem ( $f = 0.1667$ )

In the numerical integration, no major difficulty was encountered with  $\phi$  crossing  $\pm \pi/2$  in spite of the fact that  $\tan \phi$  appears in Eq. (34). As  $\phi$  approached  $\pm \pi/2$ ,  $\dot{\phi}$  approached  $2h/r^2$ , or the higher root of the coefficient of  $\tan \phi$  in Eq. (34). This behavior would be expected on the basis of the approximate solution. Only when a computed point fell within less than  $1/2$  degree of



$\pm \pi/2$  was serious non convergence encountered. In this case, simply an increase in the local time increment was adequate to restore smooth integration.

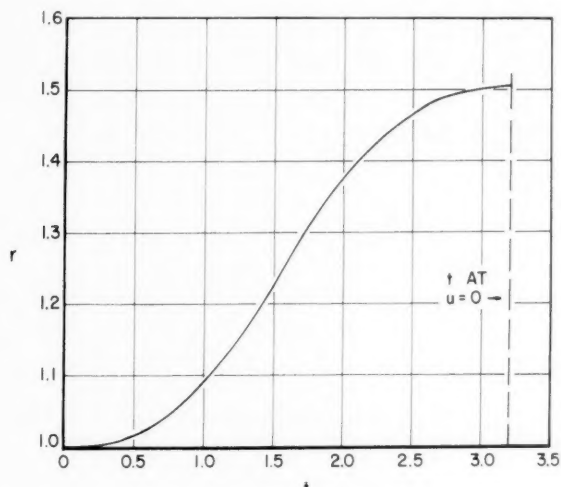


Fig. 6. Radius from numerical solution of Earth-Mars transfer problem ( $f = 0.1667$ )

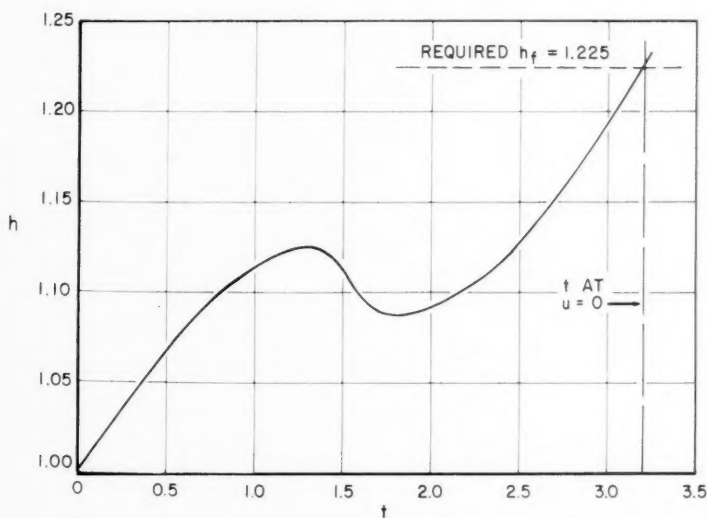


Fig. 7. Angular momentum from numerical solution of Earth-Mars transfer problem ( $f = 0.1667$ )

The sensitivity of the class of solution to the unknown  $\phi_i$  and  $\dot{\phi}_i$  is apparent in Fig. 2. Hence, while searching for the correct combination of these initial values, several cases were tried wherein  $\phi$  was restricted to the first and fourth quadrants. With no ambiguity in the argument of  $\tan \phi$  appearing in this class

of solution, the replacement of Eq. (34) by Eqs. (32) and (33) was found to simplify the numerical integration. In particular, larger time increments could be used to obtain the required accuracy of convergence. With  $\phi$  increasing through all four quadrants as in Fig. 3, however, singularities in both  $v_r$  and  $\tan \phi$  at  $\phi$  of  $\pm \pi/2$  lead to discarding Eqs. (32) and (33) and using Eq. (34).

### V. Mechanics of Minimum-Time Steering Programs

Figs. 3 through 7 demonstrate that a minimum-time orbital transfer involves, first, increasing angular momentum with the thrust close to the tangential direction. By this means, a large  $\dot{u}$  can be obtained when the thrust vector is rotated to the outward radial direction, as can be seen from Eq. (1). The higher the average radial velocity, of course, the smaller is the time of transfer. As the midradius is approached, the thrust vector is swept through the second and third quadrants to decrease the angular momentum. A large negative  $\dot{u}$  is thereby achieved when the steering angle reaches the vicinity of  $-\pi/2$ . Finally, with the radial velocity greatly reduced, the angular momentum is again increased to the final value.

The steering program of Fig. 3 differs considerably from the preliminary results presented in [4]. There, the solution was of the class represented by  $k < -2$ , increasing from about 30 degrees at  $r_i$  to about 85 degrees at midradius, dropping rapidly to  $-85$  degrees, and increasing again to about  $-45$  degrees at the outer orbit. Thus, the refinement needed to obtain a solution matching the exact boundary conditions has involved a rather large change in the steering program. As mentioned earlier, attempts were made during the study reported here to find a solution with  $\phi$  restricted to the first and fourth quadrants. This restriction of  $\phi$  was based on the steering program of [4]. Lacking the decrease in angular momentum at midradius, however, the inward radial components of thrust were not sufficient to subsequently drive the radial velocity back to zero.

The general conclusion can perhaps be drawn that the  $k^2 < 4$  class of steering programs (Fig. 1) are necessary for minimum-time low-thrust transfers between orbits of small eccentricity. When the final radius is greater than the initial radius,  $k$  is negative, and when the final orbit is inside the initial orbit,  $k$  is positive. Considering the hypothetical problem of transfer between circular orbits with no net change in angular momentum, the time variation of angular momentum would be similar to a full cycle of a sinusoid. The initial  $h$  would be positive or negative depending on whether  $r_f$  is greater or less than  $r_i$ .

Shown in Fig. 3 is a curve of  $\phi$  versus time from Eq. (39). The approximate solution was matched with the exact solution at  $\phi$  of 180 degrees,  $t_0$  and  $k$  being 1.60 and  $-1.9556$ , respectively. The fair agreement between the two curves suggests that Eq. (39) could be used for many engineering purposes, such as preliminary analyses of trajectories for a particular mission. Numerical integration of the equations of motion would still be necessary, and various combinations of  $t_0$  and  $k$ , or  $\phi_i$  and  $\phi_f$ , would have to be tried. Integration of Eq. (34) would be obviated, however, by algebraic solution of Eq. (39). The approximate solution could perhaps be improved by occasionally correcting the coefficients in Eqs. (35) and (36) using current values of  $r$  and  $h$ .

### VI. Concluding Remarks

An exact solution has been obtained for the steering program yielding a minimum time of transfer between circular orbits of radius ratio 1.5 when the ratio of thrust to initial gravity force is 1/6. An approximate solution of the

variational differential equations, based on the assumption of radius ratio of the order of unity, compares favorably with the exact solution. A significant feature of the minimum-time steering program is a continual increase of the angle between the thrust vector and the positive tangential direction through 280 degrees of arc, starting from about 30 degrees. The resulting decrease in angular momentum in the vicinity of the midradius is essential to realizing the large absolute values of the radial velocity derivative necessary to minimize the transfer time. Stationary end conditions for minimum-time transfer between coplanar elliptic orbits have been established. The dependence of boundary conditions on angular displacement of the vehicle when neither orbit is circular greatly increases the complexity of the mathematical formulation.

An interesting modification of the foregoing analysis would be to increase the thrust acceleration with time corresponding to holding the thrust constant at the maximum possible value. The time of transfer could, by this means, be further reduced. The equations derived here would remain unchanged, but the constant thrust acceleration would be replaced by some known function of time. Additional areas not yet investigated include the determination of steering programs for ratios of thrust to gravity force of the order of unity and larger. The need for such programs will arise when electrical propulsion systems with thrust accelerations larger than  $10^{-4}$  Earth gravities become available. Finally, the penalty in terms of propellant utilization introduced by minimizing flight time instead of propellant mass must be evaluated before thrust and steering programs can be selected for an actual mission.

#### Acknowledgement

The author wishes to acknowledge the able assistance of S. JUROVICS of the Missile Division who was responsible for the digital computer programming associated with this study.

#### References

1. J. H. IRVING, Low-Thrust Flight: Variable Exhaust Velocity in Gravitational Fields. Space Technology, edited by H. SEIFERT, chapter 10. New York: J. Wiley, 1959.
2. E. RODRIGUEZ, Method for Determining Steering Programs for Low-Thrust Interplanetary Vehicles. J. Amer. Rocket Soc. **29**, No. 10, Part 1 (1959).
3. J. COPELAND, Interplanetary Trajectories Under Low-Thrust Radial Acceleration. J. Amer. Rocket Soc. **29**, No. 4 (1959).
4. C. R. FAULDERS, Low-Thrust Rocket Steering Program for Minimum Time Transfer Between Planetary Orbits. Soc. Automot. Engrs., Paper 88 A, October 1958.
5. D. J. BENNEY, Escape from a Circular Orbit Using Tangential Thrust. Jet Propulsion **28**, No. 3 (1958).

Vol  
7  
196

## International Academy of Astronautics

### Election of New Members

NIELS BOHR, the world-famous Danish physicist, has just been elected the first Honorary Member of the International Academy of Astronautics.

The Director of the Academy is Dr. TH. VON KÁRMÁN (U.S.A.), internationally famous scientist, and the Deputy Directors are Prof. J. PÉRÈS, Dean of the Faculty of Sciences of the University of Paris, and Dr. F. J. MALINA (U.S.A.), astronautical pioneer. The initial membership of the Academy includes 45 members, mostly well-known leaders in space flight and in sciences related to astronautics.

The Academy has recently elected the following new members:

*Basic Sciences Section:* Prof. JULIUS BARTELS, University of Göttingen (West Germany). — Prof. DAVID R. BATES, Department of Applied Mathematics, Queen's University, Belfast (Great Britain). — Prof. L. BIERMANN, Director, Max Planck Institute for Astrophysics (West Germany). — Prof. SYDNEY CHAPMAN, High Altitude Observatory, Boulder (U.S.A.). — Dr. HERBERT FRIEDMAN, Atmosphere and Astrophysics Division, U.S. Naval Research Laboratory, Washington (U.S.A.). — Prof. LEO GOLDBERG, Harvard College Observatory, Cambridge (U.S.A.). — Dr. HOMER E. NEWELL, Deputy Director, Office of Space Flight Programs, N.A.S.A. (U.S.A.). — Prof. FRED L. WHIPPLE, Harvard College Observatory, Cambridge (U.S.A.).

*Engineering Sciences Section:* Dr. ADOLF BUSEMANN, Langley Research Center, N.A.S.A. (U.S.A.). — Prof. ELIE CARAFOLI, Director, Institute of Applied Mechanics, Bucarest (Rumania). — Prof. LUIGI CROCCO, Director, Jet Propulsion Center, Princeton University (U.S.A.). — Eng. KRAFFT A. EHRLICHE, Convair Astronautics Division (U.S.A.). — Prof. ANTONIO FERRI, Polytechnic Institute of Brooklyn (U.S.A.). — Prof. ARTHUR R. KANTROWITZ, Director, Evco Everett Research Laboratory (U.S.A.). — Dr. MICHAEL J. LIGHTHILL, Director, Royal Aircraft Establishment, Farnborough (Great Britain). — Prof. MAURICE ROY, Director, O.N.E.R.A. (France). — Dr. HOWARD S. SEIFERT, Stanford University (U.S.A.). — Dr. ERNST STUHLINGER, Director, Research Projects Division, N.A.S.A., George C. Marshall Space Flight Center (U.S.A.). — Dr. MARTIN SUMMERFIELD, Princeton University (U.S.A.).

*Life Sciences Section:* Dr. ROBERT GRANDPIERRE, Director, Aviation Medicine Research Center (France). — Prof. U. S. VON EULER, Department of Physiology, Karolinska Institute (Sweden). — Dr. ASHTON GRAYBIEL, Director of Research, U.S. Naval School of Aviation Medicine (U.S.A.). — Prof. TOMASO LOMONACO, Director, Research Center for Aviation Medicine (Italy). — Prof. RODOLFO MARGARIA, form. Director, Research Center for Aviation Medicine (Italy). — Dr. HERMANN J. SCHAEFER, Research Department, U.S. Naval School of Aviation Medicine (U.S.A.). — Prof. GUSTAV SCHUBERT, Physiological Institute, University of Vienna (Austria). — Col. JOHN P. STAPP, Aerospace Medical Center, Brooks A. F. Base (U.S.A.). — Air Comm. W. K. STEWART, R.A.F. Institute of Aviation Medicine, Farnborough (Great Britain). — Dr. P. M. VAN WULFTEN PALTHE, National Aeromedical Center (Netherlands). — Sir HAROLD E. WHITTINGHAM, Chief Medical Officer, B.O.A.C. (Great Britain).

The Academy now has a total membership of 76, coming from 18 countries.

The International Academy of Astronautics was created by the International Astronautical Federation at Stockholm in August 1960, for the purpose of promoting the advancement of astronautical sciences.

The Academy is working under a grant from the Daniel and Florence Guggenheim Foundation, and the French Government has provided offices for the Secretariat of the Academy in Paris.

The next meeting of the Academy will be held in October 1961, in Washington, in conjunction with the annual congress of the Federation.

During this meeting, the first Daniel and Florence Guggenheim International Astronautics Award will be presented. This international prize of \$ 1,000 is to be given annually to an individual who has made outstanding contributions to astronautics during the five preceding years.

The Academy will also review the work of the following committees: Publications, Awards and Fellowships, Lunar International Laboratory (LIL), and the Joint Commission of the Academy and the International Institute of Space Law on Technical Aspects of Space Law.

### Symposium on Space Flight and Re-entry Trajectories

The International Academy of Astronautics of the International Astronautical Federation is organizing a symposium on *Space Flight and Re-entry Trajectories*, to be held 19, 20 and 21 June 1961, in Paris.

The Organizing Committee, under the Chairmanship of Prof. PAUL A. LIBBY of the Polytechnic Institute of Brooklyn (U.S.A.), comprises Prof. L. BROGLIO (Italy), Dr. D. G. KING-HELE (Great Britain), Prof. J. M. J. KOOP (Netherlands), Prof. J. KOVALEVSKY (France), Prof. R. PEŠEK (Czechoslovakia) and Dr. B. FRAEIJIS DE VEUBEKE (Belgium).

Sixteen scientists from nine countries will present papers at this symposium. The symposium will be divided into several sections, dealing with the following subjects:

*Trajectories for Lunar and Interplanetary Missions.* Speakers: H. HILLER, Royal Aircraft Establishment, Farnborough (Great Britain). — J. M. J. KOOP, Lecturer, University of Breda (Netherlands). — W. MOECKEL, N.A.S.A. (U.S.A.).

*Orbital Transfer and Rendezvous.* Speakers: P. CONTENSO, O.N.E.R.A. (France). — J. C. HOUBOLT, N.A.S.A. (U.S.A.). — D. F. LAWREN, University of Canterbury (New Zealand). — B. FRAEIJIS DE VEUBEKE, Universitiés of Liège and Louvain (Belgium).

*Near Earth Satellites.* Speakers: D. G. KING-HELE, Royal Aircraft Establishment, Farnborough (Great Britain). — J. KOVALEVSKY, Paris Observatory (France). — K. SCHÜTTE, University of Munich (West Germany). — L. SEHNAL, Ondřejov Observatory (Czechoslovakia).

*Dynamics of Terminal Re-entry.* Speakers: J. BECKER, N.A.S.A. (U.S.A.). — L. BROGLIO, University of Rome (Italy). — T. R. F. NONWEILER, Queen's University of Belfast (Great Britain). — A. FERRI and LU TING, Polytechnic Institute of Brooklyn (U.S.A.). — W. F. HILTON, Hawker Siddeley Aviation (Great Britain). Soviet participants have also been invited.

In addition to the speakers, numerous specialists on these problems will take part in the discussions.

The papers will be published subsequently in *Astronautica Acta*, the multi-lingual astronautical journal published under the editorial direction of the Academy.

The symposium is to be held at Louveciennes, 10 miles west of Paris, in a country estate made available by the French Government.

Practical arrangements for the symposium are being handled by the Secretariat of the Academy, 12 rue de Gramont, Paris 2e.

Vol.  
7  
1961



*Hevelore Kármán*

Vo  
7  
196



**Astronautica Acta Extends Congratulations to**

**THEODORE VON KÁRMÁN**

**on the Occasion of His Eightieth Birthday**

**11 May 1961**

On his return in 1908 from Paris to Budapest, THEODORE VON KÁRMÁN published a paper entitled "Very Light-weight Engines" in which he wrote: "For a long time, and perhaps with reason, the world did not take seriously flight experiments with airplanes. Recently, I might say in the last few months, such undisputed successes have occurred in this field, that I believe that the technical equipment utilized in these experiments deserves the attention of the engineering world for a fleeting moment."

During the past 50 years there have been several occasions when similar gentle paragraphs from his pen have prodded professional scientists and engineers into an awareness of new important developments. Time and again he has been among the first to realize when imaginative enthusiasm should be taken seriously. It is a measure of his greatness that the world-wide scientific and technical community has taken heed of his unique power of perception.

But his spirit has not been limited to the act of recognition of significant new developments in aeronautics and in astronautics; it has encompassed works of a fundamental nature which made these developments a practical reality, and it has provided stimulus to his faithful colleagues and to his many students from many lands to produce fruitful works of their own.

This issue of Astronautica Acta is dedicated to him on his eightieth birthday as a token of appreciation. The co-editors of the journal, on behalf of its Editorial Advisory Board and its Publisher, wish for him many happy returns of the day, and for themselves the privilege of continuing to work with him in advancing the peaceful exploration of cosmic space.

**Frank J. Malina**

**Irene Sänger-Bredt**

**Leonid I. Sedov**

**Raymond Siestrunk**

Vol.  
7  
1961

Vol  
7  
196

## Raumfahrt und Naturforschung

Von

P. Jordan<sup>1</sup>

(Eingegangen am 1. März 1961)

Die beginnende Raumschiffahrt wird der Gesamtentwicklung der Naturwissenschaften einen mächtigen Aufschwung geben. Wenn wir versuchen, uns die Möglichkeiten der Nutzbarmachung von Satelliten und Raumfahrzeugen für wissenschaftliche Forschungszwecke vor Augen zu halten, so denken wir naturgemäß zunächst an die Astronomie. Für den Astrophysiker liegt ja ein schweres Hindernis aller seiner Bemühungen darin, daß unsere Lufthülle für Ultraviolett überwiegend undurchlässig ist. Den bisher bekannten Spektren von Sternen und von Gasnebeln oder etwa von kosmischen Explosionsvorgängen in der Art von Nova- und Supernova-Ausbrüchen fehlt das Ultraviolett; und aus atomphysikalisch leicht verständlichen Gründen besitzen gerade diese uns unbekannten ultravioletten Anteile der Spektren den größten Informationsgehalt.

Die Quantentheorie der Atome hat uns ja gelehrt, die Sternspektren zu entziffern, in ähnlicher Ausführlichkeit, wie etwa die Entzifferung von Keilschrift-Texten versunkener Kulturen möglich ist. Eine ungeheure Fülle von Feststellungen vermag der Astrophysiker durch die mühsame Auswertung der Spektren zu gewinnen, ausführliche Bilder von den physikalischen Verhältnissen — z. B. in den Sternatmosphären — entwickelnd, wobei neben der qualitativen und quantitativen chemischen Analyse — in manchen wichtigen Fällen bis zur Ermittlung von Isotopenverhältnissen verfeinert — Ermittlungen über Drucke, Turbulenz, Magnetfelder hinzukommen. Jedoch wird die künftige Einbeziehung der Ultraviolett-Spektren nicht nur eine Ergänzung und Verbesserung unserer Informationen ermöglichen, sondern mit einem Schlage eine viel höhere Stufe unseres Eindringungsvermögens in die spektralen Botschaften des Kosmos ergeben — sowohl die größere Breite des Ultravioletts gegenüber der einen Oktave des sichtbaren Gebietes als auch die größere Deutlichkeit und leichtere Deutbarkeit des Ultraviolettgebietes versprechen für alle mit Spektralapparaten arbeitenden astronomischen Untersuchungen einen grundsätzlich erhöhten erkenntnismäßigen Wirkungsgrad.

Betreffs der Sonne haben ja schon seit längeren Jahren die ersten über die Ozonschicht hinauf geschossenen Raketen Aufnahmen des ultravioletten Spektrums ermöglicht. Auch für die Sternspektren Entsprechendes zu leisten, setzt dagegen eine viel weitergehende Entwicklung der Steuerungstechnik voraus — es wird sich ja zum großen Teil darum handeln müssen, unbemannte Satelliten zu Trägern entsprechender Instrumente zu machen, welche sich selbsttätig für die Dauer der Exposition auf das gewünschte Objekt richten. Wertvolle Vorarbeit

<sup>1</sup> Hamburg 13, Isestraße 123, Bundesrepublik Deutschland.

für die hierbei zu lösenden technisch-wissenschaftlichen Aufgaben wird und wurde bei den jetzt durchgeführten Beobachtungen vermittels hoch aufsteigender Fesselballone geleistet.

Die Aussicht auf späteres Zustandekommen einer bemannten Satelliten-Raumstation, welche dauernd die Erde umkreist, läßt naturgemäß eine wirksame Verbreiterung dieser Untersuchungsmöglichkeiten erwarten, und ferner besonders reichhaltige Aufschlüsse über die geheimnisvollen Vorgänge auf der Sonne, deren Sonnenflecke und deren magnetische Eigenschaften uns vor Rätsel stellen, deren Lösung trotz so vieler wertvoller Ergebnisse — und trotz bedeutender Fortschritte etwa betreffs der Granulation — noch immer in einer für bisherige Methoden kaum erreichbaren Ferne zu liegen scheint. Jedoch liegt es auf der Hand, daß erst die Errichtung von Forschungsstationen und Observatorien auf dem Mond — eine um 2000 wahrscheinlich schon in Gang gekommene Entwicklung — uns die volle Breite der durch die Raumfahrttechnik erschlossenen neuen astronomischen Forschungsmöglichkeiten öffnen wird.

Dabei werden sich diese neuen Möglichkeiten natürlich nicht beschränken auf die Erweiterung der Astrophysik in der Milchstraße oder ihrer näheren Umgebung. Zwar ist dieses im obigen voran gestellte Ziel natürlich schon für sich allein bedeutungsvoll genug — versprechen doch die dabei zu erreichenden neuen Ergebnisse insbesondere auch endgültige Aufschlüsse über die vielen Rätsel der Entstehungsvorgänge von Sternen — Rätsel, die trotz der Fülle der diesbezüglich versuchten Spekulationen (und trotz des Optimismus der Spekulierenden) für die bisher verfügbar gewesenen Untersuchungsmethoden dennoch größtenteils unangreifbar geblieben sind. Aber auch die großen Fragen nach der Gesamtstruktur des Kosmos in Raum und Zeit werden im Zuge der kommenden Entwicklung bestimmtere, deutlichere und zuverlässigere Antworten erhalten. Ein Beispiel hierfür ist die Aussicht, schon auf Grund des augenblicklichen Standes der Satellitentechnik klären zu können, welche ganz schwache ultrarote Strahlung noch vom Himmels hintergrund — zwischen allen erkennbaren Spiralnebeln — ausgeht. Die verschiedenen Versionen einer Theorie des „Urknalls“, mit welchem die Geschichte des Kosmos nun doch begonnen zu haben scheint, werden auf Grund solcher Messungen eine empirische Unterscheidung erlauben.

Die reine Physik als solche wird der jetzt angebahnten Entwicklung nicht weniger zu verdanken haben. Es ist ja eine alte Regel, daß die Erhöhung der Meßgenauigkeit nicht nur Ergänzung und Verschärfung unseres Wissens in mehr oder weniger belanglosen Feinheiten zu ergeben pflegt, sondern immer wieder zur Aufdeckung *grundsätzlich neuer* Gesetzmäßigkeiten führt. Erst recht ist aber die Erschließung ganz neuer Arten oder Typen von Experimenten von vornherein als Quelle umfassender neuer Erkenntnisse zu vermuten. So wird die bislang noch so kurze Liste der Experimente und Beobachtungen, durch welche EINSTEIN's Gravitationstheorie geprüft werden konnte, dank der Satellitentechnik um bedeutungsvolle Glieder zu verlängern sein. Satelliten, welche die Erde umkreisen unter Mitnahme von Atomuhren, also etwa Cäsiumuhren, werden sowohl den berühmten Effekt der EINSTEIN'schen Zeitdilatation (der ja noch zur *speziellen* Relativitätstheorie gehört), als auch den der „Rotverschiebung“ durch Gravitationswirkung zu messen gestatten — eine sehr willkommene Ergänzung zu der im MOSBAUER-Effekt gefundenen Bestätigung EINSTEIN'scher Gedanken. Wesentlich raffinierter wäre die ebenfalls im Bereiche des Möglichen liegende Prüfung der EINSTEIN'schen Gravitationstheorie (genauer: der SCHWARZSCHILD'schen, das NEWTON'sche Gesetz verfeinernden Formel) durch einen von einem Satelliten getragenen Kreiselkompaß — hier könnten erstmalig

die in die EINSTEINSche Allgemeine Relativitätstheorie eingewobenen Vorstellungen RIEMANNScher Geometrie experimentell geprüft werden.

DIRAC hat vor längeren Jahren die Hypothese vorgetragen, daß die „Gravitationskonstante“, also die Größe der Schwerkraft zwischen zwei homogenen Kugeln, deren Mittelpunkte 1 cm voneinander entfernt sind, während ihre Massen je ein Gramm betragen, in Wirklichkeit gar keine Konstante ist, sondern einer langsamen Veränderung im Laufe der kosmischen Entwicklung unterliegt. Als eine Folgerung davon ergibt sich, daß der Mond sich langsam von der Erde entfernen muß — in einem der astronomischen Messung faßbaren Tempo. Tatsächlich tut er das auch; aber dabei spielt die Flutreibung eine Rolle — und diese ist theoretisch natürlich nicht genau genug zu ermitteln, um die für eine Prüfung der DIRACschen Hypothese nötige Schärfe des Vergleichs von Theorie und Beobachtung zu ermöglichen. Wohl aber würde ein Erdsatellit, der in bestimmter raffinierter Weise gegen alle Spuren von Luftreibung geschützt ist, die Rolle des Mondes übernehmen können, ohne eine störende Flutreibung zu ergeben.

Die DIRACsche Hypothese ergibt, wenn wir ihre Folgerungen ausspinnen, eine Fülle beachtenswerter Gesichtspunkte für die Deutung wichtiger geologischer, geophysikalischer und paläoklimatologischer Tatbestände, die von verschiedenen Verfassern nach und nach herausgebracht sind<sup>1</sup>. Vor allem folgt aus der DIRACschen Hypothese, daß unsere Erde sich seit ihrer Entstehung in einem Vorgang der *Expansion* befinden muß. In der Tat kann diese Expansion seit kurzem wohl als empirisch bewiesen gelten, nachdem ein erdumspannendes System großer Risse entdeckt worden ist — Tiefseegräben (die sich teilweise auch auf die Kontinente fortsetzen), von denen die früher bekannt gewesenen nur kleine Teilstücke sind. Jedoch ist das quantitative Maß der Erdexpansion noch umstritten, und die Verwendbarkeit der DIRACschen Hypothese für die Deutung der Großformationen der Erdoberfläche hängt entscheidend davon ab, welches Maß wir dieser Expansion zuschreiben dürfen. Hier wird die Raumforschung wesentliches beizutragen haben. Denn die DIRACsche Hypothese verlangt, daß eine entsprechende Expansion auch bei anderen Planeten stattgefunden haben muß — recht deutlich beim Mars, dessen Verhältnisse wir ja schon von einem Mondobservatorium aus wesentlich besser als bislang werden studieren können, und dessen Oberflächen-Untersuchung an Ort und Stelle künftig auf Grund von Übereinstimmungen und von Abweichungen eine große Hilfe sein wird für das Verständnis unserer eigenen Erde und der mannigfaltigen noch ungeklärten Fragen der Geologie, des Vulkanismus und der Gebirgsbildung, sowie des grundsätzlichen Verhältnisses von Kontinenten und Tiefseebecken. Die künftige fortschreitende Klärung dieser Probleme wird zugleich auch eine Entscheidung über die Berechtigung der DIRACschen Hypothese ergeben (neben ihrer unmittelbaren, auf die Gegenwart bezüglichen Prüfung durch Satelliten-Experimente); und das Betreten des Mondes durch menschliche Forschergruppen wird auch zu klären haben, ob die berühmten „Rillen“ des Mondes auf Grund der DIRACschen Hypothese zu deuten sind.

Daß die durch Raumfahrttechnik zu ermöglichende Untersuchung von Mars und Venus uns auch bedeutungsvolle Beiträge für die Klärung der tiefen Erkenntnisfrage nach der Rolle des organischen Lebens im Weltall verspricht, ist schon oft betont worden, und hat in der Erfindung eines besonderen Namens für den mit außererrestrischen Lebenserscheinungen befaßten Zweig der Biologie einen vielleicht etwas voreiligen Ausdruck gefunden. Es scheint deshalb

<sup>1</sup> Vgl. die zusammenfassende Erörterung bei P. JORDAN, Naturwiss. 1961 (im Erscheinen).

nicht überflüssig, am Schluß dieser anspruchslosen Bemerkungen noch besonders darauf hinzuweisen, daß im Zusammenhang mit der Beantwortung der Frage nach außererrestrischem Leben noch immer ein Dogmatismus existiert, der mit dem Geiste wissenschaftlicher Vorurteilslosigkeit nicht im Einklang steht. Zahlreiche Zeitgenossen — darunter auch Wissenschaftler — halten es für eine kaum der Nachprüfung bedürftige Selbstverständlichkeit, daß es außer der Erde auch zahlreiche andere bewohnte Weltkörper geben müsse — weil es „undenkbar“ sei, daß diese Billionen von Weltkörpern, unter denen viele der Erde physikalisch-chemisch ähnliche zu denken sind, sämtlich unbewohnt und damit gewissermaßen „nutzlos“ seien. Argumente solcher Art gehören sicherlich nicht zum Bereich des wissenschaftlichen Denkens — der Weltschöpfer, einerlei, ob personal oder unpersonal-urknallig vorgestellt, hat es schwerlich nötig gehabt, auf Nützlichkeit des Kosmos und Sparsamkeit beim Schöpfungsvorgang bedacht zu sein.

Aber auch gewisse sehr verbreitete Argumentationen, die sich auf mehr naturwissenschaftliche Erwägungen stützen, sind für kritische Betrachtung wenig überzeugend. Wenn dies hier kurz unterstrichen werden soll, so beabsichtige ich damit nicht etwa, das Gegenteil zu behaupten, sondern ich möchte klar machen, daß es sich hier um ein echtes Forschungsproblem handelt, dem mit Vermutungen allgemeiner Art nicht beizukommen ist.

Schon die These, daß es zahllose der Erde „ähnliche“ Planeten geben müsse, ist dubios; und jedenfalls die gelegentlich versuchten quantitativen Schätzungen sind wertlos. Ist der Kosmos *unendlich*, so kann freilich mit statistischen Wahrscheinlichkeitsgründen plausibel gemacht werden, daß es andere Planetensysteme geben muß, die dem unseren in jedem Maß von Approximation gleichen. Aber es sprechen auch ernste Gründe dafür, die Endlichkeit des Raumes, also die endliche Anzahl vorhandener Sterne als zumindest nicht ausgeschlossen anzusehen. In diesem Falle sind alle Schätzungen betreffs der vorhandenen Anzahl erd-ähnlicher Planeten für unsere Frage wertlos, weil zur Zeit gar nicht zu beurteilen ist, in welchem Maße besondere exzeptionelle Verhältnisse der Erde und ihrer geschichtlichen Entwicklung für die Ermöglichung der hiesigen Entwicklung organischen Lebens bestimmend gewesen sind; und ferner, in welchem Ausmaß die fraglichen Besonderheiten der Erde und ihrer Geschichte tatsächlich als exzeptionell zu bewerten sind — für eine diesbezügliche Statistik der existierenden Planeten (die — soweit es sich nicht um diejenigen unserer eigenen Sonne handelt — heute noch durchwegs hypothetisch sind) fehlen alle Unterlagen. Hier ist, so scheint es mir, zwar keineswegs ein „Ignorabimus“ begründet; wohl aber ein entschiedenes „Ignoramus“.

Aber auch dann, wenn wir wüßten, daß gleichzeitig mit der Erde ein ihr völlig gleicher Planet anderswo entstanden ist, bliebe es zweifelhaft, ob auch auf ihm sich eine organische Lebensentwicklung in ähnlicher Weise wie bei uns ergeben hätte. Gerade die Erwägung, daß die Naturgesetze überall im Kosmos die gleichen sein werden, läßt uns daran zweifeln, daß auch auf dem anderen Planeten ein ähnliches Leben zustande kommen *mußte*. Wir haben nämlich gute Gründe (die hier freilich nicht besprochen werden können) für die These, daß in der Phylogenie wiederholt gerade solche Mutationsakte (also Quantensprünge) von entscheidender Bedeutung geworden sind, deren statistische Wahrscheinlichkeit, wie sie bei ausreichender Kenntnis aus der Quantentheorie deduziert werden könnte, so gering war, daß sie faktisch vielleicht nur je einmal im Laufe der Erdgeschichte eingetreten sind. Es ist nicht unwahrscheinlich, im Gegenteil sogar wahrscheinlich, daß Derartiges schon in den Anfangsstadien organischer Entwicklung (oder vor-organischer Entwicklung) vorgekommen ist.

Danach aber wäre die Entstehung von „Leben“ auf einem Planeten vorgegebener physikalisch-chemischer Eigenschaften ausdrücklich ein solcher Vorgang (nämlich ein mikrophysikalischer), für welchen die Naturgesetze nur eine *Wahrscheinlichkeit* seines Eintretens, nicht aber eine diesbezügliche Zwangsläufigkeit erwarten lassen. Das Eintretensein dieses statistischen Zufalls auf der Erde erlaubt keinen Rückschluß auf das Maß seiner Wahrscheinlichkeit.

Ob diese Auffassung berechtigt ist, oder ob statt dessen die landläufigen Vorstellungen der Wahrheit näher kommen, wird durch die mikroskopische Untersuchung des Marslebens in gewissem Umfang zu klären sein. Das von den Spezialisten heute als ziemlich sicher angesehene Vorhandensein niedrigen (vielleicht nur bakteriellen?) Lebens auf dem Mars besagt natürlich noch nichts darüber, ob dieses Leben wirklich dort entstanden ist — es kann sehr wohl von der Erde aus dorthin gelangt sein, nach dem alten Schema der Theorie von ARRHENIUS, welche zwar bestimmt nicht auf den Kosmos im Ganzen, wohl aber auf unser Planetensystem auch heute noch in diskutabler Weise anwendbar ist. Ebenso könnte das Leben der Erde von der Venus gekommen sein, falls es auch dort Lebensformen gibt. Ob das so ist oder nicht, wird in absehbarer Zeit auf Grund der Raumfahrttechnik entschieden werden können, womit eine der für unser Verständnis der Gesamtnatur und für das Selbstverständnis des Menschen wesentlichsten und tiefsten Fragen einer Beantwortung näher gebracht sein wird. Sie theoretisch vorweg entscheiden zu wollen, wäre abwegig. Das theoretische Nachdenken kann dem Experiment und der Empirie der Weltraum-Pioniere nur die Fragen *stellen*; ihre Beantwortung muß abgewartet werden.



# Zur industriellen Technologie der Raumfahrt

Von

E. Sänger<sup>1</sup>

(Mit 11 Abbildungen)

(Eingegangen am 23. Januar 1961)

## Zusammenfassung — Abstract — Résumé

**Zur industriellen Technologie der Raumfahrt.** Der Jahresaufwand der Menschheit für Luftfahrt und Raumfahrt von etwa 50 Milliarden Arbeitsstunden verteilt sich hauptsächlich auf die Industrien der Fluggeräte, Flugtriebwerke, Flugausrustung, Flugtreibstoffe, Flugbaustoffe und auf den unmittelbaren Personalaufwand der Flugorganisationen, ferner auf allgemeine Bau- und Maschinen-Industrie. Der Umfang der Verwendung von über 100 Produktenarten dieser Flugindustrien in Gegenwart und Zukunft wird abgeschätzt für die Fluggeschwindigkeitsdomanen der Unterschall-, Überschall- und Hyperschall-Luftfahrt, der langsamen und schnellen Interplanetarfahrt und der Interstellarfahrt.

Für ein europäisches Raumfahrtprogramm wird vermutet, daß dieses weniger auf den ballistischen als auf den flugtechnischen Weg zur Raumfahrt gerichtet sein wird, und daß seine Schwerpunkte zunächst bei Hyperschallflugzeugen und bemannten langsamen und schnellen Interplanetarfahrzeugen liegen könnten.

**Remarks to Industrial Technology of Space Flight.** Humanity's annual expenditure of roughly 50 billion men hours spent on aeronautics and astronautics is chiefly distributed among the industries manufacturing vehicles, propulsion plants, equipment, propellants, structural materials and, likewise, directly on the personnel sector of flying organizations, also, on the general machine tool industry as well as civil engineering industry. The extent of application of more than 100 productional types of said industries, at present and in the future, is estimated for the flying speed ranges of subsonic, supersonic, and hypersonic aeronautics, as well as the slow and fast interplanetary, and interstellar, astronautics.

A European astronautical program is believed to be directed less on the ballistic than rather on the aeronautic, road to space travel; also, the core of such a program is presumed to lie primarily with hypersonic aircraft as well as manned slow and fast interplanetary vehicles.

**Observations à la technologie industrielle de l'astronautique.** L'effort annuel de toute l'humanité consacre à l'aéronautique et à l'astronautique comporte 50 milliards d'heures de travail environ et est reparti principalement sur les industries des cellules, des propulseurs, des systèmes de guidage et accessoires, des propergols, des matériaux de construction, sur les besoins en personnel des organismes de l'aviation et de l'astronautique et ensuite sur les industries non specialises du bâtiment et des machines. L'étendue de l'utilisation dans la présence et dans le futur de plus de 100 genres

<sup>1</sup> Forschungsinstitut für Physik der Strahlantriebe e. V., Stuttgart-Vaihingen, Allmandstrae 124, Bundesrepublik Deutschland.



de produits de ces industries spécialisées dans l'aéronautique et l'astronautique est évaluée pour les domaines de l'aviation subsonique, supersonique et hypersonique, et aussi pour les domaines de l'astronautique interplanétaire lente et rapide et inter-stellaire.

On suppose pour un programme européen de l'espace que celui-ci sera orienté moins vers la variante balistique que vers la variante aéronautique et que ses centres d'activité pourraient d'abord se situer dans des avions hypersoniques et des astronefs interplanétaires équipés lents et rapides.

### I. Arbeitsaufwand für Luftfahrt und Raumfahrt

Der jährliche Aufwand der Menschheit für Luftfahrt und Raumfahrt wird gegenwärtig auf rund 50 Milliarden Arbeitsstunden geschätzt, das ist etwa 1% des Gesamtarbeitspotentials der Menschheit oder vielleicht 5% des Arbeitspotentials jener industrialisierten Völker, die diesen Aufwand tatsächlich im wesentlichen treiben.

In den beiden größten Industrieländern, USA und UdSSR, scheint dieser Aufwand sich wegen des noch hohen, etwa 8/10 betragenden Anteiles militärischer Luft- und Raumfahrt sogar 10% des nationalen Arbeitspotentials zu nähern. In der deutschen Bundesrepublik, dem drittgrößten Industrieland der Erde, beträgt er gegenwärtig allerdings kaum 2,5% des nationalen Arbeitspotentials und wird sich demnach im Zuge des Wiedereinspiels normaler politischer und wirtschaftlicher Verhältnisse vervielfachen müssen.

Dieser jährliche Gesamtaufwand für Luftfahrt und Raumfahrt verteilt sich bei deren Durchführung näherungsweise auf einzelne technologische Kategorien wie folgt:

Fliegendes Gerät .....	20%
Treibstoffe .....	20%
Bodenanlagen .....	30%
Personalkosten .....	30%

Nimmt man in sicher sehr grober Näherung an, daß der Aufwand für fliegendes Gerät sich weiterhin zu je ein Drittel auf Zellen, Triebwerk und Ausrüstung verteilt, und der Aufwand für Bodenanlagen ebenfalls zu je ein Drittel auf Hoch- und Tiefbauten, auf Maschinen und auf instrumentelle Ausrüstung, dann entfallen von den eingangs genannten jährlichen 50 Milliarden Arbeitsstunden auf die einzelnen beteiligten Industriezweige die in Abb. 1 zusammengestellten Beträge, nämlich:

Zellenindustrie etwa .....	7%
Triebwerksindustrie etwa .....	7%
Ausrüstungsindustrie etwa .....	16%
Treibstoffindustrie etwa .....	20%
Hoch- und Tiefbauindustrie etwa .....	10%
Allgemeine Maschinenindustrie etwa .....	10%

während die mit Luft- und Raumfahrt unmittelbar beschäftigten Menschen etwa weitere 30%, das sind 15 Milliarden Arbeitsstunden direkt leisten.

Diese sicher sehr globale und im einzelnen unvollständige, aber in den Größenordnungen nicht allzu fehlgehende Abschätzung läßt deutlich werden, welch außerordentlichen Umfang die Leistungen der Zulieferindustrien, wie chemischer, metallurgischer, Instrumenten-, Bau- und Maschinenindustrie gegenüber der eigentlichen Luftfahrtindustrie, etwa der Flugzeug- und Flug-

triebwerks-Industrie, in der Luft- und Raumfahrt haben. Dennoch spielt diese letztere, die Fluggeräte-Industrie, trotz der geringen Aufwandsbeteiligung von nur etwa 14% natürlich die Schlüsselrolle, indem sie durch die von ihr geschaffenen Fluggeräte die Tätigkeit sowohl aller Zuliefer- und Hilfsindustrien, als auch der Luftfahrt- und Raumfahrtorganisationen selbst bestimmt.

Die Gesamtmenschheit leistet für Luftfahrt und Raumfahrt jährlich rund 50 Milliarden Arbeitsstunden. Davon entfallen näherungsweise:

1. auf Zellenindustrie	etwa 7%, d.h. 3,5 Milliarden Arbeitsstunden
2. auf Triebwerksindustrie	etwa 7%, d.h. 3,5 Milliarden Arbeitsstunden
3. auf Ausrüstungsindustrie	etwa 16%, d.h. 8 Milliarden Arbeitsstunden
4. auf Treibstoffindustrie	etwa 20%, d.h. 10 Milliarden Arbeitsstunden
5. auf Hoch- und Tiefbau-Industrie	etwa 10%, d.h. 5 Milliarden Arbeitsstunden
6. auf allgemeine Maschinenindustrie	etwa 10%, d.h. 5 Milliarden Arbeitsstunden
7. auf direkten Personalaufwand der Luftfahrt- und Raumfahrt- Organisationen weitere	etwa 30%, d.h. 15 Milliarden Arbeitsstunden

Abb. 1. Arbeitsaufwand der Gesamtmenschheit für die Luftfahrt und Raumfahrt

Deswegen interessiert uns zunächst die allmähliche Verlagerung der Schwerpunkte von Forschung und Entwicklung, Produktion und Anwendung auf die verschiedenen Fluggeräte-Arten im Laufe dieses Jahrhunderts und besonders in den nächsten Jahrzehnten in erster Linie. Weiterhin soll aber auch die gegenwärtige und vermutliche zukünftige Technologie der Flugtriebwerke, der Ausrüstung, der Flugtreibstoffe und Flugbaustoffe eine quantitative Darstellung finden, um den einschlägigen Industrien eine gewisse Orientierung über Teilnahmemöglichkeiten an dieser Hälfte des Luftfahrt- und Raumfahrtgeschäftes zu erleichtern.

## II. Fluggeräte-Industrie

Die eigentliche Fluggeräte-Industrie, jene der Zellen, ist nach den früheren Überlegungen mit etwa 7% am Gesamtaufwand für Luftfahrt und Raumfahrt beteiligt. Wir beginnen mit dem Versuch einer graphischen Darstellung des An- und Abschwelens der Intensität von Erforschung, Entwicklung, Fertigung und Anwendung ihrer Produkte, der Fluggeräte von Luftfahrt- und Raumfahrt über dem Verlauf des zwanzigsten Jahrhunderts. Soweit diese Ereignisse in der Vergangenheit liegen, wird es darüber kaum wesentlich verschiedene Auffassungen geben, soweit sie dagegen in die Zukunft der nächsten vier vor uns liegenden Jahrzehnte unseres Jahrhunderts reichen, müssen die Angaben natürlich als sehr persönliche Vermutungen verstanden werden, wenn auch aus dem gegenwärtigen Trend von Forschung und Entwicklung, und deren Ablauf in der Vergangenheit zweifellos Extrapolationen in die nächsten Jahrzehnte mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit möglich sind. Daß diese Wahrscheinlichkeit unter Umständen recht hoch sein kann, zeigt ein Blick auf Abb. 2, einer Abschätzung der vermutlichen Weiterentwicklung der Fluggeschwindigkeiten von

unbemannten Flugkörpern<sup>1</sup>, bemannten Schnellflugzeugen und Verkehrsflugzeugen aus dem Jahre 1955, die sich in den seither verflossenen sechs Jahren ausgezeichnet erfüllt hat. Auch die heute schon wesentlich konkreter gewordenen Vorausschätzungen der Zeitpunkte, zu denen etwa bemannte Hyperschall-

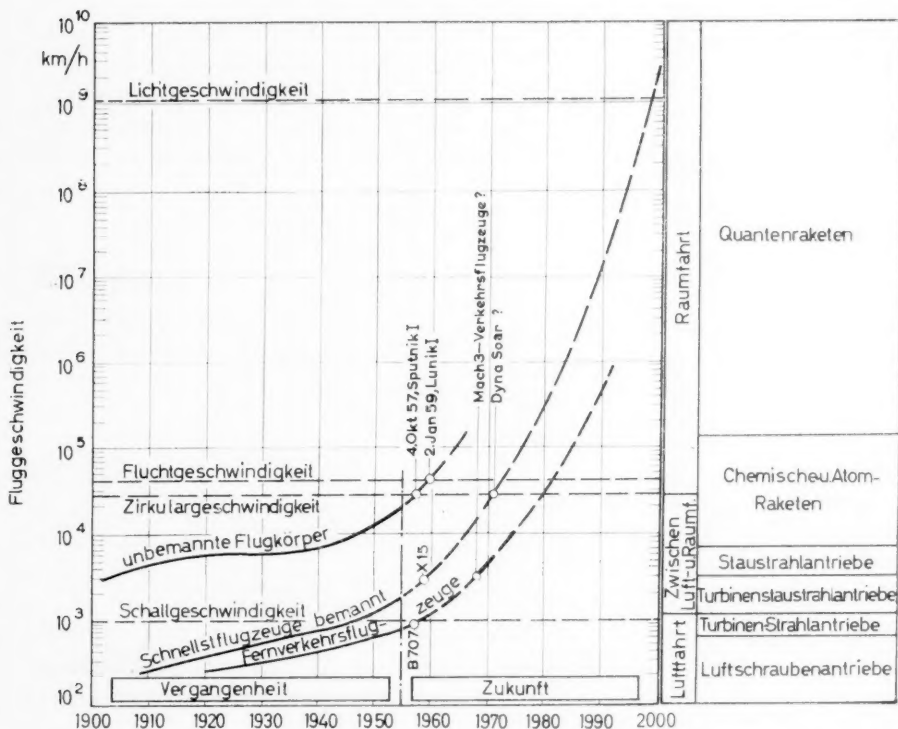


Abb. 2. Entwicklung der Geschwindigkeit von Geschossen und unbemannten Flugkörpern, von bemannten Schnellflugzeugen und von Fernverkehrsflugzeugen im 20. Jahrhundert. Schätzung aus dem Jahre 1955 und inzwischen eingetretene Tatsachen bzw. inzwischen genauere Voraussagen

Flugzeuge (z. B. Dyna Soar) die Zirkulargeschwindigkeiten erreichen, oder Überschall-Verkehrsflugzeuge der Machzahl 3 auftauchen werden, passen noch gut in diese alten Kurven.

Auf Grund dieser offenbar nicht ganz vertrauensunwürdigen Annahmen sind nun in Abb. 3 die wahrscheinlichen Intensitäten von Forschung, Entwicklung, Produktion und Anwendung in die Zukunft extrapoliert.

Dabei sind die Geräte selbst auseinandergehalten nach ihrer Zugehörigkeit zu einer der sechs Geschwindigkeitsdomänen der Luftfahrt, bzw. Raumfahrt, nämlich:

Unterschall-, Überschall-, Hyperschall-Luftfahrt und langsame interplanetare, schnelle interplanetare, interstellare Raumfahrt.

<sup>1</sup> Zweiter Jahresbericht des Forschungsinstituts für Physik der Strahlantriebe, Stuttgart 1956. — Stuttgarter Luftfahrtgespräch der Arbeitsgemeinschaft Graf Zeppelin vom 19. 6. 1956, Luftfahrttechnik 2 (1956), Nr. 7.

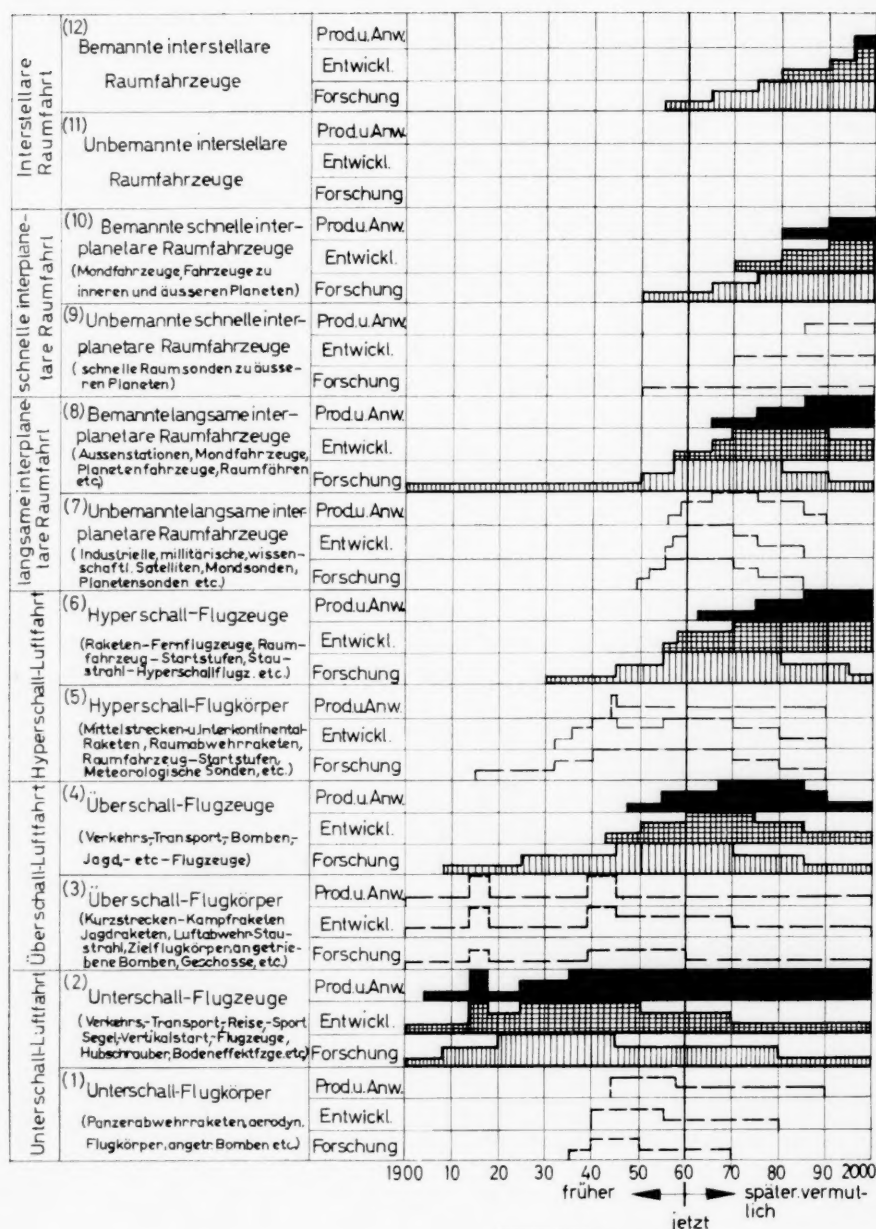


Abb. 3. Fluggeräte-Industrie (Intensität der Erforschung, Entwicklung, Produktion und Anwendung der Luft- und Raumfahrzeuge im Verlauf des 20. Jahrhunderts)

Außerdem ist in jeder dieser Geschwindigkeitsdomänen noch unterschieden zwischen unbemannten und bemannten Geräten, wobei die ersteren gegenwärtig überwiegend militärische Bedeutung haben und erst mit den unbemannten Hyperschall- und Raumfahrtgeräten gewisse wirtschaftliche oder wissenschaftliche Bedeutung erlangen, während die bemannten Geräte immer stärkere zivile und wirtschaftliche Anwendung finden und deshalb in Abb. 3 besonders herausgehoben sind.

Im einzelnen läßt sich über den zeitlichen Ablauf der Intensität von Erforschung, Entwicklung, Produktion und Anwendung dieser zwölf Fluggeräte-kategorien etwa folgendes kurz sagen:

1. Die unbemannten *Unterschall-Flugkörper* sind insgesamt von etwas ephemerer Bedeutung, die im Zweiten Weltkrieg besonders mit der deutschen V1-Waffe einsetzte. Diese erhielt später noch einige Nachfolger in Form anderer aerodynamischer Unterschall-Flugkörper, wie Zielflugkörper, Aufklärungsflugkörper, Störflykörper usw.

Gegenwärtig liegt der Schwerpunkt der Produktion von Unterschall-Flugkörpern hauptsächlich bei kleinen Kampftraketen, meist zur Panzerabwehr, während die angetriebenen Bomben den Unterschallbereich schon wieder verlassen.

2. Die bemannten *Unterschall-Flugzeuge* stellen in Form von Verkehrs-, Transport-, Reise-, Sport-, Segel-Flugzeugen und Hubschraubern, zu denen sich neuerdings noch andere Vertikalstart-Flugzeuge und Bodeneffekt-Fahrzeuge gesellen, noch immer die umfangreichste Gruppe dar, deren absolutes Volumen zweifellos in Zukunft noch wächst, auch wenn ihr relativer Anteil an der gesamten Luft- und Raumfahrt durch das Auftauchen neuer Gerätekategorien absinkt.

Ihre Erforschung geht auf Jahrhunderte zurück, wobei Namen wie LEONARDO DA VINCI, EIFFEL, LILIENTHAL eine Rolle spielten, sie wird lebhafter um 1910 mit der Gründung der ersten wissenschaftlichen Luftfahrtforschungsinstitute, um nach Ende des Ersten Weltkrieges weiter an Ausdehnung zuzunehmen und erst nach dem Zweiten Weltkrieg zurückgedrängt zu werden, durch die nun intensiv einsetzende Erforschung des Überschallfluges. Sie wird aber auch in den nächsten Jahrzehnten noch lebhaft und erst später geringfügigere Bedeutung behalten mit den Problemen des Vertikalfluges und der Bodeneffekt-Fahrzeuge. Besonders den letzteren wird man in der künftigen Entwicklung eines schnellen interurbanen Verkehrs höhere Bedeutung als Hubschraubern und Verkehrsflugzeugen beimessen müssen.

Auch die Entwicklung der Unterschall-Flugzeuge beginnt schon vor unserem Jahrhundert, erreicht ihre erste große Ausdehnung im Ersten Weltkrieg und dann wieder mit dem Einsetzen des zivilen Verkehrsfluges, um aber am Ende des fünften Jahrzehnts zu zunächst noch immer lebhaftem Umfang zurückgedrängt zu werden, der sich später mit der Stabilisierung der Unterschall-Flugtechnik weiter verringern wird.

Produktion und Anwendung der Unterschall-Flugzeuge beginnen 1903 mit den Gebrüdern WRIGHT, erreichen ihre erste große Ausdehnung im Ersten Weltkrieg und später allmählich anwachsend wieder um 1930, um weiterhin sehr ausgedehnt zu bleiben. Vermutlich wird sie in Zukunft dank der Vertikalflug- und Bodeneffekt-Geräte einem ähnlich stationären Zustand wie die Automobilindustrie oder sogar einer Vereinigung mit dieser zustreben.

3. Die unbemannten *Überschall-Flugkörper* mit Flugmachzahlen zwischen 1 und 5 haben als Geschosse ihre über halbjahrtausendjährige Geschichte hinter sich und wurden in diesem Jahrhundert ergänzt durch Kurzstrecken-Kampfraketen, Jagdraketen, Luftabwehr-Staustrahlen, Überschall-Zielflugkörper, angetriebene Bomben usw. Ihre Erforschung, Entwicklung, Produktion und Anwen-

dung zieht sich monoton und verhältnismäßig geringfügig durch unser ganzes Jahrhundert, nur unterbrochen durch die Perioden der großen Kriege mit jeweiligem Aufflammen ausgedehnter Bearbeitung, die sich in Forschung und Entwicklung nach dem letzten Weltkrieg noch einige Zeit lebhafter erhielt.

4. Die bemannten *Überschall-Flugzeuge* umfassen in zeitlicher Reihenfolge Versuchsflugzeuge, Jagdflugzeuge, Bombenflugzeuge, Transport- und Verkehrsflugzeuge, die letzteren allerdings derzeit noch im Entwicklungsstadium. Ihre Erforschung setzte geringfügig schon am Ende des ersten Jahrzehnts unseres Jahrhunderts ein, wird lebhafter mit dem Bau der ersten Überschall-Windkanäle im dritten Jahrzehnt und gewinnt große Ausdehnung im fünften Jahrzehnt, durchlief im sechsten Jahrzehnt ein Maximum und wird derzeit durch die Hyperschall- und Raumfahrt-Forschung mehr und mehr abgelöst. Die technische Entwicklung der Überschall-Flugzeuge begann im Zweiten Weltkrieg, steigerte sich rasch zu lebhaftem Umfang mit den Überschall-Jagdflugzeugen und Überschall-Bombenflugzeugen und beginnt eben zu ausgedehntem Umfang anzuschwellen durch die Entwicklung der Überschall-Verkehrsflugzeuge. Diese höchste Entwicklungsintensität wird nach dem siebenten Jahrzehnt mit der Schwerpunktsverschiebung nach Hyperschall-Flugzeugen allmählich wieder abklingen.

Produktion und Anwendung der Überschall-Flugzeuge beginnen nach dem ersten bemannten Überschallflug im Jahre 1947 (Bell Aircraft) zunächst mit Experimentalflugzeugen, wurde schon wenige Jahre später lebhaft mit Jagd- und Bombenflugzeugen und wird seine volle Ausdehnung erlangen mit dem vor 1970 erwarteten Auftauchen der Überschall-Verkehrsflugzeuge, um diese große Ausdehnung um das Ende des achten Jahrzehnts mit dem Verschwinden der militärischen Überschall-Flugzeuge und dem Auftauchen der Hyperschall-Verkehrsflugzeuge wieder allmählich zu verlieren.

5. Die unbemannten *Hyperschall-Flugkörper*, mit Flugmachzahlen zwischen 5 und 25, umfassen besonders Mittelstrecken- und Interkontinental-Raketen, Raumabwehr-Raketen, Raumfahrzeug-Startstufen, meteorologische Sonden usw.

Ihre Erforschung setzte geringfügig und verhältnismäßig spät im zweiten Jahrzehnt unseres Jahrhunderts in den USA (GODDARD) ein und wurde lebhaft zugleich mit dem Einsetzen technischer Entwicklungen in Deutschland (DORNBERGER, VON BRAUN) um 1933. Forschung und Entwicklung wuchsen mit Beginn des Zweiten Weltkrieges zu erheblichem Umfang an, um nach dessen Ende in den westlichen Ländern zunächst stark abzufallen und vorerst nur in Rußland intensiv fortgesetzt zu werden. Erst unter dem Eindruck der russischen Erfolge begannen sich Forschung und Entwicklung der Hyperschall-Fluggeräte um 1955 auch im Westen wieder auszudehnen und werden wahrscheinlich um 1965 ihren höchsten Umfang erreichen, um dann vermutlich stetig gegen das Ende des Jahrhunderts abzufallen.

Produktion und Anwendung der Hyperschall-Flugkörper erreichten ausgedehnten Umfang gegen Ende des Zweiten Weltkrieges und fielen dann auf geringfügigen Umfang, der sich voraussichtlich bis zum Jahrhundertende wenig ändern wird, da einerseits mit einer wirklichen Kriegsanwendung der Kampftraketen infolge der Tatsache ihrer Existenz kaum mehr zu rechnen ist, und andererseits ihre Verwendung für unbemannte Raumfahrzeug-Startstufen mit der Einführung bemannter Hyperschallflugzeuge als Startstufen und der Verbesserung der Raumfahrt-Triebwerke ebenfalls verschwindet, sobald einstufige Raumfahrzeuge möglich geworden sind.

6. Die bemannten *Hyperschall-Flugzeuge* umfassen hauptsächlich Raketen-Fernflugzeuge, bemannte Raumfahrt-Startstufen und wahrscheinlich Staustrahl-Hyperschallflugzeuge.



Ihre Erforschung begann geringfügig um 1930 (SÄNGER), wurde nach dem Ende des Zweiten Weltkrieges besonders in Rußland lebhafter und steigerte sich um 1955 mit Einführung der Hyperschall-Windkanäle und Hyperschall-Versuchsanlagen zu großer Ausdehnung, die voraussichtlich noch einige Jahrzehnte in voller Intensität anhalten wird.

Die Entwicklung der Hyperschall-Flugzeuge setzte in geringfügigem Umfang um 1950 in Rußland ein, wurde in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrzehnts lebhafter (X-15, Dyna-Soar, Bell Bomi, T IV A) und wird sich voraussichtlich mit den ersten erfolgreichen bemannten Hyperschallflügen, die in allernächster Zeit erwartet werden, wesentlich ausdehnen. Die derzeitigen unbemannten, verlorenen Startstufen von Raumfahrzeugen durch an den Startplatz zurückkehrende und wiederverwendbare, bemannte Hyperschallflugzeuge zu ersetzen, erweist sich immer mehr als ein dringendes Gebot der Wirtschaftlichkeit und Verlässlichkeit der Raumfahrzeuge und der Vereinfachung der Startplätze zu üblichen Flugplätzen, wie sie auch in Europa möglich sind.

Produktion und Anwendung der Hyperschall-Flugzeuge dürften um die Mitte dieses siebenten Jahrzehnts zunächst für Versuchs- und militärische Zwecke und weiterhin für bemannte Startstufen der Raumfahrzeuge in Gang kommen, während man wirtschaftliche Anwendungen für Verkehrszwecke erst gegen Ende des achten Jahrzehnts erwartet. Bis zu diesem Zeitpunkt dürfte die Hyperschallforschung auch einige entscheidende Beiträge zur Herabsetzung der Grenzschichtausbildung in der Außenumströmung der Flugzeuge und damit zur Verminderung ihrer Reibungserwärmung geliefert haben.

7. *Die unbemannten, langsamen, interplanetaren Raumfahrzeuge* umfassen besonders wissenschaftliche, militärische und industrielle Satelliten, Mondsonden, Planetensonnen usw.

Ihre Erforschung setzte ebenfalls sehr spät, etwa 1950, mit der Gründung der Internationalen Astronautischen Föderation ein, steigerte sich rasch zu lebhaftem Umfang und wurde schon um 1955 mit den Vorbereitungen zum Internationalen Geophysikalischen Jahr ausgedehnter.

Diese Forschungsintensität wird wenigstens bis 1970 anhalten, um dann durch die Forschung für bemannte Raumfahrzeuge überflügelt zu werden und rasch abzusinken.

Die Entwicklung unbemannter interplanetarer Raumfahrzeuge begann ebenfalls mit den Vorbereitungen zum Internationalen Geophysikalischen Jahr, wurde in diesem besonders nach den ersten russischen Erfolgen lebhaft und wird in diesem siebenten Jahrzehnt sehr ausgedehnt werden, um nachher unter dem Einfluß bemannter Raumfahrtgeräte ebenfalls abzuklingen.

Produktion und Anwendung der unbemannten, langsamen interplanetaren Raumfahrzeuge traten an dem historischen 4. Oktober 1957 in Erscheinung und wurden 1959 lebhaft. Diesen lebhaften Umfang wird man vielleicht ein bis zwei weitere Jahrzehnte unverändert annehmen dürfen, bis die bemannten Raumfahrzeuge ihn zurückdrängen werden.

8. *Die bemannten, langsamen, interplanetarischen Raumfahrzeuge* umfassen insbesondere Außenstationen der Erde und der Planeten, Mondfahrzeuge, Planetenfahrzeuge, Raumfähren usw.

Ihre Erforschung begann durch eine Reihe von Einzelpersonlichkeiten (ZIOLKOWSKI, OBERTH, ESNAULT-PELTERIE, PIQUET usw.) zum Teil schon im vorigen Jahrhundert, wurde aber lebhafter ebenfalls erst um 1950 mit der Gründung der Internationalen Astronautischen Föderation und verbreitete sich zu großer Ausdehnung etwa um 1957 im geophysikalischen Jahr.

Diese hohe Intensität der Erforschung langsamer Interplanetarfahrzeuge wird mit den ersten Erfolgen schneller derartiger Fahrzeuge vielleicht im achten Jahrzehnt abzufallen beginnen.

Die Entwicklung langsamer bemannter Interplanetarfahrzeuge begann, soweit sie bekannt geworden ist, ebenfalls in den allerletzten Jahren (Merkur) und wird sich in den nächsten drei Jahrzehnten weiter intensivieren.

Produktion und Anwendung dieser langsamen bemannten Raumfahrzeuge wird voraussichtlich in den allernächsten Jahren in Erscheinung treten und dann rasch anwachsenden Umfang bis zum Ende des Jahrhunderts bewahren.

Die bisher behandelten acht Geschwindigkeitskategorien von Luft- und Raumfahrzeugen sind alle wenigstens schon in das Stadium technischer Entwicklung getreten, so daß sich über ihr künftiges Schicksal einigermaßen fundierte Vermutungen anstellen lassen.

Dies trifft für die restlichen vier Geschwindigkeitskategorien von Raumfahrzeugen heute noch nicht zu, sie stehen noch im Stadium der Forschung, die schnellsten von ihnen sogar im allerersten Stadium der Grundlagenforschung, und wir können Vermutungen über ihre künftige Entwicklung und Anwendung nur auf Grund gewisser Analogieschlüsse und insbesondere der Forschungssituation der extremsten Triebwerkssysteme, photonischer Fissionsraketen, photonischer Fusionsraketen, reiner Fissionsraketen, reiner Fusionsraketen und reiner Photonenraketen anstellen.

9. Die *unbemannten, schnellen, interplanetaren Raumfahrzeuge* werden wahrscheinlich nur als schnelle Raumsonden zu den äußeren Planeten gewisse, aber vom technologischen Standpunkt nur geringfügige Bedeutung erlangen können.

10. Die *bemannten, schnellen, interplanetaren Raumfahrzeuge*, die den gesamten Raum zwischen den Sonnenplaneten innerhalb von Tagen durchkreuzen sollen, beruhen nach unserem gegenwärtigen Wissen auf den Forschungsprojekten der photonischen Fissionsraketen und der reinen Fissionsraketen<sup>1</sup> („Orion“, „Putt-Putt“).

Die Forschungsarbeiten des letzteren Projektes haben in den USA vor etwa einem Jahrzehnt begonnen (ARPA), mit dessen kürzlicher Übernahme durch die USAF dürfte in Zukunft mit einer Intensivierung der Forschungsarbeiten und vielleicht gegen Ende des Jahrzehnts mit der Aufnahme von Entwicklungsarbeiten zu rechnen sein, der erfahrungsgemäß in etwa einem weiteren Jahrzehnt erste Anwendungen zu folgen pflegen.

11. *Unbemannte interstellare Raumfahrzeuge* dürften nach heutiger Voraussicht kaum von merkbarer Bedeutung werden.

12. Auf dem Gebiet der *bemannten interstellaren Raumfahrzeuge*, die hinsichtlich des Antriebes im wesentlichen auf den Forschungsprojekten der reinen Fusionsraketen<sup>1</sup> und der reinen Photonenraketen<sup>1</sup> beruhen, hat die Grundlagenforschung etwa im Jahre 1954 (SÄNGER) begonnen. Die noch sehr undurchsichtige Lage dieses Forschungsgebietes ist besonders dadurch gekennzeichnet, daß die zugrunde liegenden Energiereaktionen (stationäre Kernfusion, bzw. Materiezerstrahlung) technologisch noch nicht beherrschbar sind. Dementsprechend sind Voraussagen über den zeitlichen Ablauf künftiger Fortschritte kaum möglich und die entsprechenden Angaben der Abb. 3 sind mit verschiedenen Fragezeichen zu versehen.

Immerhin kann man mit Gewißheit sagen, daß die einschlägige Forschung mit der technischen Realisierung der stationären Kernfusion zunächst schon zu größerer Ausdehnung gelangen wird und daß mit ihr auch die technischen Entwicklungsarbeiten der Interstellarfahrzeuge einsetzen werden.

<sup>1</sup> E. SÄNGER, Atomraketen für Raumfahrt, Astronaut. Acta 6, 3-15 (1960).



Anwendungen interstellarer Raumfahrzeuge dürften demnach kaum vor dem Ende des Jahrhunderts zu erwarten sein.

Zusammenfassend gewinnt man den Eindruck, daß die meisten unbemannten Luftfahrt- und Raumfahrt-Geräte ausgedehnte Anwendung nur vorübergehend finden, und neben ihrer zeitbedingten Bedeutung als Waffen oder Forschungsgeräte nur in Ausnahmefällen zu wirtschaftlicher Bedeutung gelangen (z. B. Nachrichtensatelliten, Navigationssatelliten usw.). Ihre Hauptbedeutung scheint vielmehr in ihrer vorübergehenden Rolle als Pioniergeräte für die entsprechenden bemannten Fahrzeuge zu bestehen. Dagegen darf man von den meisten dieser bemannten Geräte erhebliche wirtschaftliche Dauerbedeutung erwarten, insbesondere von den Unterschall-Flugzeugen, den Hyperschall-Flugzeugen und allen bemannten Raumfahrzeugen, sowohl langsamen wie schnellen Interplanetar-Fahrzeugen wie wahrscheinlich später auch einmal von Interstellarfahrzeugen.

Bemerkenswert an Abb. 3 ist weiter, daß dem jeweiligen Auftauchen des ersten Gerätes einer neuen Geschwindigkeitskategorie meist eine viele Jahrzehnte lange Periode der sporadischen Erforschung vorausgeht, daß aber dem ausgedehnten Einsatz der Forschung die ersten Flugerfolge meist schon in einem Jahrzehnt folgen. Bemerkenswert ist ferner, daß der Übergang von einer Geschwindigkeitsdomäne zur nächst schnelleren zunächst einige Jahrzehnte dauerte, daß sich aber die Entwicklung mit dem Fortschreiten des Jahrhunderts zu beschleunigen scheint, und daß insbesondere die Realisierung des bemannten Hyperschallfluges und der bemannten langsamen Raumfahrt fast gleichzeitig in den nächsten Jahren erwartet werden.

Schließlich läßt Abb. 3 noch erkennen, daß für industrialisierte Völker, die auf manchen Domänen der Luftfahrt oder Raumfahrt in letzter Zeit nicht sehr aktiv waren und sich nun einzuschalten wünschen, der Neubeginn von Forschung oder Entwicklung von unbemannten Geräten nicht sehr zukunftsträchtig erscheint, so daß es zweckmäßiger erscheint, solche Geräte zu kaufen oder in Lizenz zu produzieren, wenn danach plötzlicher Bedarf entsteht. Hingegen scheint in solchen Fällen die Aufnahme von industriellen Entwicklungen in den Domänen der Unterschall-Flugzeuge (besonders hinsichtlich Vertikalfluggeräten), der Hyperschall-Flugzeuge und der bemannten langsamen Interplanetarfahrzeuge im Augenblick empfehlenswert zu sein, unter der Voraussetzung allerdings, daß die notwendigen Forschungsunterlagen von irgendeiner Seite zur Verfügung gestellt werden.

Beim Neuanlaufen der Forschung wird man sehr unterscheiden müssen zwischen jener Art von technischer Begleitforschung, die sich mit den bei der industriellen Entwicklung jeweils anfallenden Einzelproblemen befaßt und diese zu lösen versucht, und der Pionierforschung, deren Aufgabe es ist, die industrielle Entwicklung in neuen Domänen vorzubereiten.

Während die Aufgabenbereiche der Begleitforschung sich ohne weiteres aus den jeweiligen laufenden technischen Entwicklungen von selbst ergeben, kann man über die viel schwierigere Aufgabenstellung der Pionierforschung einige Anregungen ebenfalls aus Abb. 3 ableiten. Demnach ist diese Art von Luftfahrtforschung im wesentlichen nur mehr in dem Bereich der Hyperschall-Flugzeuge zu empfehlen, während die entsprechende Raumfahrtforschung sich zunächst auf die Domänen der bemannten langsamen und schnellen Interplanetarfahrzeuge zu konzentrieren hätte und die Erforschung bemannter Interstellarfahrzeuge vorerst noch auf wenige Stellen beschränkt bleiben darf.

Nach diesen allgemeinen Ausführungen über die Tätigkeit der Fluggeräte-Industrie wollen wir uns jener Industrie zuwenden, deren Produkte im eigentlichen Sinne die Motoren dieser für unser Jahrhundert so kennzeichnenden technischen Entwicklungen sind, nämlich der Flugtriebwerks-Industrie.

### III. Flugtriebwerks-Industrie

Die Industrie der Flugtriebwerke ist nach unseren Überlegungen ebenfalls mit etwa 7% am Gesamtaufwand für Luftfahrt- und Raumfahrt beteiligt.

Abb. 4 versucht eine graphische Zuordnung des gegenwärtigen und zukünftigen Umfanges der industriellen Technologie der Flugtriebwerke zu den schon früher geschilderten zwölf Geschwindigkeitsdomänen von Fluggeräten der Luftfahrt und Raumfahrt. Wir haben uns dabei auf 21 Triebwerkssysteme beschränkt, die heute am stärksten verwendet bzw. diskutiert werden, neun luftatmende, also Luftstrahl-Triebwerkssysteme, und zwölf Raketen-Triebwerkssysteme. Die Trennungslinie zwischen diesen beiden Gruppen und eine entsprechende Trennungslinie zwischen den Luftfahrzeugen und Raumfahrzeugen läßt erkennen, daß zwar die Luftstrahl-Triebwerke naturgemäß ausschließlich auf Luftfahrzeuge beschränkt sind, daß jedoch einige Raketen-Triebwerkssysteme sowohl in der Luftfahrt wie auch in der Raumfahrt angewendet werden, während eine letzte größere Gruppe von Raketentriebwerken ausgesprochene Raumfahrt-Triebwerke darstellt und daher in der Luftfahrt nicht erscheint.

Wir verfolgen zunächst die Verwendung der technologisch auch meist breiteren Kreisen besser bekannten Luftstrahl-Triebwerke.

1. *Kolben-Propeller-Triebwerke* finden für Unterschall-Flugkörper keine Verwendung mehr, für Unterschall-Flugzeuge finden sie dagegen noch ausgedehnte Anwendung, die allerdings in Zukunft gering werden dürfte. Für schnellere Geräte sind sie ungeeignet.

2. *Turbinen-Propeller-Triebwerke* finden für Unterschall-Flugkörper weder jetzt noch vermutlich später Verwendung, jedoch in wachsendem Maße in Unterschall-Flugzeugen, wahrscheinlich später auch in Vertikalflug- und Bodeneffekt-Geräten. Für schnellere Gerätekategorien sind sie ebenfalls ungeeignet.

3. *Staustrahl-Propeller-Triebwerke* lassen für Unterschall-Flugkörper keine Anwendung erkennen, für Unterschall-Flugzeuge haben sie geringe Anwendung in Hubschraubern erlangt und versprechen in Zukunft auch gewisse Anwendungsmöglichkeiten als Start- und Hilfstriebwerke für Segelflugzeuge.

Für schnellere Fluggerätekategorien sind sie wieder ungeeignet.

4. *Chemische Turbinenstrahl-Triebwerke* haben für Unterschall-Flugkörper gewisse Anwendung gefunden, die sich jedoch schon vermindert. Für Unterschall-Flugzeuge werden diese Triebwerke jetzt ausgedehnt verwendet und voraussichtlich auch in Zukunft. Für Überschall-Flugkörper ist ihre Verwendung geringfügig und verspricht auch in Zukunft nicht mehr. Dagegen finden sie gegenwärtig ausgedehnte Anwendung in Überschall-Flugzeugen, die sich später eher verringern wird. Für schnellere Geräte sind sie ungeeignet.

5. *Atomare Turbinenstrahl-Triebwerke* sind derzeit erst in Entwicklung, sie versprechen für später breitere Anwendungsmöglichkeiten für Unterschall- und Überschall-Flugzeuge.

6. *Verpuffungsstrahl-Triebwerke* haben in der Vergangenheit gewisse Anwendungen für Unterschall-Flugkörper gefunden, sind jedoch inzwischen praktisch aus der Flugtechnik verschwunden.

7. *Kombinierte Turbinenstrahl-Staustrahl-Triebwerke* werden derzeit in gewissem Umfang für Überschall-Flugzeuge benützt und werden sich in dieser Geschwindigkeitskategorie weiterhin zu noch größerer Verwendung aufschwingen.

8. *Chemische Staustrahl-Triebwerke* haben Anwendungen geringen Umfanges in Unterschall-Flugkörpern und Unterschall-Flugzeugen gefunden und werden sie ähnlich auch in Zukunft behalten. Von größerer Ausdehnung ist ihre Anwendung jetzt und wahrscheinlich auch in nächster Zukunft in Überschall-Flug-

Interstellare Raumfahrt	(12) Bemannte interstellare Raumfahrzeuge	später jetzt																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
-------------------------	---	-----------------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Abb. 4. Gegenwärtige und zukünftige industrielle Technologie der Flugtriebwerke in Luftfahrt und Raumfahrt

körpern, während sie in Überschall-Flugzeugen und besonders Hyperschall-Flugzeugen in Zukunft größere Anwendungsbereiche finden werden.

9. *Atomare Staustrahl-Triebwerke* (z. B. Projekt „Pluto“) sind noch in technischer Entwicklung und werden voraussichtlich Anwendungen größerer Ausdehnung in Überschall- und Hyperschall-Flugzeugen finden.

So viel über die Anwendungsgebiete der Luftstrahl-Triebwerke.

Die in Abb. 4 dargestellten zwölf Raketen-Triebwerkssysteme bedürfen noch einer kurzen allgemeinen Erläuterung, die an Hand der Abb. 5 gegeben wird. Dort sind die mit einstufigen Raketenfahrzeugen von 90% Treibstoffanteil am Startgewicht im schweren- und widerstandsfreien Raum theoretisch erreichbaren Fluggeschwindigkeiten aufgetragen in Abhängigkeit von der Energieausbeute der Treibstoffe im Verhältnis zur vollständigen Materie-Energie-Umwandlung. Dabei ist durch zwei Kurven unterschieden zwischen einerseits dem üblichen, adiabatischen Raketenprozeß, bei dem die gesamte aus den Treibstoffen gewonnene Energie in den Treibstoffmassen verbleibt und diese zu einem schnellen Antriebsstrahl beschleunigt, der also alle umgewandelte Energie überwiegend in Form kinetischer Energie der Treibstoffpartikel enthält, und andererseits dem photonischen Raketenprozeß, bei dem die natürliche Tendenz sehr heißer Plasmen, ihren Energieinhalt abzustrahlen, ausgenützt wird, in dem die aus den Treibstoffen gewonnene Energie in Form gerichteter elektromagnetischer Strahlung den lichtschnellen Antriebsstrahl bildet, während die nicht umgewandelten restlichen inerten Treibstoffmassen ohne Relativgeschwindigkeit zum Fahrzeug und möglichst kalt von Bord gegeben werden.

Auf der Kurve des ersten Prozesses sind als Vertreter der vier wesentlichen Materie-Energie-Transformationen, nämlich chemischer Verbrennung, Kernspaltung (Fission), Kernsynthese (Fusion) und Materiezerstrahlung (Antimaterie), vier Raketensysteme besonders hervorgehoben: die chemischen Feststoff- und Flüssigkeits-Raketentriebwerke, die reinen Fissions-Raketentriebwerke, die reinen Fusions-Raketentriebwerke und die reinen Photonen-Raketentriebwerke.

Die Raketenindustrie bzw. Raketenforschung hat sich mit diesen Grundsystemen aus vielerlei Gründen jedoch nicht begnügt, sondern zu mehreren von ihnen noch Ausweichlösungen in Betracht gezogen.

Als Ausweichlösung zu den chemischen Raketen werden beispielsweise Heißwasserraketen erforscht, bei denen die chemische Verbrennungsenergie auf andere Strahlmassen, in diesem Fall Wasser, übertragen wird, und die sich durch besonders billige Impulserzeugung und hohe Betriebssicherheit auszeichnen.

Als Ausweichlösung zu den reinen Fissionsraketen werden eine ganze Reihe von Sekundärsystemen betrachtet, wie die konvektiven Fissionsraketen, bei denen die Fissionsenergie eines Kernspalt-Meilers auf Wasserstoff als Strahlmassen übertragen wird, und die schon erheblichen technischen Entwicklungsaufwand hinter sich haben (Projekt Rover), oder die Heißwasser-Fissionsraketen, bei denen man die Fissionsenergie (beispielsweise eines gasförmigen Fissionsreaktors oder der Explosionen von Fissionsbomben) auf Wasser, Wasserstoff oder Ammoniak als Strahlmassen unmittelbar zu übertragen gedenkt und die dementsprechend besonders für sehr große Triebwerke von vielen tausend Tonnen Schub geeignet erscheinen, oder die elektrischen Ionen- und Plasmenraketen, die die Fissionsenergie eines Kernspaltmeilers in elektrische Energie umwandeln und mittels elektrostatischer oder elektromagnetischer Felder auf Metallionen oder Plasmen als Strahlmassen übertragen, wodurch sehr hohe Strahlgeschwindigkeiten bei allerdings nur sehr kleinen Schüben möglich erscheinen. Auch diese Systeme haben bereits erheblichen Entwicklungsaufwand hinter sich.

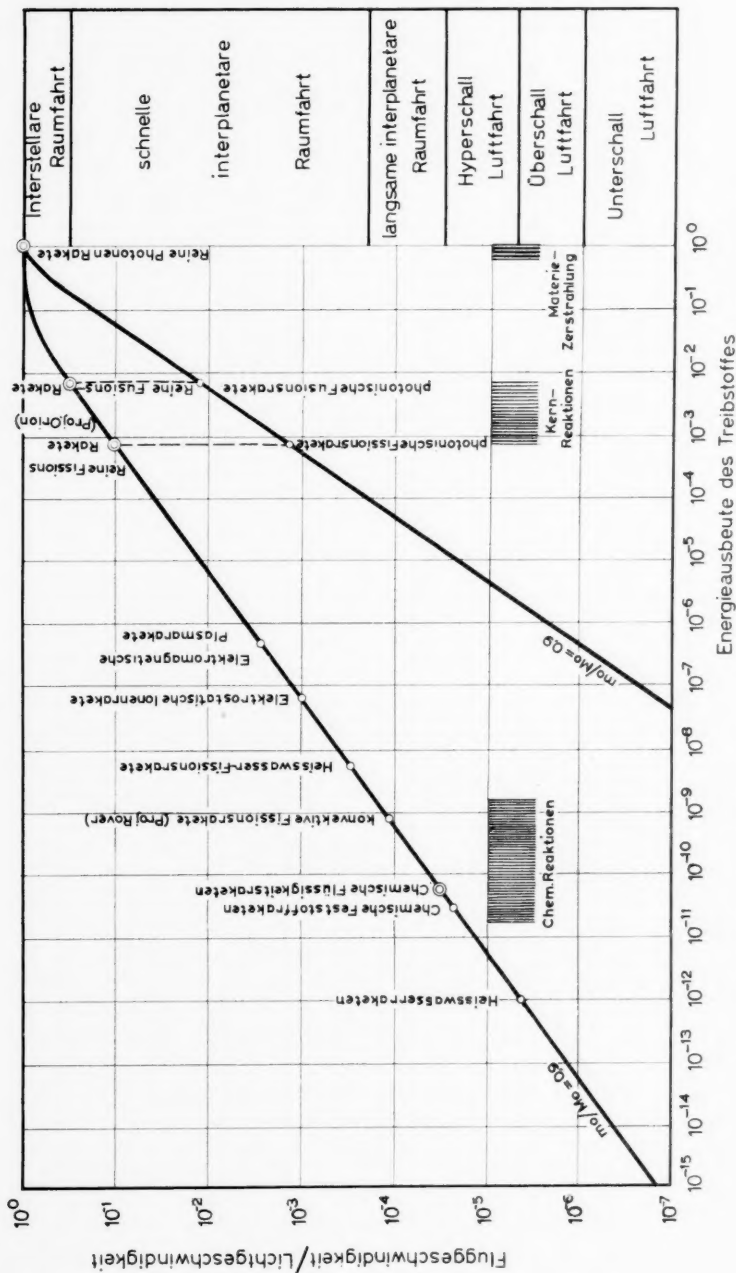


Abb. 5. Mit einstufigen Raketenfahrzeugen von 90% Treibstoffanteil am Startgewicht erreichbare Fluggeschwindigkeiten in Abhängigkeit von der Energieausbeute des Treibstoffes

Eine fünfte Ausweichlösung zur reinen Fissionsrakete stellt das System der photonischen Fissionsrakete dar, bei dem die Fissionsenergie mittels besonderer schwerer Strahlungsplasmen völlig in Photonen als Strahlmassen verwandelt werden soll und die Fissionsasche energielos von Bord gegeben wird.

Die reine Fissionsrakete wird in einer besonderen Form unter den Projektbezeichnungen „Orion“ bzw. „Putt-Putt“ seit Jahren erforscht und technisch entwickelt, wobei im wesentlichen der Explosionsdruck von Fissionsbomben gegen eine massive Platte zur Schubwirkung gelangt, also die Kernspaltprodukte unmittelbar und unverdünnt den Antriebsstrahl bilden und dementsprechend sehr hohe spezifische Impulse und Schübe erwartet werden.

Die reine Fusionsrakete und ihre Ausweichlösung, die photonische Fusionsrakete, können so lange noch nicht in ein Stadium technischer Entwicklung treten, als die stetige Kernfusionsreaktion noch nicht in ausreichendem Maße technisch zu handhaben ist.

In noch höherem Maße gilt dies natürlich für die reine Photonenrakete, deren Treibstoffgrundlage, Materiezerstrahlung bzw. Antimaterie noch sehr hypothetisch sind. Man erkennt in den Ordinaten der Abb. 5 eine recht abgeschlossene, kontinuierliche Reihe von Raketentriebwerks-Projekten von der Schallgeschwindigkeit bis zur Lichtgeschwindigkeit der Fahrzeuge, die Gegenstand der Triebwerksentwicklung bildet und in den nächsten Jahrzehnten bilden wird.

Die am rechten Bildrand angegebene Zuordnung der Geschwindigkeitsdomänen von Luftfahrt und Raumfahrt zu den erreichbaren Fluggeschwindigkeiten erlaubt nun die Rückkehr zu Abb. 4 und zur Abschätzung der zukünftigen industriellen Technologie der Raketentriebwerke.

10. *Heißwasser-Raketen* sind gegenwärtig im fortgeschrittenen Forschungsstadium und lassen für später Anwendungen als wirtschaftliche und betriebssichere Starthilfen erwarten, und zwar in geringem Umfang für Unterschall-Flugzeuge und Raumfahrzeuge, in größerem Umfang für Überschall-Flugzeuge und in ausgedehntem Umfang für Hyperschall-Flugzeuge.

11. *Chemische Feststoffraketen* haben trotz ihres noch immer außerordentlich hohen Preises der erzeugten Impulseinheit infolge ihrer erfolgreichen technischen Weiterentwicklung sehr breite Anwendung für unbemannte Flugkörper gefunden, und zwar schon im Unterschallbereich, besonders aber im Überschall- und Hyperschallbereich und in geringem Umfang sogar im langsamen Raumfahrtbereich (Scout). Diese Anwendungen dürften auch in nächster Zukunft noch durchaus erhalten bleiben, während ihre geringfügige Anwendung als Starthilfen für Unterschall-Flugzeuge und Überschall-Flugzeuge wohl eher rückläufig ist.

12. *Chemische Flüssigkeitsraketen* haben ihre Hauptanwendungsgebiete gegenwärtig und voraussichtlich auch für die nächste Zukunft ebenfalls im Bereich schnellerer unbemannter Flugkörper im Überschall- und Hyperschallbereich, während ihre gegenwärtig intensive Verwendung im langsamen Raumfahrtbereich mit den ersten Atomraketen wohl zurückgehen dürfte. Ihre Verwendung für bemannte Geräte beschränkt sich gegenwärtig fast nur auf Hilfstriebwerke für Überschall-Flugzeuge, dürfte aber in Zukunft für Hyperschall-Flugzeuge und bemannte langsame Raumfahrzeuge umfangreicher werden. Flüssigkeitstriebwerke bis etwa 750 Tonnen Schub sind in Entwicklung.

13. *Konvektive Fissionsraketen* stehen gegenwärtig noch in technischer Entwicklung und werden beschränkte Anwendung in Hyperschall-Flugzeugen und breitere Verwendung in langsamen unbemannten und bemannten Raumfahrzeugen finden.



14. *Heißwasser-Fissionsraketen* stehen gegenwärtig noch in der Erforschung und versprechen ausgedehnte Anwendungsmöglichkeit für sehr große Hyperschall-Flugzeuge und bemannte langsame Raumfahrzeuge, in geringerem Umfang sogar für schnelle bemannte Interplanetarfahrzeuge. Schübe von 100000 Tonnen werden erwogen.

15. und 16. *Elektrostatische Ionenraketen* und *elektromagnetische Plasmaraketen* sind gegenwärtig in intensiver technischer Entwicklung. Sie stellen ausgesprochene Raumfahrt-Triebwerke dar. Man erwartet von ihnen gewisse Anwendung für unbemannte und bemannte langsame Interplanetarfahrzeuge, jedoch mit Schüben von nur wenigen Kilogramm.

17., 18., 19., 20. und 21. Die zuletzt aufgeführten Raketensysteme, photonische Fissionsraketen, photonische Fusionsraketen, reine Fissionsraketen, reine Fusionsraketen und schließlich reine Photonenraketen stehen sämtlich noch im Stadium der Forschung. Sie alle stellen ebenfalls ausgesprochene Raumfahrt-Triebwerke dar, die beiden letzten sogar Triebwerke der interstellaren Raumfahrt, während ihre Anwendungsmöglichkeit noch innerhalb der Luftfahrt, also eventuell in der Hyperschall-Luftfahrt, durch die schädliche Wirkung ihrer Antriebsstrahlen auf die Umgebung fraglich erscheint.

#### IV. Flugausrüstungs-Industrie

Nach den einleitenden Ausführungen spielt die Ausrüstungs-Industrie mit ihrem Anteil von etwa 16% am Gesamtaufwand für Luftfahrt und Raumfahrt nach der Treibstoffindustrie die wirtschaftlich schwerstwiegende Rolle, wobei sich ihr Tätigkeitsgebiet auf die gesamte instrumentelle Ausrüstung sowohl der fliegenden Geräte, als auch der Bodenanlagen erstreckt, auf die Nachrichten- und Navigationseinrichtungen, Beobachtungsgeräte, Hilfsenergiequellen, Betätigungssysteme, und schließlich auch auf die Meßgeräteeinrichtung rein wissenschaftlicher, wirtschaftlicher oder militärischer Zielsetzung von Fluggeräten.

Abb. 6 versucht die relative Intensität der gegenwärtigen und zukünftigen industriellen Technologie einiger ausgewählter Ausrüstungsgruppen in Luftfahrt und Raumfahrt abzuschätzen.

Die *Bord-Überwachungsinstrumente*, beispielsweise der Triebwerke, der Klimatisierung, der Hilfsmaschinen usw. ziehen sich in einheitlich großem Umfang, wenn auch wechselnder Art, durch alle Domänen der Luftfahrt, wie der Raumfahrt.

*Optische Nachrichtenmittel* werden in der Luftfahrt im allgemeinen nur in geringem Umfang verwendet, dürften jedoch in der Raumfahrt zu gewisser Anwendung gelangen.

*Radio-Nachrichtenmittel* dagegen spielen in der gesamten Luft- und Raumfahrt sowohl gegenwärtig, als wahrscheinlich auch in Zukunft eine ausgedehnte Rolle.

*Optische Navigationsmittel* gehen in der Luftfahrt im allgemeinen nicht über das bloße Auge des Piloten hinaus, doch werden für die Raumfahrt optische Navigationsgeräte entwickelt.

*Radar-Navigationsmittel* spielen besonders in der Luftfahrt eine ausgedehnte Rolle, in der Raumfahrt scheint ihre Bedeutung sich zu verringern.

*Trägheits-Navigationsmittel* spielen besonders in der Hyperschall-Luftfahrt und in der interplanetaren Raumfahrt eine ausgedehnte und sich ständig weiter ausdehnende Rolle.

*Astronomische Navigationsmittel* werden in der Luftfahrt noch in geringem bis größerem Umfang verwendet, doch scheint ihr Hauptanwendungsgebiet in der Raumfahrt zu liegen.





*Ultrarct-Navigationsmittel* werden in geringem Umfang für Luftfahrt und für Raumfahrt vorgesehen, in großem Umfang für Überschallflugkörper, speziell Jagdraketen.

Bord-Hilfsenergiequellen bilden ein anderes, bedeutungsvolles Gebiet der Ausrüstung von Fluggeräten.

*Chemische Batterien*, meist in Form von Akkumulatoren finden ausgedehnte Anwendung in Luftfahrtgeräten, während sie in Raumfahrtgeräten teilweise durch andere Verfahren ersetzt werden.

*Turbinen-Aggregate* spielen ebenfalls in den Domänen der Luftfahrt und der Raumfahrt eine meist erhebliche Rolle, beispielsweise zum Antrieb der Förderpumpen der Treibstoffe.

*Sonnenbatterien* beginnen für langsame interplanetare Raumfahrt eine wesentliche Rolle zu spielen, sind jedoch für die Bereiche der Luftfahrt innerhalb der Atmosphäre und für die sonnenfernen Bereiche schneller Interplanetarfahrten ohne Bedeutung.

*Brennstoffzellen* beginnen geringfügige Anwendung in der Luftfahrt und stärkere Verwendung in der Interplanetarfahrt zu finden.

*Kernenergiebatterien*, auf der Basis radioaktiver Stoffe oder von Kernspaltmeilern gewinnen zunehmende Bedeutung vom Überschallflug bis zur Interstellarfahrt.

Ein anderes Teilgebiet der Ausrüstung sind die umfangreichen Betätigungssysteme für Ruder, Triebwerke, Ventile, Regelungsorgane usw.

*Hydraulische Betätigungssysteme* überwiegen in der Luftfahrt, sie scheinen in der Raumfahrt stärker durch *elektrische Betätigungssysteme* ersetzt zu werden, während *pneumatische Betätigungssysteme* geringere Anwendung für Sonderzwecke in allen Geschwindigkeitsdomänen finden.

## V. Flugtreibstoff-Industrie

Die früher abgehandelten Triebwerke bestimmen die in Luftfahrt und Raumfahrt verwendeten Treibstoffe, wobei jedoch die Treibstoffindustrie einen mehrfach größeren Anteil als die Triebwerksindustrie selbst, nach den Eingangsüberlegungen etwa 20% des Gesamtaufwandes für Luftfahrt und Raumfahrt, zu leisten hat. Diese Höhe des Gesamtaufwandes für Treibstoffe wird verständlich, wenn wir bedenken, daß bei Hyperschall-Flugzeugen 60%, bei Raumfahrzeugen bis 90% des Startgewichtes aus Treibstoffen besteht.

Abb. 7 versucht, die Intensität der gegenwärtigen und zukünftigen Verwendung von 22 ausgewählten Treibstoffarten in Luftfahrt und Raumfahrt abzuschätzen, von den inerten Strahlmassen Luft und Wasser über die selbständigen Festtreibstoffe, die chemischen Brennstoffe und Verbrennungsstoffe bis zu den teilweise noch hypothetischen Atomtreibstoffen.

1. *Luft* ist der wesentliche Antriebsstrahl-Bestandteil aller Luftstrahltriebwerke und findet dementsprechend in allen Domänen der Luftfahrt mehr oder weniger ausgedehnte Anwendung, besonders intensiv im Bereich der Unterschall- und Überschall-Flugzeuge. — Ihre Beschaffung stellt derzeit innerhalb der irdischen Atmosphäre keine Probleme, ihr Vorhandensein auf anderen Weltkörpern ist dagegen noch äußerst problematisch.

2. *Wasser* tritt ebenfalls als noch wohlfeile Strahlmasse mitunter dort an Stelle der Luft, wo seine höhere Dichte oder die Abwesenheit von Luft dies zweckmäßig erscheinen lassen, also in den Anwendungsdomänen der chemischen Heißwasserraketen und der Heißwasser-Fissionsraketen. Dies dürfte praktisch also in geringem Umfang für Unterschall-Flugzeuge, in größerem Umfang für Über-

schall-Flugzeuge und am ausgedehntesten für Hyperschall-Flugzeuge und langsame Interplanetarfahrzeuge der Fall sein.

3. *Kohlenwasserstoffe*, wie Benzin, Kerosin, Gasöl, Terpentinöl usw. bilden heute noch die meistverwendeten Brennstoffe in chemischen Luftstrahltriebwerken und chemischen Raketentriebwerken und werden dies auch in nächster Zukunft weiterhin tun.

Ihre Anwendung erstreckt sich daher auf das Gesamtgebiet der Luftfahrt und in geringem Umfang auch auf die langsame interplanetare Raumfahrt, wobei Großverbraucher besonders die Unterschall- und Überschall-Flugzeuge, ferner die Hyperschall-Flugkörper und in Zukunft wohl auch die Hyperschall-Flugzeuge sind.

4. *Borwasserstoffe*, mit bis zu 40% höherem Heizwert gegenüber Kohlenwasserstoffen, jedoch erheblich höherem Preis, haben sich bisher nicht einzuführen vermocht, mögliche Anwendungen geringer Ausdehnung könnten vielleicht für gewisse Überschall- und Hyperschall-Flugzeuge entstehen.

5. *Rauchlose Pulver* haben ausgedehnte Anwendung für die Rakentriebwerke von Unterschall-Flugkörpern, etwas geringere für Überschall-Flugkörper und nur mehr geringfügige für Hyperschall-Flugkörper gefunden, doch dürften sie in Zukunft immer stärker durch die nächste Gruppe verdrängt werden.

6. *Kompoundpulver*, meist mechanische Gemische eines festen Brennstoffes (z. B. Kunststoffe, Polyurethane, Thiokole, Leichtmetalle usw.) mit einem festen Verbrennungsstoff (z. B. Ammoniumperchlorat, Kaliumperchlorat, Fluorverbindungen usw.) und bis zu 50% höheren Strahlgeschwindigkeiten als rauchlose Pulver haben sehr ausgedehnte Anwendung gefunden für unbemannte Flugkörper im Unterschall-, Überschall- und Hyperschall-Flugbereich, gewisse Verwendung sogar im langsamen Raumfahrtbereich. Die Anwendungen im Luftfahrtbereich dürften auch in Zukunft solange erhalten bleiben, als unbemannte Flugkörper überhaupt eine wesentliche Rolle spielen.

7. *Wasserstoff*, in flüssiger Form, beginnt sowohl als chemischer Brennstoff, in Flüssigkeitsraketen, als inerte Strahlmasse in Fissionsraketen, wie auch späterhin als Kernfusionsstoff für Raketentriebwerke eine zunehmende Rolle zu spielen und kommt in diesem Zusammenhang besonders für Hyperschallflug, für langsame und schnelle interplanetare Raumfahrt und bis zu gewissem Grad sogar für interstellare Raumfahrt in Frage.

8., 9. *Ammoniak* und die ihm verwandten *Hydrazine* haben bisher geringfügige Anwendung im Hyperschallflug gefunden, die sich zu steigern scheint.

10. *Alkohole* (Äthylalkohol, Methylalkohol, Furfurylalkohol usw.) haben zunächst gewisse Anwendungen in unbemannten Überschall- und Hyperschall-Flugkörpern gefunden, sind jedoch weitgehend durch Kohlenwasserstoffe und Hydrazine verdrängt worden.

11. *Leichtmetalle*, insbesondere das relativ wohlfeile Aluminium und in gewissem Umfang Beryllium finden als Brennstoffe Verwendung in Kompositpulvern zur Steigerung der Verbrennungswärme und treten demgemäß in der Unterschall-, Überschall- und Hyperschall-Luftfahrt und der langsamen Raumfahrt auf.

12. *Metallalkyle* (z. B. Zinkdiäthyl, Aluminiumalkyle) sind zwar als eigentliche Brennstoffe zu kostspielig, doch finden sie wegen ihrer pyrophoren Eigenschaften als Zündstoffe in Flüssigkeitsraketen Anwendung.

Zur nächsten Gruppe der Verbrennungstoffe übergehend erwähnen wir zunächst:

13. *Ozon*, das in flüssiger Form wegen seiner hohen Dichte und hohen Verbrennungswärme schon lange für Raketentriebwerke untersucht wird und mög-

Vol.  
7  
1961

Abb. 7. Gegenwärtige und zukünftige industrielle Technologie der Flugtreibstoffe in Luftfahrt und Raumfahrt

licherweise für Hyperschall-Flugzeuge und langsame bemannte Interplanetarfahrzeuge Anwendung finden könnte.

14. *Sauerstoff*, in flüssiger Form, ist der klassische Verbrennungsstoff für chemische Flüssigkeitsraketen und hat besonders in der Hyperschall-Luftfahrt und der langsamen Raumfahrt ausgedehnte Anwendung gefunden, die ihm auch in Zukunft erhalten bleiben dürfte.

15. *Wasserstoffsuperoxyd* hat als Raketentreibstoff seine Bedeutung weitgehend eingebüßt.

16. *Salpetersäure* dagegen wird als lagerbarer Verbrennungsstoff für Überschall- und Hyperschall-Flugkörper noch in gewissem Umfang verwendet.

17. *Stickstofftetroxyd* hat teilweise die Salpetersäure wegen seines günstigeren Korrosionsverhaltens verdrängt und sich für Überschall- und Hyperschall-Flugkörper eingebürgert, doch hängt seine Zukunft ebenfalls vom allgemeinen Schicksal der unbemannten Flugkörper ab.

18. *Fluor* mit seiner extremen Verbrennungswärme wird für langsame Raumfahrzeuge studiert.

19. *Chlortrifluorid* wird in ähnlicher Weise wie Fluor ins Auge gefaßt.

Die nächste Gruppe der Atomtreibstoffe ist der technischen Anwendung erst teilweise erschlossen, doch scheint ihre Bedeutung sowohl für die Luftfahrt als auch für die Raumfahrt außerordentlich hoch.

20. *Fissionsstoffe* (Kernspaltstoffe), wie Uran, Plutonium usw. werden sowohl in Form stationärer Kernreaktionen in Meilern als auch explosiver Kernreaktionen in Bomben intensiv als Flugtreibstoffe bearbeitet und lassen Anwendungen größerer Ausdehnung in bemannten Unterschall- und Überschall-Flugzeugen erwarten, ausgedehnte Anwendung insbesondere in bemannten Hyperschall-Flugzeugen und bemannten langsamen und schnellen Interplanetarfahrzeugen.

21. *Fusionsstoffe* (Kernaufbaustoffe), wie Wasserstoff, Deuterium, Tritium, Lithium usw. werden besonders in Form der technisch noch nicht verfügbaren stationären Fusionsreaktion, teilweise auch in Form der technisch ebenfalls noch nicht verfügbaren, nicht durch Kernfission gezündeten explosiven Fusionsreaktion in Erwägung gezogen. Ihre voraussichtlich sehr umfangreichen, späteren Anwendungsgebiete werden besonders in bemannten langsamen und schnellen Interplanetarfahrzeugen und in Interstellarfahrzeugen gesehen.

22. *Antimaterie*, als zusammenfassendes Schlagwort für alle mehr oder weniger vollständigen Zerstrahlungsreaktionen von Materie in Energie, steht heute noch im Stadium der Grundlagenforschung und dürfte in fernerer Zukunft besonders für Interstellarfahrzeuge interessant werden.

## VI. Flugbaustoff-Industrie

Die Baustoffindustrie ist an den ersten sechs technologischen Komponenten des Gesamtaufwandes für Luftfahrt und Raumfahrt, die nach Abb. 1. zusammen etwa 70% ausmachen, sehr erheblich beteiligt. Die eigentliche Flugbaustoff-Industrie ist besonders an den Komponenten 1. Zellenindustrie, 2. Triebwerksindustrie, und 3. Flugausrüstungsindustrie, also insgesamt an etwa 30% des Gesamtaufwandes unmittelbar beteiligt.

Diese Beteiligung erstreckt sich entsprechend der außerordentlichen Vielfalt der Flugbaustoffe besonders auf die metallurgische und chemische Industrie, wobei die oft nicht sehr erheblichen Gewichtsmengen der Baustoffe in ihrem wirtschaftlichen Gewicht durch die außerordentlichen Qualitätsanforderungen ersetzt werden, und durch den hier besonders deutlichen Umstand, daß die neu

Vol.  
7  
1961

Astronaut. Acta, Vol. VII, Fasc. 2-3

entwickelten Flugbaustoffe sich oft rasch in der gesamten übrigen Technik einbürgern und dort in großen Quantitäten abgenommen werden.

Wenn in Abb. 8 versucht wird, einen Überblick über einige der wichtigsten Flugbaustoffe zu geben, und über den Umfang ihrer gegenwärtigen und vermutlichen späteren Verwendung in den einzelnen Geschwindigkeitsdomänen der Luft- und Raumfahrt, so soll damit die Vielfalt der Flugbaustoffe nur an Beispielen angedeutet werden.

1., 2. Die bekanntesten Leichtmetall-Legierungen des *Magnesiums* und *Aluminiums* finden ausgedehnte Anwendung als Baustoffe besonders für Unterschall-Flugkörper und Unterschall-Flugzeuge, während ihre breite Anwendungsmöglichkeit im Überschallflug, besonders an den äußeren Oberflächen, mit Überschreitung der Flugmachzahl von etwa 2,2 wegen der Reibungserwärmung infolge des Fahrtwindes aufhört. Im gesamten Hyperschallflugbereich spielen diese Leichtmetalle daher eine geringere Rolle, während ihre Bedeutung in den Domänen der interplanetaren Raumfahrt, wo aerodynamische Erwärmung keine dauernde Rolle mehr spielt, wieder hervortritt. An die ausgedehnte Verwendung des *Aluminiums* als Brennstoff ist in diesem Zusammenhang noch besonders zu erinnern.

3. *Titan-Legierungen* mit etwas höherer Warmfestigkeit versuchen sich besonders in den Bereichen der Überschall- und Hyperschall-Fluggeräte einzubürgern und dort die Mg- und Al-Legierungen abzulösen, doch bilden hoher Preis und Verarbeitungsschwierigkeiten noch gewisse Hindernisse.

4. *Kupfer und seine Legierungen* finden besonders in der elektrischen Ausrüstung im Gesamtbereich der Luftfahrt und der Raumfahrt Anwendung.

5. *Nickel und seine Legierungen*, mit einerseits hoher Wärmeleitfähigkeit des reinen Metalls, andererseits hoher Warmfestigkeit und Zunderbeständigkeit der Legierungen findet überwiegend für Flugtriebwerke bei hoher Wärmebeanspruchung Anwendung größerer Ausdehnung, für die Triebwerke des Hyperschallfluges und der langsamen interplanetaren Raumfahrt voraussichtlich in Zukunft sogar ausgedehnte Anwendung, ebenso wie für die Zellen des Hyperschallfluges. Besonders die fahrtwindberührten Außenhäute der Hyperschall-Flugzeuge und die feuer gasberührten Wände der Flüssigkeitsraketen sind Anwendungsbereiche von Nickel und seiner Legierungen.

6. *Sonstige Legierungen*, etwa mit Molybdän, Wolfram, Niobium, Kobalt usw. werden in Fällen besonders hoher thermischer Beanspruchungen in geeigneten Sonderfällen in geringem bis ausgedehnterem Umfang angewendet.

7., 8. *Warmfeste bzw. hochfeste Stähle* treten im Bereich des schnelleren Überschallfluges und des Hyperschallfluges weitgehend an die Stelle der Leichtmetalle für tragende und der aerodynamischen Erwärmung ausgesetzte Bauteile, werden allerdings bei den langdauernden thermischen Beanspruchungen des bemannten Hyperschallfluges sogar durch Nickellegierungen ersetzt.

9. *Graphit* mit seinem hohen Schmelzpunkt findet für bestimmte Triebwerksteile höchster Wärmebeanspruchung gewisse Anwendung.

10. *Glasfaser* findet besonders in Verbindung mit Kunststoffen, in Form der glasfaserverstärkten Kunststoffe zunehmende Verwendung für tragende Bauteile besonders in Feststoff-Raketentriebwerken und für Bauteile unter äußersten Wärmebeanspruchungen, z. B. den Köpfen von Wiedereintauchkörpern und für Wände im Düsenhals der Feststoffraketen, also besonders für unbemannte Überschall- und Hyperschall-Flugkörper.

11. *Kunststoffe* beschränken sich nicht auf die ebengenannte Verwendung und auf die früher erwähnte Anwendung als Brennstoffe in Feststoffraketen, sondern werden darüber hinaus für die Innenausstattung im gesamten Bereich der Luftfahrt und Raumfahrt in größerem Umfange benützt.



12. *Keramische Baustoffe* schließlich als Metalloxyde, Metallkarbide, Metallnitride, Metallkeramiken usw. finden wegen ihrer sehr hohen Schmelzpunkte gewisse Anwendung für höchstwärmebeanspruchte Bauteile der Zellen und besonders der Triebwerke.

## VII. Gedanken zu einem europäischen Raumfahrtprogramm

In den europäischen Industrieländern liegt der Aufwand für Luftfahrt und Raumfahrt im Durchschnitt nur etwa halb so hoch wie in USA und UdSSR, d. h. er beträgt, wie gesagt, nur etwa 5% des nationalen Arbeitspotentials, wobei Raumfahrt bisher keine merkbare Rolle gespielt hat. In der Erkenntnis, daß dieser Zustand eine schwere kulturelle, politische und wirtschaftliche Gefahr für Europa bedeutet, werden nun wachsende Anstrengungen zu seiner Verbesserung unternommen, in einer Richtung, die sich etwa folgendermaßen abzeichnet:

Da Europa auch in diesem Zusammenhang noch nicht als Einheit zu wirken in der Lage ist, bewegen sich die Anstrengungen vorerst noch auf nationalen Ebenen.

Ein typisches europäisches Industrieland von etwa 50 Millionen Einwohnern leistet jährlich etwa 50 Milliarden Arbeitsstunden. Mit gewisser Annäherung wird man zur Umrechnung auf nationale Verhältnisse die Arbeitsstunde gegenwärtig zu etwa 2 US-Dollar oder 3 Deutsche Mark oder 4 französische Franken zählen dürfen. Unter der Annahme, daß der Aufwand für Luftfahrt- und Raumfahrt auch in den nächsten Jahren nicht über ungefähr 5%, als 2,5 Milliarden Arbeitsstunden steigen wird, ergeben sich die in Abb. 9 dargestellten Leistungsanteile der einzelnen Industriekategorien, wenn man den Aufteilungsschlüssel der Abb. 1 zugrunde legt.

Dabei ist zu bemerken, daß der Aufwand im größten europäischen Industrieland, der Deutschen Bundesrepublik, derzeit nur etwa halb so hoch ist, und daß davon wieder etwa die Hälfte — infolge der notwendigen Ankäufe im Ausland — in der Bundesrepublik auf luftfahrtfremden Gebieten geleistet wird, so daß die Bundesrepublik in diesem Sinne noch nicht als typisches europäisches Industrieland bezeichnet werden kann.

Die in Abb. 9 dargestellte Leistung entspricht der dauernden Beschäftigung von etwa 1250000 Menschen, wovon etwa die Hälfte den eigentlichen flugtechnischen Kategorien 1. bis 4., Zellenindustrie, Triebwerksindustrie, Ausrüstungsindustrie und Treibstoffindustrie, angehört.

Diese flugtechnische Hälfte von 1,25 Milliarden Arbeitsstunden zerfällt erfahrungsgemäß nach der Darstellung Abb. 10 zu etwa

- 10% auf Forschung,
- 40% auf Entwicklung und Erprobung und
- 50% auf Serienproduktion.

Für die beiden technisch führenden großen Industrieländer der Erde, USA und UdSSR, darf man gegenwärtig annehmen, daß im Bereich der Produktion und Anwendung noch etwa 80% des flugtechnischen Aufwandes auf Luftfahrtgeräte und nur 20% auf Raumfahrtgeräte entfallen, daß im Bereich der technischen Entwicklung sich beide Gebiete etwa die Waage halten und daß im Bereich der Forschung gegenwärtig schon 80% für Raumfahrt und nur mehr 20% für Luftfahrt ausgegeben werden. Diese Verhältnisse verschieben sich in Zukunft gemäß Abb. 3 weiterhin zugunsten der Raumfahrt und werden sich auch in den europäischen Ländern ähnlich gestalten müssen.

Vor diesem Hintergrund der durch materielle Mittel ausdrückbaren und zur Verfügung gestellten Arbeitskapazität kann man nun versuchen, ein europäisches flugtechnisches Programm zu sehen.

Alle bisherigen Raumfahrterfolge gehen im wesentlichen auf eine Weiterentwicklung der ballistischen Geschosse zurück, wie sie in den Grundzügen von HERMANN OBERTH entworfen und von VON BRAUN, DORNBERGER usw. erstmals in die Technik umgesetzt wurde. Der an sich natürlichere und wirtschaftlichere Weg einer Weiterentwicklung der Flugzeuge bis zu den Raumfahrtgeschwindigkeiten ist bisher nur sehr zögernd besritten worden und wird technisch in den nächsten Jahrzehnten in die bisherige Raumfahrttechnik einmünden und diese mit dem Übergang zu bemannten Geräten weitgehend ersetzen.

Ein typisches europäisches Industrieland von 50 Millionen Einwohnern leistet jährlich rund 50 Milliarden Arbeitsstunden, davon etwa 2,5 Milliarden Arbeitsstunden für Luftfahrt und Raumfahrt. Diese letzteren verteilen sich näherungsweise:

1. auf Zellenindustrie	etwa 7 %, d.h. 175 Millionen Arbeitsstunden
2. auf Triebwerksindustrie	etwa 7 %, d.h. 175 Millionen Arbeitsstunden
3. auf Ausrüstungsindustrie	etwa 16 %, d.h. 400 Millionen Arbeitsstunden
4. auf Treibstoffindustrie	etwa 20 %, d.h. 500 Millionen Arbeitsstunden
5. auf Hoch- und Tiefbau-Industrie	etwa 10 %, d.h. 250 Millionen Arbeitsstunden
6. auf allgemeine Maschinenindustrie	etwa 10 %, d.h. 250 Millionen Arbeitsstunden
7. auf direkten Personalaufwand der Luftfahrt- und Raumfahrt-Organisationen weitere	etwa 30 %, d.h. 750 Millionen Arbeitsstunden

Abb. 9. Schematisierter Arbeitsaufwand eines typischen europäischen Industrielandes für Luftfahrt und Raumfahrt

Der jährliche Gesamtaufwand für Luftfahrt und Raumfahrt eines typischen europäischen Industrielandes von etwa 2,5 Milliarden Arbeitsstunden enthält einen flugtechnischen Anteil von etwa 1,25 Milliarden Arbeitsstunden, der sich erfahrungsgemäß verteilt auf:

Forschung:	10 % oder 125 Millionen Arbeitsstunden
Entwicklung und Erprobung:	40 % oder 500 Millionen Arbeitsstunden
Serienproduktion:	50 % oder 625 Millionen Arbeitsstunden

Abb. 10. Schematisierter Aufwand für flugtechnische Forschung, Entwicklung und Produktion in einem typischen europäischen Industrieland

Man darf daher annehmen, daß eine neuentstehende europäische Raumfahrttechnik von vornherein diese Richtung nehmen wird und daß damit der stetige Übergang von bemannten Überschall-Flugzeugen über bemannte Überschall-Flugzeuge zu bemannten Raumfahrzeugen im Mittelpunkt des Interesses



stehen dürfte. Die wirtschaftliche Notwendigkeit, schon die auf viele hundert Tonnen Anfangsgewicht anwachsenden Startstufen der Raumfahrzeuge, die gegenwärtig unbemannte Hyperschall-Flugkörper darstellen und bei jeder Anwendung verloren gehen, durch bemannte Hyperschall-Flugzeuge zu ersetzen, die nach der Anwendung wieder an den Startplatz zurückkehren und geborgen werden, diese wirtschaftliche Notwendigkeit allein drängt heute schon intensiv in diese Richtung, die beispielsweise durch den Startvorgang der X-15 von ihrem Trägerflugzeug B-52 vorgezeichnet ist.

Aus dieser Generallinie einer möglichen europäischen Raumfahrtstechnik und aus den Angaben der Abb. 3 über die voraussichtliche Entwicklung der Luftfahrt- und Raumfahrt-Technik in der ganzen Welt kann man nun gewisse Empfehlungen für die flugtechnische Produktion, Entwicklung und Forschung in den nächsten zehn bis fünfzehn Jahren für Europa ableiten, die in Abb. 11 darzustellen versucht worden sind.

Die *Unterschall-Flugkörper* dürften eine geringfügige Rolle in der industriellen Produktion militärischer Geräte, aber kaum mehr in der Entwicklung und Forschung spielen.

Die *Unterschall-Flugzeuge* dagegen scheinen auch in Zukunft ein ausgedehntes Gebiet der Produktion zu bilden, in all ihren schon bekannten Versionen und auch in Form der neuentstehenden Vertikalfluggeräte und Bodeneffektfahrzeuge. Diese letzteren beiden Gerätearten werden auch in Entwicklung, Erprobung und Forschung lebhaft bearbeitet werden.

*Überschall-Flugkörper* scheinen ähnlich wie Unterschall-Flugkörper gewisses Interesse in der produzierenden Industrie für militärische Anwendungen zu finden, jedoch kaum in Entwicklung und Forschung.

*Überschall-Flugzeuge* scheinen weniger als Jagdflugzeuge und Vertikalstartgeräte, eher in Form von Verkehrsflugzeugen einige Aussichten für eine europäische Industrie in Produktion und Entwicklung und zu gewissem Grad in der Forschung zu bieten, doch werden diese Aussichten durch die sinkende Bedeutung der Jagdflugzeuge und die geringe absolute Zahl der benötigten Überschall-Verkehrsflugzeuge eingeengt.

*Hyperschall-Flugkörper*, wie Kampftraketen, meteorologische Sonden usw. können ein beschränktes Feld der Produktion bilden, während sich Entwicklung oder Forschung in dieser Domäne in Europa nicht mehr lohnen dürfte.

*Hyperschall-Flugzeuge* dagegen, als technisch nicht mehr überholbare Endstufe der Entwicklung irdischen Luftverkehrs und als bemannte und bergbare Startstufen der Raumfahrzeuge dürften in nächster Zukunft eine ausgedehnte Rolle spielen, sowohl in Produktion als auch in Entwicklung, Erprobung und Forschung. Man könnte in ihnen einen dankbaren Schwerpunkt europäischer flugtechnischer Arbeiten erblicken.

*Unbemannte, langsame Interplanetarfahrzeuge* scheinen in den vor uns liegenden Jahren in ihren mannigfaltigen Anwendungen militärischer, wirtschaftlicher und wissenschaftlicher Natur, z. B. als Raumabwehrraketen, Navigationssatelliten, Frühwarnsatelliten, Angriffssatelliten, Abwehrraketen, Erkundungssatelliten, Vermessungssatelliten, Nachrichtensatelliten, Wettersatelliten, Forschungssatelliten, Planetensonden usw. ein ausgedehntes Feld industrieller Produktion, und in geringerem Umfang auch der Entwicklung und Forschung darzustellen, wobei die erforderlichen unbemannten Startstufen als Hyperschall-Flugkörper vielleicht nur in sehr beschränktem Umfang in Europa entwickelt, aber eher nach fremden Lizenzen produziert werden dürften.

*Bemannte, langsame Interplanetarfahrzeuge* dürften neben den Hyperschall-Flugzeugen einen zweiten Schwerpunkt europäischer Flugtechnik bilden müssen,

Interstellare Raumfahrt	(12) Bemannte interstellare Raumfahrzeuge					Triebwerkstheorie Materie-Energie-Trans- stationäre Kernfusion Animaletheorie Relativitätstheorie Feldtheorien Festkörperphysik Plasmaschwingung extr. Materiezust. Waffenstrahlen Reine Fusionsraketen Reine Photonenraketen interstellare Navigation Milchstrassensystem
	(11) Unbemannte interstellare Raumfahrzeuge					
schnelle interplane- tare Raumfahrt	(10) Bemannte schnelle inter- planetare Raumfahrzeuge					Kernphysik Therm. Kernreaktionen Kerntreibstoffe Heiswasser-Fissionar. photon. Fissionsrakete Reine Fissionsrakete photon. Fusionsrakete interplanetare Navigat. Sonnensystem
	(9) Unbemannte schnelle inter- planetare Raumfahrzeuge					
langsame interplane- tare Raumfahrt	(8) Bemannte langsame inter- planetare Raumfahrzeuge		Raumfahren Aussenstationen	Raumfahren Aussenstationen Mondfahrzeuge Mondstationen Planetenfahrzeuge		Astrophysik Himmelsmechanik Raumfahrt-Medizin Raum-Recht konvekt. Fissionsrak. Sonnennahe Planeten
	(7) Unbemannte langsame inter- planetare Raumfahrzeuge		Raumabwehr rak. Navigation-Abwehr- Angriffs-Flüßwaren- Erkundungs-Wetter- Vermessungs-Nachr- Forsch.-Satelliten Planeten Sonden	Raumabwehr rak. Satelliten		
Hyperschall-Luftfahrt	(6) Hyperschall-Flugzeuge		bemannte Startstuf. Raketen-Fernflugz.	bemannte Startstuf. Staustahl-Flugz. Raketen-Fernflugz. Verkehrsflugzeuge		Hyperschallaerodyn. Magnetohydrodynam. Thermodynamik Gernschalbbereitgung Verbrennung chem. Treibstoffe Gaskinet. Strömung Grenzfl. Physik Regel-Technik Hyperschall Baustoffe Ballistik chem. Raketen Staustahltriebwerke Geophysik
	(5) Hyperschall-Flugkörper		unbemannte Startstuf. Kampfraketen meteorolog. Sonden			
Überschall-Luftfahrt	(4) Überschall-Flugzeuge		Jagdflugzeuge Vertikalflugeräte Verkehrsflugzeuge	Atom-Turbinenstrahl. Vertikalflugeräte Verkehrsflugzeuge		Atom-Turbinenstrahlen Vertikalflugeräte Verkehrsflugzeuge
	(3) Überschall-Flugkörper		Luftabwehr Staust. Geschosse			
Unterschall-Luftfahrt	(2) Unterschall-Flugzeuge		Segelflugzeuge Sportflugzeuge Transport-Flugzeug Verkehrs-Flugzeuge Vertikalflugeräte Bodeneffekt-Fahrz.	Vertikalflugeräte Bodeneffekt-Fahrz.		Vertikalflugeräte Bodeneffekt-Fahrz.
	(1) Unterschall-Flugkörper		aerod. Flugkörper Panzerabwehr rak.			
		Produktion und Anwendung Beispiele	Entwicklung und Erprobung Beispiele	Forschung Beispiele		

Abb. 11. Empfehlungen für die Arbeitsgebiete flugtechnischer Produktion, Entwicklung und Forschung in der Periode 1965—1975 in Europa. (Die Höhe der schwarzen Flächen deutet die Intensität der Arbeit an, z. B. keine, geringfügige, lebhaft, ausgedehnte)

besonders als Raumfähren zwischen Erdoberfläche und Außenstationen, als bemannte Erdaußenstationen selbst, als Mondfahrzeuge, bemannte Mondstationen, Planetenfahrzeuge usw., und zwar in ausgedehntem Umfang in Forschung und Entwicklung, während ihre Produktion erst im Laufe des ins Auge gefaßten Zeitraumes einsetzen wird.

Noch vor wenigen Jahren wäre es lächerlich erschienen, bemannte Interplanetarfahrzeuge als Gegenstände industrieller Produktion zu betrachten, heute müssen wir uns mit der Tatsache abfinden, daß man in Europa gezwungen ist, sich diesen Industriezweigen zuzuwenden, um die industrielle Gesamtwettbewerbsfähigkeit und die kulturelle und politische Stellung dieses Kontinentes mühsam aufrechtzuerhalten, daß aber für Europa kaum mehr Hoffnung besteht, in dieser Domäne eine technische Führungsstellung zu erringen gegenüber den gewaltigen Anstrengungen der UdSSR und der USA auf diesem Gebiet.

Gerade wegen dieser Konzentration der USA und UdSSR auf die bemannte langsame Raumfahrt erscheint es aber denkbar, daß bei rechtzeitigem lebhaftem Einsatz der Forschung in den Domänen der *schnellen Interplanetarfahrzeuge* und der *Interstellarfahrzeuge* in einem späteren Zeitraum auch eine europäische Führungsstellung wieder zu erringen sein könnte.

Das in Abb. 11 dargestellte flugtechnische Programm kann sich auf einen ganzen Kontinent wie Europa beziehen, keinesfalls aber auf ein einzelnes seiner großen Industrieländer, wie die einfache Gegenüberstellung des jährlich verfügbaren flugtechnischen Forschungs- und Entwicklungspotentials eines solchen Landes von etwa 625 Millionen Arbeitsstunden mit den Kosten einer einzigen Großentwicklung, etwa eines Überschall-Verkehrsflugzeuges, eines Hyperschall-Flugzeuges, einer bemannten Raumstation, eines bemannten Mondfahrzeuges usw. von der Größenordnung 200 Millionen jährlicher Arbeitsstunden durch beispielsweise 5 bis 10 Jahre zeigt.

Es wird sich jeder der europäischen Industriestaaten auf nur ein oder das andere dieser Großprojekte beschränken müssen, um daneben eine größere Zahl kleinerer Entwicklungen noch im nationalen Rahmen durchführen zu können.

Es wird aber keiner der europäischen industriellen Großräume auf die Teilnahme an diesen Arbeiten ganz verzichten können, wenn er nicht in wenigen Jahrzehnten auf den Stand eines technisch unterentwickelten Landes mit allen seinen sozialen Konsequenzen zurücksinken will.

(Vorgetragen vor der Industrie- und Handelskammer Braunschweig, 6. Februar 1961.)

## Status Report on the Saturn Space Carrier Vehicle and Its Potential Applications

By

**Wernher von Braun<sup>1</sup>**

(With 14 Figures)

(Received February 10, 1961)

In August, 1960, I spoke to the 11th Annual Convention of the International Astronautical Congress in Stockholm, Sweden, on the subject of the United States' space carrier vehicle program. My paper included a first interim report on a series of captive firing tests of the first stage of Saturn, the United States' largest and most ambitious space carrier vehicle. The tests were conducted from April to June of last year at the National Aeronautics and Space Administration's George C. Marshall Space Flight Center at Huntsville, Alabama. The level of thrust produced by the Saturn's first stage was approximately 1,300,000 pounds. In the meantime, many more captive firing tests were conducted and I can now report that whatever minor difficulties we encountered were soon overcome. All our more recent tests were completely successful.

The tests held last year were primarily to establish the basic feasibility of clustering large, liquid-propelled rocket engines. Ultimately, the thrust of each of the eight engines of the first stage will be increased from the present 165,000 to 188,000 pounds, producing a total of 1,504,000 pounds.

After the first series of tests, which ended in June 1960, a number of changes were incorporated in order to bring the first rather crude test configuration as close as possible to the configuration of the actual flight vehicle. With these modifications, a second series of eight captive firings was initiated late last year. These new series of captive firings will also pave the way for full-thrust runs and finally for the launching of the first Saturn flight vehicle later this year.

All modifications of the first stage configuration between the two test series were carried out while the Saturn booster was suspended in its 177-foot captive test tower at Huntsville. The eight engines used in the first series of tests have been exchanged. The new set of engines features certain improvements and is also calibrated more precisely in the interest of uniformity of performance. The level of thrust remained at 165,000 pounds each, however, because the engine contractor has not yet completed his extensive certification program for the 188-pound thrust rating.

In the present second series of tests, unlike the first one, the exhaust from the engines' turbines is fed through heat exchangers, wherein a small tapped-off portion of the liquid oxygen flow is converted to gaseous oxygen. The gaseous

<sup>1</sup> Director, George C. Marshall Space Flight Center, National Aeronautics and Space Administration, Huntsville, Alabama, U.S.A.

oxygen exiting from the eight heat exchangers is then piped into a manifold system at the top of the booster, furnishing equal pressure to all five liquid oxygen tanks.

Most of the changes incorporated after the first test series involve the shrouding and heat shielding on the booster's tail area. During the initial series, the entire engine area was left unshrouded for accessibility and visibility of all parts and in order to simplify the water deluge system provided for possible obstinate post-test fires. For free flights, however, the combined effects of external air flow and jet-ballooning at high altitudes require a carefully designed system of shrouds and heat shields. The main heat shield (mainly for heat radiation) is located at the level of the throats of the engines, and a separate flame shield (to prevent backflow) is mounted in the diamond-shaped area between the nozzles of the four inboard engines. In addition, in accordance with established aircraft practice, a fire wall has been installed just below the base of the fuel and oxidizer tanks to protect these tanks in case of an accidental fire in the engine compartment.

A large shroud surrounds and encases the entire engine assembly. The shroud attaches to the tank section and extends down to somewhat below the level of the heat shield. Thus, the engine nozzles protrude slightly beneath the shrouding.

Parallel with progress made at the Marshall Center proper on the Saturn's first stage, work by our contractors on the upper stages, ground support equipment, and the first Saturn launch complex in Florida is proceeding rapidly.

Because the Saturn first stage is 82 feet long, 21-1/2 feet in diameter—too large for conventional shipment by rail, highway or air—we had to develop a special means of transporting it from the development site at Huntsville to the launching site at Cape Canaveral, Florida. To meet this transportation requirement we now have a unique barge in our docks on the Tennessee River near Huntsville. We call this rocket ship transporter Palaemon, for the Greek sea-god who was a protector of ships.

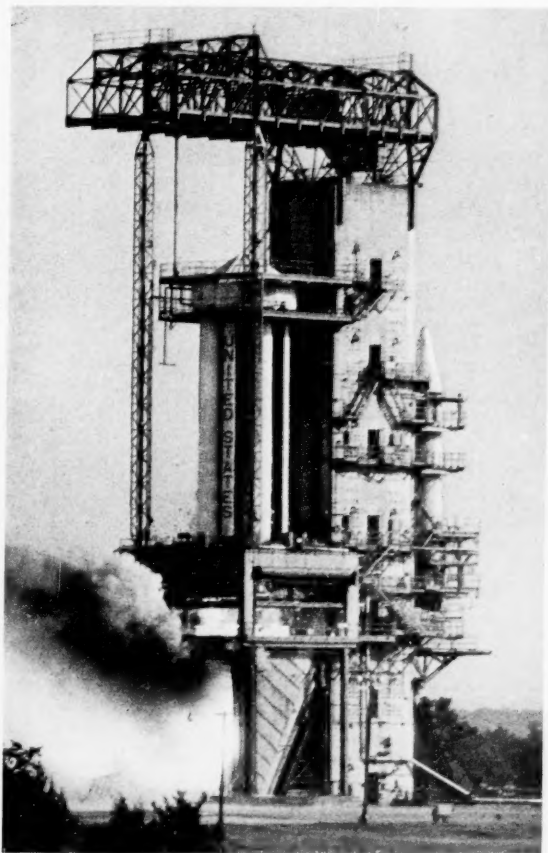


Fig. 1. Saturn vehicle SA-1 produces 1,300,000 pounds of thrust during a static test of all eight engines

Palaemon incorporates characteristics of both river and ocean barges. The Huntsville-Canaveral route is about 2200 miles long and will require about 18 days of travel. The river tug used on inland waters will be exchanged for a sea-going tug at the mouth of the Mississippi River. Our barge has a ballast system which provides stability under the various conditions of both river and sea travel.

On board, the Saturn first stage will be protected by an enclosed compartment 118 feet long, 30 feet wide and 32 feet high. This "house", completely



Fig. 2. Saturn H-1 engines are checked prior to shipment to the George C. Marshall Space Flight Center

above deck, will be sealed in transit while a closely controlled atmosphere for the protection of the complicated mechanism of the rocket will be maintained by the use of special coverings and breathing devices.

The upper stages of the vehicle, after static checkout at the manufacturer's plant, will at first be transported to Florida by ocean freighter. As the Saturn program gets into high gear, we may replace water transportation by airlift.

The last earthbound stop for Saturn is its launch complex at Cape Canaveral. The vehicle's stages will be towed, by road, on their individual transporters from the ship docks to the launch pad.



In addition to the launch pad, the Saturn launch complex now under construction will include a blockhouse, a self-propelled service structure, an umbilical

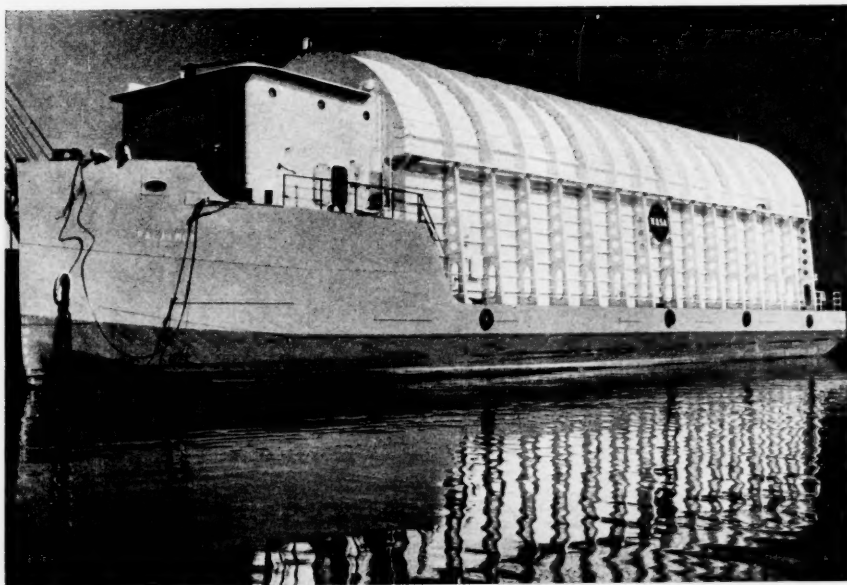


Fig. 3. The ocean-going barge Palaemon was especially designed to transport the Saturn first stage from its assembly site to the launching pad

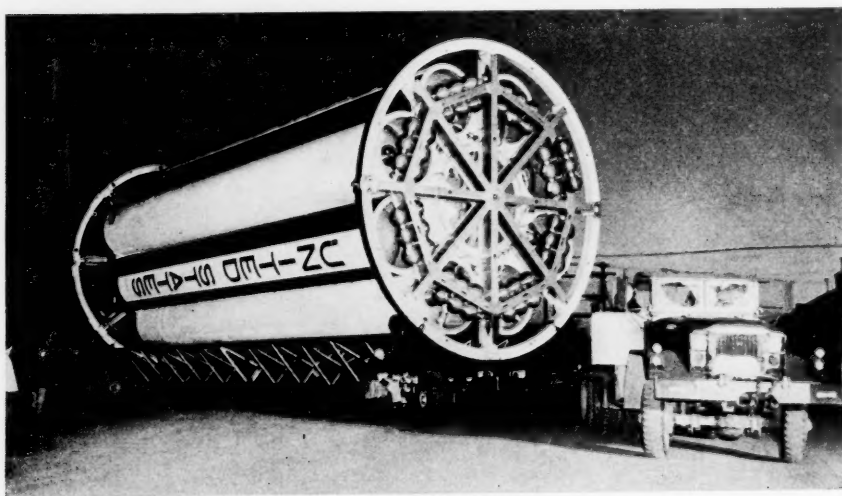


Fig. 4. Saturn first stage is moved to the static test stand on its special transporter. Notice that the wheels are individually steerable by drivers riding on outriggers attached to the aircraft-type wheel chassis

tower, and operations support facilities such as two 60,000-gallon kerosene storage tanks and pumping system and a 125,000-gallon liquid oxidizer storage

tank and transfer system. Liquid hydrogen storage facilities will be added in time for two-stage launchings.

The heart of operations during the checkout and launching will be the blockhouse, a concrete, igloo-type building with a dome 12-1/2 feet thick for the protection of personnel and instrumentation during firings.

The 310-foot mobile service stand is mounted on rails and will be used to erect, assemble and check out all stages of the vehicle directly on the launch



Fig. 5 The Saturn blockhouse and service structure are nearing completion at the launch complex in Cape Canaveral, Florida

platform. The service structure, engineered to withstand hurricane winds as high as 120 miles per hour, will be a completely self-supporting unit containing its own power station, heating and air conditioning, rapid escape facilities, fire fighting equipment, three elevators and five movable platforms that enable the launch crew to service the Saturn at different levels. The structure is capable of moving at the speed of 40 feet per minute on its own wheels and power.

Once the Saturn vehicle has been erected, serviced, and is ready for pre-launching operations (last minute preparations for firing), the service stand will be rolled back on its four, 12-wheel carriages riding on railroad tracks. The structure will be parked 600-feet from the launch pad, insuring safety from normal blastoff effects.

Operations just prior to launch, such as propellant loading and replenishing, charging of pneumatic storage bottles, and supply of ground electric power will be accomplished with the aid of another tall structure — the 245-foot umbilical tower. Pivoted arms on the tower support the feeder lines which supply



electric and pneumatic energy to the vehicle and allow return of measuring and monitoring signals until takeoff. As the vehicle begins to lift off the pad, the umbilical tower arm couplings automatically disconnect from the various stages and swing horizontally to provide clearance for the rising vehicle.

We plan to launch 10 research-and-development Saturn vehicles during the next three and a half years. The first stage, with dummy upper stages, is scheduled

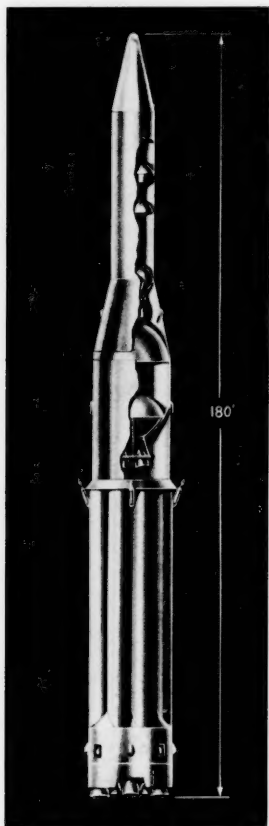


Fig. 6. This cutaway view of the Saturn C-1 configuration shows the interior arrangement of upper stages

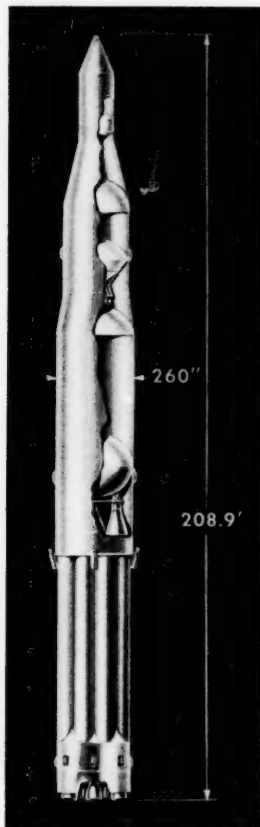


Fig. 7. This cutaway view of the Saturn C-2 configuration shows the interior details of upper stages

to be launched this year. In 1962, we have scheduled three similar firings; in 1963 five firings, with one additional firing early in 1964. Later in 1964 we plan to launch our first "fully operational" Saturn C-1 vehicle,—which means by then we hope to have demonstrated Saturn's reliability to the point that people will be ready to entrust it with valuable scientific payloads.

The long-range Saturn program calls for several possible configurations, each one a logical follow-on to the previous version. The Saturn C-1 is a vehicle consisting of the following:

1. A first stage "booster", developed at the Marshall Space Flight Center and powered by a cluster of eight rather conventional, kerosene-liquid oxygen

rocket engines. Built by Rocketdyne, each of these engines develops 188,000 pounds of thrust; thus the booster has an overall thrust of about 1,500,000 pounds—the equivalent to 32 million horsepower.

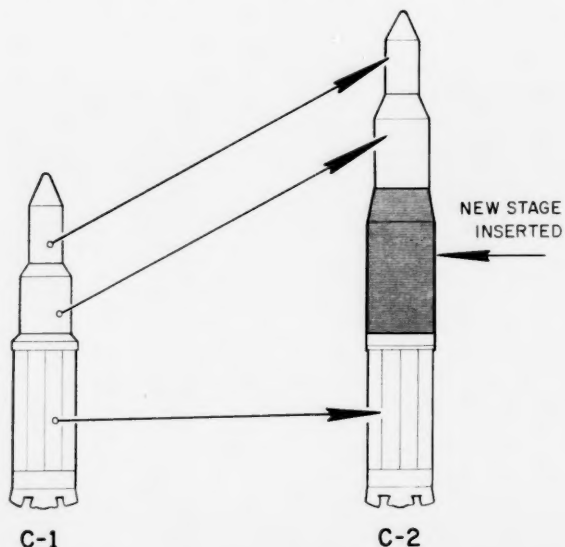


Fig. 8. Development of Saturn C-2 configuration from the C-1 configuration uses the building block concept

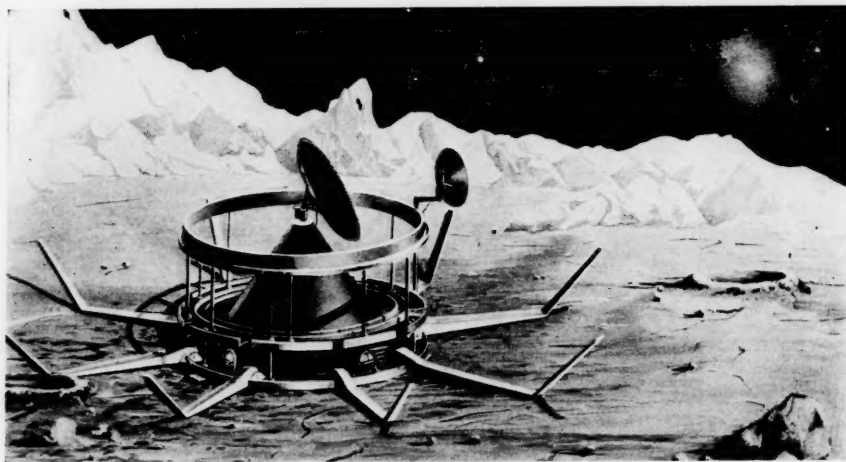


Fig. 9. An artist's concept shows a stationary packet soft-landed on the lunar surface by a Saturn vehicle

2. A second stage, powered by four liquid-hydrogen-liquid-oxygen engines of 17,500 pounds thrust each, developed by Pratt & Whitney. A contract for the development of the second stage proper has been let with Douglas Aircraft Company.

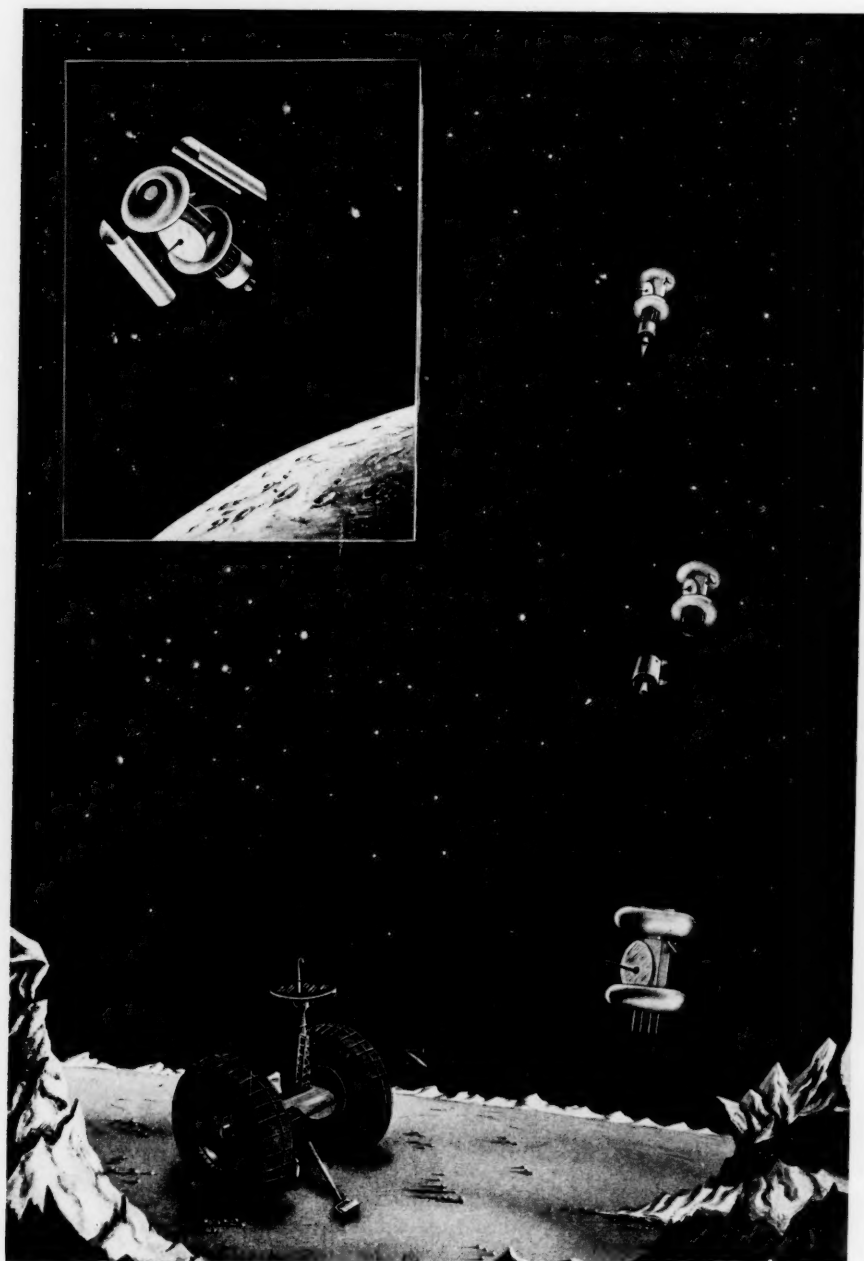


Fig. 10. The soft-landing of a roving vehicle on the lunar surface is one application of the Saturn's payload capability in space exploration

Vol.  
7  
1961

3. A third stage is powered by two liquid-hydrogen-fueled engines identical to those in the second stage. The third stage contractor is Convair Division of General Dynamics Corporation.

For satellite missions, this C-1 configuration will place payloads of about 19,000 pounds in 300-mile earth orbits.

A later Saturn configuration which we call Saturn C-2 employs the same first stage, but it will use a new second stage powered by four engines of 200,000

pounds thrust each; this engine, presently under development at Rocketdyne, will also burn liquid hydrogen. An additional third stage, the same used as second stage in the C-1 configuration, will be used. This C-2 configuration will make possible the orbiting of payloads of 45,000 pounds. It will also be capable of transporting several men around the Moon and back to Earth or of placing a sizable load of instruments on Mars or Venus.

Although we are yet to pass the hurdles of test flights, the Saturn C-1, C-2 and subsequent configurations offer great promise of application to many of our most ambitious space missions. After 1964 or so, our first hopes for Saturn are based upon the following applications:

1. To make "parabolic speed" re-entry tests of the unmanned Apollo spacecraft (a three-man, advanced version of the Mercury concept which will eventually be used as part of manned circumlunar flights). The Saturn C-1 payload capability for this rather demanding flight profile is about three and a half tons.

2. To make low-orbit qualification tests of the Apollo spacecraft; the payload of the C-1 for this flight mission is about 10 tons, for the C-2 it is more than twice that much.

3. To soft-land stationary and roving automatic observation stations on the Moon, thereby studying, electronically at least, the surface features and physical characteristics of the Moon.

4. To send a crew of two or three men around the Moon to study at first hand the far side of the Moon. The crew will, of course, experience the environment enroute which has previously been explored with unmanned automatic rockets. And their spacecraft will have ample opportunity to demonstrate its skill in the difficult art of precise space navigation.

5. To send planetary satellites to Mars and Venus.

6. To launch deep-space probes to the outer planetary system and to the close vicinity of the Sun.

In addition, we are studying Saturn's capabilities for accomplishing countless other missions such as large communication satellites, heavy orbiting astronomical observatories and geodetic laboratories, and finally, as a boost system for nuclear rocket propulsion tests or for manned, winged, space vehicles.

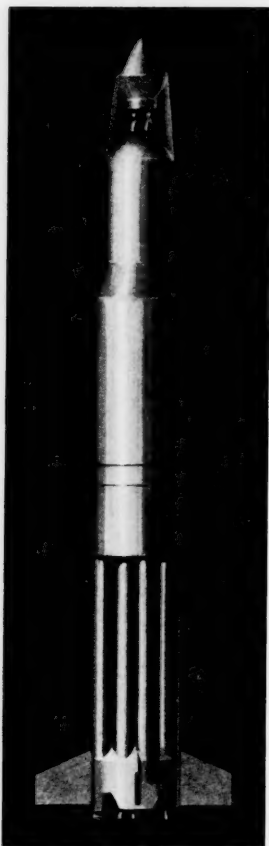


Fig. 11. This artist's concept illustrates the proposed adaptation of the Saturn vehicle for Project Apollo, a three-manned, circumlunar flight now under study

Communications satellites, suspended permanently above certain points of the Earth's equator in a geostationary, 24-hour orbit will permit man to

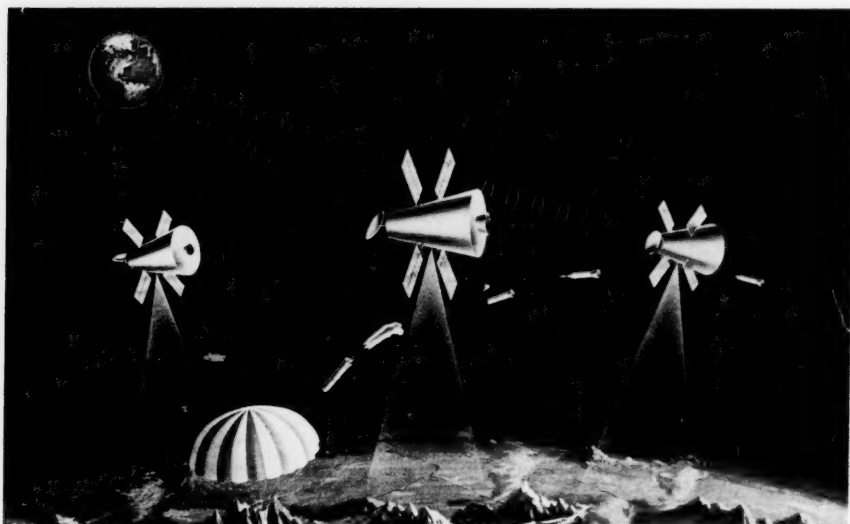


Fig. 12. This planetary probe is a possibility for one design capable of being orbited by the Saturn. Note that an instrument container is ejected from the orbiting probe and parachuting toward the surface of the planet

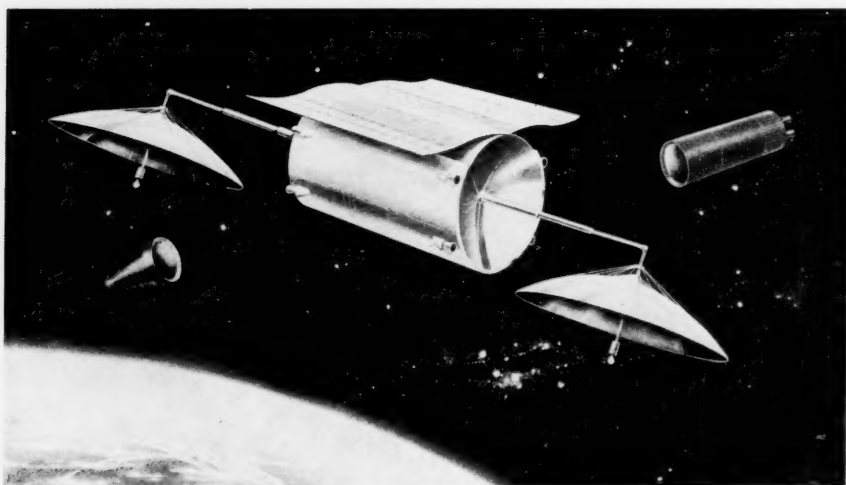


Fig. 13. An artist's concept shows a 24-hour communications satellite that could be orbited by the Saturn C-2 vehicle

set up a global network of television, radio, and telephone, thereby connecting any two points on earth in all kinds of weather.

A fleet of communications relay satellites, traveling through lower and faster orbits than the stationary 24-hour orbit, could easily and quickly handle the total mail and telephone volume of Earth. Whenever one of these satellites

happens to be in line of sight of, say, Boston, it will also be visible from Paris. So it could serve as an active repeater for a telephone call a man in Montpelier, Vermont, may want to place with a business friend living in Lucerne, Switzerland. Over the relatively short stretches from Montpelier to Boston and from Paris to Lucerne his call would travel by wire. The transatlantic leg would be handled by radio via whatever satellite repeater happens to be crossing the Atlantic at the time.

But maybe the most important application Saturn will find is as a multi-purpose "orbital utility truck". Even without stage recovery, a 2-stage Saturn,

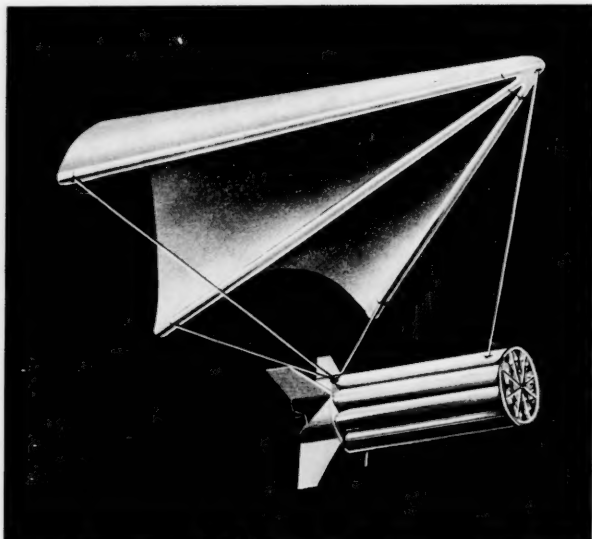


Fig. 14. One proposal for recovery of the Saturn first stage consists of a huge, bat-like, textile wing which unfolds to form a combination parachute and glider

consisting of the 8-engine, kerosene-powered first stage and the 4-engine, hydrogen-powered second stage of the C-2 configuration can haul one pound of net payload into orbit for \$500, which is an unprecedented low rate. With "paraglide" stage recovery, which we consider a definite possibility, we hope to be able to lower this price further to about \$300 per pound. We are also very actively engaged in a project aimed at demonstrating the feasibility of "orbital rendezvous" and "orbital docking" between two orbiting space vehicles. Once this capability has been developed—and I have no doubt that it will in the next few years—several Saturns can haul enough propellant into a low orbit around the earth to refuel its own top stage thus enabling it to carry an Apollo spacecraft with a crew of three men to the surface of the Moon and back to Earth.

From the outset, the long range objective of the NASA space program has been the manned exploration of the Moon and the planets of our Solar System. Undoubtedly, to meet all requirements of this ambitious goal will, in time, call for vehicles more powerful and more advanced than Saturn. But Saturn offers the important advantage that it is based on a technology which we understand today. Thus it promises to become the reliable work-horse for the U. S. space program during the critical years ahead.

# United States Space Carrier Vehicle and Spacecraft Developments

By

Frederick I. Ordway, III<sup>1, 3</sup>, and B. Spencer Isbell<sup>2, 3</sup>

(With 13 Figures)

(Received February 10, 1961)

## Abstract — Zusammenfassung — Résumé

**United States Space Carrier Vehicle and Spacecraft Developments.** A review is given of major U.S. space achievements during 1960, with brief discussions of selected launchings. Planned space objectives are then listed, following which tables and descriptive data on carrier vehicles and their firing histories are given. Carriers are divided into four basic categories. A review is presented of advanced spacecraft developments, including orbiting astronomical, geophysical, and solar observatories and the Ranger, Surveyor, Prospector, Mariner, and Voyager lunar and interplanetary probes.

**Die Entwicklung der Trägerraketen und Raumfahrtforschung in den U.S.A.** Es wird ein Überblick über die größeren Raumfahrts-Unternehmungen der U.S.A. während des Jahres 1960 gegeben. Daran schließt sich eine Darstellung der in Planung stehenden Projekte und der letzten Entwicklung der Trägerraketen.

**Le développement des lanceurs et des véhicules spatiaux aux Etats-Unis.** On donne une revue des principales réalisations américaines en 1960, accompagnée d'une brève discussion de lancements choisis. Les projets en cours sont énumérés avec des données descriptives et historiques. Enfin certains développements futurs de caractère avancé sont passés en revue.

## I. Introduction

Steady and solid progress was made by the United States during 1960 along a broad front in space science and space technology. The United States space program consists of a two-pronged effort directed by the Department of Defense and the National Aeronautics and Space Administration (NASA). Artificial satellites were launched with increasing frequency, and new knowledge and techniques were evolved as these vehicles successfully carried out their missions. The year marked the beginning of a trend towards the utilization of carrier vehicles created specifically for space operations, the intention being eventually to phase out carriers based on ballistic missiles conceived originally for surface-to-surface use on Earth.

Lacking rocket-powered vehicles with very high thrust, the United States inaugurated its space exploration program with relatively lightweight payload carriers.

<sup>1</sup> AGU, ARS, FBIS, FAAAS, AAstronomicalS.

<sup>2</sup> ARS, FBIS, AAAS, FAAstronauticalS.

<sup>3</sup> Space Systems Information Branch, George C. Marshall Space Flight Center, National Aeronautics and Space Administration, Huntsville, Alabama, U.S.A.



Limitations in net orbital payload lifting capabilities of early carriers dictated that a concentrated effort be made to develop the art of payload miniaturization, and restricted early probings largely to the exploration of space radiations, gravitational and magnetic fields, energetic particle distribution and dynamics, extreme altitude atmospheric phenomena, and the general environment of outer space.

It is obvious that any sound program for the exploration of interplanetary space by both unmanned and manned space vehicles requires accurate knowledge of the space environment and the interactions of space phenomena with planetary and satellite bodies. As such knowledge is accumulated, it will become possible for vehicles to be developed capable of travelling throughout the solar system. Progress to date permits the United States to build up a secure base from which its vast and ambitious space flight programs evolve.

The successful launching in 1959 of such satellites as Explorers 6 and 7 contributed immeasurably to man's knowledge of radiations, micrometeorites, and outer space phenomena and paved the way for a series of significant achievements in 1960. The 94.8-lb Pioneer 5 deep-space probe gave highly satisfactory performance during its trip towards the orbit of Venus, and it maintained radio contact with Earth for a distance of 22,500,000 miles. It provided nearly 400 hours of scientific information and proved that a 5,000,000-amp ring current exists some 40,000 miles from Earth, that the Earth's magnetic field extends out to 65,000 miles and is influenced by solar flares, and that there is an interplanetary magnetic field.

Artificial satellite technology advanced rapidly during the year. In early August a capsule ejected from a satellite was recovered from space for the first time, assuredly a significant milestone in space history. The performance of this satellite, the Discoverer 13 launched by a U.S. Air Force Thor Agena A, was repeated in subsequent Discoverers and their capsules were recovered by air and sea forces in the Pacific Ocean. Meanwhile, the U.S. Navy's Transit 1 B and 2 A navigational satellites were highly successful and demonstrated the feasibility of satellites as reliable means of navigation. NASA's Explorer 8 increased man's knowledge of the positive ion and electron composition of the ionosphere and Greb 1 (Sunray 1) made valuable measurements of solar radiations.

The first steps to revolutionary weather forecasting were taken with the Tiros 1 meteorological satellite, which took thousands of cloud-cover pictures as it circled the Earth at an altitude of approximately 450 miles. This achievement was followed by the successful orbiting of Tiros 2, whose data have been shared with meteorologists all over the world. Communications history was made with the 100-ft diameter Echo 1 satellite balloon which served as a passive relay for voice and continuous-wave signals, as it orbited at 1,000 mile altitudes. Less than two months later the Courier 1 B active, delayed-repeater communications satellite was established in orbit.

These and other achievements, spectacular as they may seem, especially when it is considered that the carrier vehicles were required to do a job for which there was little or no margin for error and no payload weight to spare, do not give a complete picture of the developments and progress being made by the United States space program. Underlying these easily recognizable exhibits of progress are the less apparent but much more significant strides forward in the areas of basic scientific and technological research and in the space vehicle and spacecraft developmental projects yet to be headlined by the popular press.

Before describing the carrier vehicles planned for current space projects, a brief resume of program highlights projected for the next decade will provide an insight into the broad objectives and extensive involvement of nearly all of the basic scientific disciplines.



The program calls for the initially-unmanned and later manned exploration of the Moon and planets with the following technologies among those receiving major attentions:

1. Development of advanced propulsion systems.
2. Analysis of deep-space phenomena (fields, particles, radiations, etc.).
3. Entry into planetary atmospheres.
4. Navigation, guidance and control of spacecraft.
5. Long-range space communication.
6. Development of space vehicle and spacecraft reliability.
7. Development of human engineering for space missions.
8. Remote landings on airless worlds.
9. Establishment of bases and transportation modes on extraterrestrial worlds.
10. Utilization of natural resources found on other worlds.

Major milestones in the projected program are:

1. Suborbital flight of an astronaut (1961).
2. Orbital flight of an astronaut (1961—62).
3. Launching of a lunar rough landing vehicle (1962).
4. Launching of deep-space probes towards orbits of Mars and Venus (1962).
5. Orbiting an astronomical observatory (1963).
6. Launching of unmanned vehicle for initial controlled landing on the Moon (1964).
7. Circumlunar probe and return of spacecraft to Earth (1964).
8. Reconnaissance of Mars and Venus by unmanned fly-by vehicles (1964).
9. Soft-landing of stationary and mobile instrumented vehicles on Moon (1965).
10. Orbiting of Mars and Venus with instrumented capsules (1965).
11. Manned circumlunar flight (1965—70).
12. Manned Earth space station (1965—70).
13. Manned landing on Moon (1968—75).
14. Unmanned Mercury and Jupiter missions (1970s).
15. Manned Mars and Venus missions (1980s).

## II. United States Space Carrier Vehicle Developments

The transition from IRBM and ICBM-based carrier vehicles of relatively limited thrust to high-thrust vehicles will be a reality when the Saturn C-1 becomes operational. In the meantime, carriers of modified military ballistic missiles will continue to carry fairly large and heavy payloads into orbit or along departure trajectories. During 1960 the United States fired 29 space carrier vehicles of this type along with four solid propellant Scouts and two Blue Scout Jrs. and other smaller, solid-powered carriers, including the Argo D 8 which carried the Nerv 1 payload to about 1300 miles altitude. Juno 1 (or Jupiter C) and Vanguard space carriers, used to launch Explorer and Vanguard satellites during 1958 and 1959, were retired from service.

### A. Small Carrier Vehicles

Table I summarizes physical and performance data on the major, small, solid-propelled space carriers in the United States, and Table II compares the larger solid Scout and Blue Scout with the obsolete, liquid-propelled Juno 1 and Vanguard space carrier. Tables III, IV, V and VI give the firing histories of Juno 1, Vanguard, Scout, and related Blue Scout vehicles, and Table VII lists typical lifting abilities of each carrier.

### B. IRBM-based Carrier Vehicles

In 1960 the United States placed great reliance on space carriers whose first stages were modified intermediate range ballistic missiles. The Jupiter was flown twice in the Juno 2 configuration, and the Thor was flown 21 times in Thor Able, Thor Agena A, Thor Agena B, Thor Delta, and Thor Epsilon (Able Star) configurations.

Table VIII provides data on these carriers and Tables IX through XIV list their accumulated firing histories. Typical lifting capabilities are summarized in Table XV.

### C. ICBM-based Carrier Vehicles

In the ICBM-based carrier vehicle category, only the Atlas was used during 1960. Six firings resulted in a single success, although by January 1961 a second Atlas-launched satellite had been placed in orbit. The Titan 2 ICBM is scheduled to be modified to carry the experimental Dyna Soar semi-orbital gliders, but lifting capabilities are not known, except that it should be able to place well over 5,000 lb into a 300-mile orbit and some 1,500 lb onto the Moon.

Table XVI summarizes facts on the Atlas family of carriers, Tables XVII, XVIII, and XIX provide the firing histories, and Table XX gives lifting capabilities.

### D. Carrier Vehicles with Greater than 1,000,000-lb Thrust First Stages

The only known carrier whose first stage is in the 1,000,000 +lb thrust category is the Saturn C 1, now in advanced development. The Saturn C 2 is a follow-

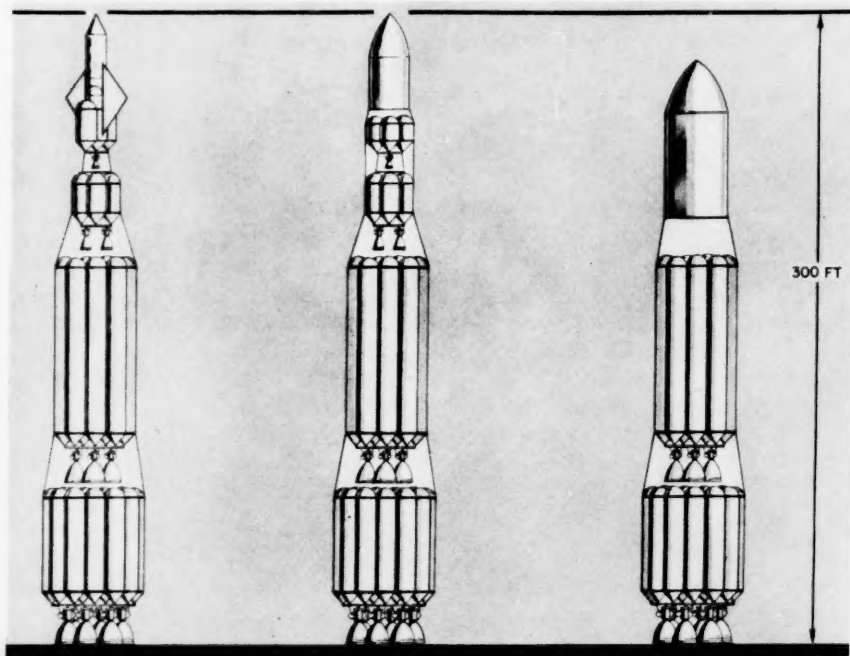


Fig. 1. Typical Nova-type Space Carrier Vehicles. Left to right: (1) Lunar landing and return vehicle, (2) Mars satellite or 24-hour Earth satellite, (3) Low Earth satellite carrier design (North American Aviation, Inc. photo).

Table I. *Small Solid Propellant Space Carriers*

	Argo Series			Aspan 300	Astrobee 500	Exos	Scout	Sergeant Delta
	E5	D4	D8					
Overall length, ft . . . . .	57.26	48.83	56.41	26.4	25.57	42.46	70.98	31.5
Diameter, in. . . . .	24	24	31	16.5	15.0	22.88	40	29
Span, ft . . . . .	8.68	8.68	11.1	5	6	8	9.33	9.4
Overall weight, lb . . . . .	7,157	7,228	13,938	1,492	1,908	5,821	36,240	11,000
Payload weight, lb . . . . .	50	60	60	20-80	40	40	50-140	200
Altitude, miles . . . . .	500	1,120	2,345	225-425	500	300	8,000- 25,000	250 (with heavy load)
Velocity, mph . . . . .	8,700	11,900	15,200	7,800	8,804	7,040	16,000	7,000
First stage thrust, lb . . . . .	82,000	82,000	117,000	42,300	35,430	90,950	112,000	130,000
Burning time, sec . . . . .	—	—	—	3	2.07	4.4	—	—
Second stage thrust, lb . . . . .	42,300	42,300	39,700	—	6,311	—	55,000	3,100
Burning time, sec . . . . .	—	—	—	12.7	30	3	—	—
Third stage thrust, lb . . . . .	42,300	42,300	39,700	n.a. <sup>1</sup>	5,710	37,600	13,600	n.a.
Burning time, sec . . . . .	—	—	—	—	6	1.6	35.6	—
Fourth stage thrust, lb . . . . .	34,873	3,040	3,040	n.a.	n.a.	n.a.	3,100	n.a.
Burning time, sec . . . . .	—	—	—	—	—	—	37	—
Fifth stage thrust, lb . . . . .	4,398	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.
Burning time, sec . . . . .	—	—	—	—	—	—	—	—

<sup>1</sup> Not applicable

Table II. *Juno I, Scout and Vanguard Carriers*

	Juno I	Scout	Blue Scout (12345 Model)	Vanguard Space Carrier
<i>Vehicle Data</i>				
Length, ft				
Overall	71.25	70.98	75	72
First stage	57.67	30.83	—	40
Second stage	13.58 (upper three stages and payload)	20.70	—	31
Third stage	—	11.17	—	5 (excl. payload)
Fourth stage	—	8.28	11.6	n.a. <sup>4</sup>
<i>Diameter, in.</i>				
First stage	70	40	40	45
Second stage	37.87 (upper stage cluster)	31	30.7	32
Third stage	—	31	30.7	18
Fourth stage	—	20	20	n.a.
Span, ft	12	9.33	9.33	n.a.
<i>Weight, lb</i>				
Overall (loaded)	64,000	36,240	>35,000	22,600
Overall (empty)	10,260	23,600	—	—
First stage loaded	62,700	23,524	—	—
First stage empty	9,600	9,600	—	—
Second stage loaded	1,020	9,475	—	—
Second stage empty	490	2,700	—	—
Third stage loaded	280	2,592	—	—
Third stage empty	140	525	—	—
Fourth stage loaded	80	649	—	50
Fourth stage empty	30	—	—	n.a.

Velocity, mph					
First stage burnout	7,200	18,000-20,000	—	—	4,200
Second stage burnout	8,800	—	—	—	9,300
Third stage burnout	12,300	—	—	—	18,400
Fourth stage burnout	17,500	18,000-20,000	—	15,000	n.a.
<i>Engine Data</i>					
First stage engine	A7				
Thrust, lb	83,000	Algol	Algol 30 ks 120000	X 405	
Propellants	Liquid oxygen a. hydyne <sup>1</sup>	112,000	112,000	28,000	
Specific impulse, sec	235	Solid	Solid	Liquid oxygen a. kerosene	
Burning time, sec	155	214	214	248	
		36	36	145	
Second stage engines	Scale Sergeant	Castor	Castor XM 33 E 5	AJ10-37	
Thrust, lb	16,500 (11 × 1,500)	60,000	60,000	7,600 *	
Propellants	Solid	Solid	Solid	IWFNA-UDMH <sup>2</sup>	
Specific impulse, sec	220	—	—	271	
Burning time, sec	6.5	27	27	115	
Third stage engines	Scale Sergeant				
Thrust, lb	4,800 (3 × 1,600)	Antares X 254	Antares X 254	GCRC Unit <sup>3</sup> (or X 248)	
Propellant	Solid	13,600	13,600	2,600 (3,100)	
Specific impulse, sec	235	Solid	Solid	Solid (solid)	
Burning time, sec	6.5	35.6	255	230 (250)	
			35.6	35 (38)	
Fourth stage engines	Scale Sergeant				
Thrust, lb	1,600	Altair X 248	Altair X 248	n.a.	
Propellant	Solid	3,100	3,100	n.a.	
Specific impulse, sec	250	Solid	Solid	n.a.	
Burning time, sec	6.5	255	255	n.a.	
		37	37	n.a.	

<sup>1</sup> Liquid oxygen and unsymmetrical dimethylhydrazine (60%) with diethylene triamine (40%)<sup>2</sup> Inhibited white fuming nitric acid and unsymmetrical dimethylhydrazine<sup>3</sup> Grand Central Rocket Company<sup>4</sup> Not applicable

Table III. *Juno 1 Firing History*

No.	Date	Remarks
1	31 Jan. 58	Orbited <i>Explorer 1</i> satellite. Orbital and payload weights, lb: 30.66 and 18.13; perigee and apogee, miles: 224 and 1,575.
2	5 Mar. 58	Failed to orbit 18.83-lb (31.36-lb orbital) satellite because fourth stage did not ignite.
3	26 Mar. 58	Orbited <i>Explorer 3</i> satellite. Orbital and payload weights, lb: 31.00 and 18.53; perigee and apogee, miles: 119 and 1,740.
4	26 Jul. 58	Orbited <i>Explorer 4</i> satellite. Orbital and payload weights, lb: 37.16 and 25.76; perigee and apogee, miles: 163 and 1,373.
5	24 Aug. 58	Failed to orbit 25.75-lb (37.16 orbital) <i>Explorer 5</i> satellite; upper stage firing angle was off because of disturbed guidance reference (booster collided with separated upper stage).
6	22 Oct. 58	Failed to orbit 18.3-lb (31.5 orbital) <i>Beacon 1</i> satellite; payload broke from the upper stage cluster.

Table IV. *Vanguard Space Carrier Firing History*

No.	Date	Remarks
(1)	(23 Oct. 57)	(Test vehicle only, with dummy second and third stages.)
2	6 Dec. 57	Full Vanguard test carrier vehicle fired; failed after two sec due to improper engine start caused by low fuel tank pressure.
3	5 Feb. 58	Veered off course after launch; broke up. Control system malfunction after 57 sec caused loss of attitude control.
4	17 Mar. 58	Launched <i>Vanguard 1</i> test satellite. (Orbital and payload weights, lb: 53.25 and 3.4; perigee and apogee, miles: 409 and 2,453.)
5	28 Apr. 58	Failed to orbit X-ray and environmental satellite because second stage shutdown sequence was not completed electrically so that coast flight control system and third stage could not function.
6	27 May 58	Failed to orbit Lyman-alpha measurement satellite because of incorrect injection angle and improper second-stage cutoff.
7	26 Jun. 58	Failed to orbit X-ray and environmental satellite because of premature second-stage cutoff (caused by restriction in oxidizer feed system).
8	26 Sep. 58	Low second-stage performance prevented orbital speed for cloud-cover satellite being reached (due to contamination in fuel system).
9	17 Feb. 59	Launched <i>Vanguard 2</i> cloud-cover satellite. (Orbital and payload weights, lb: 77.15 and 23.7; perigee and apogee, miles: 347 and 2,064.)
10	13 Apr. 59	Second-stage malfunction prevented orbiting of magnetometer satellite (engine actuator lug failed due to high side forces at first stage separation).
11	22 Jun. 59	Second-stage helium regulator malfunction prevented orbiting of radiation-balance satellite.
12	18 Sep. 59	Launched <i>Vanguard 3</i> magnetometer, X-ray and environmental satellite. (Orbital and payload weights, lb: 105 and 53; perigee and apogee, miles: 319 and 2,329.)

Table V. *Scout Firing History*

No.	Date	Altitude, Miles	Range, Miles	Remarks
Test	18 Apr. 60	30	80	Two stage test only (of previously unflown first and third stages; second stage was inert and a nose cap replaced fourth stage). Third stage did not ignite.
1	1 Jul. 60	860	1,500	Ballistic trajectory test; three stages fired. Payload weighed 193 lb. Ignition of fourth stage prevented by command signal from ground when rocket appeared to veer off course.
2	4 Oct. 60	3,500	5,800	78-lb payload carried, full vehicle firing.
3	4 Dec. 60	25	80	First Scout satellite launch attempt (Beacon, 12-foot, inflatable sphere); failed because ignition circuit did not ignite second stage. Payload weighed 87 lb, including 14-lb sphere.

Table VI. *Blue Scout Firing History*

No.	Date	Altitude, Miles	Range, Miles	Remarks
"Jr."	21 Sep. 60	16,600	7,000	32.8-lb payload carried by small, four-stage version of Blue Scout; radio transmitter malfunctioned, prevented retrieval of data.
"Jr."	8 Nov. 60		250	Failed to carry 29.4-lb payload into space because second stage did not ignite.
1	7 Jan. 61	1,000	1,200	392-lb payload carried by three-stage vehicle; 90-lb instrument capsule ejected 1,200 miles down range but not recovered.

Table VII. *Typical Small Carrier Vehicle Lifting Capabilities*

Carrier	Lifting Capability, Pounds	Vertical Altitude, Miles	Orbital Altitude, Perigee, Miles
Argo Jason E5 .....	50	500	
Argo Javelin D4 .....	60	1,000	
Argo Journeyman D8 .....	60	2,100	
Aspan 300 .....	20	400	
Astrobee 500 .....	40	540	
Juno 1 .....	30-40 50	3,000	200
Scout .....	150 30 100	4,000	300 22,300
Blue Scout Jr. ....	30	20,000	
Blue Scout .....	400	6,000	
Sergeant-Delta .....	200	250	

Table VIII

	Juno 2	Thor Able Space Carrier	Thor Agena A	Thor Agena B	Thor Delta	Thor Epsilon
<i>Vehicle Data</i>						
Length, ft						
Overall	76.67	89.5	80.91	81.42	91.67	79.3
First stage	55.24	65	61.33	55.92	65.08	60.42
Second stage	10.83	19.4	19.58	27.83	17.58	19.3
Third stage	(Upper stage cluster)	4.1	n. a.	n. a.	5	n. a.
Fourth stage		n. a.	n. a.	n. a.	n. a.	n. a.
Diameter, in.						
First stage	105	96	96	96	96	96
Second stage	37.87	33	60	60	33	55
Third stage	(Upper stage cluster)	22	n. a.	n. a.	22	n. a.
Fourth stage		n. a.	n. a.	n. a.	n. a.	n. a.
Span, ft	n. a.	14	14	n. a.	14	14
Weight, lb						
Overall (loaded)	122,000	113,900	117,000	123,000	114,700	118,635
Overall (empty)	12,000	—	8,800	9,000	—	8,190
First stage loaded	122,000	109,000	109,000	107,000	109,000	108,775
First stage empty	12,000	—	7,000	6,500	—	6,890
Second stage loaded	1,000	4,000	8,600	15,000	4,700	9,860
Second stage empty	500	—	2,000	2,500	—	1,300
Third stage loaded	300	5,500	n. a.	n. a.	550	n. a.
Third stage empty	150	—	n. a.	n. a.	—	n. a.
Fourth stage loaded	85	n. a.	n. a.	n. a.	n. a.	n. a.
Fourth stage empty	35	n. a.	n. a.	n. a.	n. a.	n. a.



Velocity, mph									
First stage burnout	—	—	18,000	18,000	—	—	—	18,000	n. a.
Second stage burnout	—	—	n. a.	n. a.	—	—	18,000—25,000	n. a.	n. a.
Third stage burnout	—	—	n. a.	n. a.	—	—	n. a.	n. a.	n. a.
Fourth stage burnout	18,000	—	—	—	—	—	—	—	—
Engine Data									
First stage engine	S3D								
Thrust, lb	150,000	MB1 (XLR79NA5)	MB3 (XLR79NA7)	MB3 (XLR79NA11)	MB3 (XLR79NA7)	MB3 (XLR79NA7)	MB3 (XLR79NA7)	MB3 (XLR79NA7)	MB3 (XLR79NA7)
Propellants	liquid oxygen and kerosene (RP1)	same	same	same	same	same	same	same	same
Specific impulse, sec	250	250	250	250	250	250	250	250	250
Burning time, sec	182	163	165	150	150	165	165	175	175
Second stage engine	Scale Sergeant	AJ10-42 (also-101A)	Hustler 8048	Hustler 8081	Hustler 8081	Hustler 8081	AJ10-118	AJ10-104	AJ10-104
Thrust, lb	16,500 ( $11 \times 1,500$ )	7,700	15,500	16,000	16,000	16,000	7,800	7,890	7,890
Propellants	Solid	IWFNA and UDMH <sup>1</sup>	IRFNA and UDMH <sup>1</sup>	IRFNA <sup>2</sup> and UDMH <sup>1</sup>	IRFNA <sup>2</sup> and UDMH <sup>1</sup>	IRFNA <sup>2</sup> and UDMH <sup>1</sup>	IWFNA and UDMH <sup>1</sup>	IRFNA and UDMH <sup>1</sup>	IRFNA and UDMH <sup>1</sup>
Specific impulse, sec	220	270	275	285	285	285	270	278	278
Burning time, sec	6.5	100	120	240	240	240	115	296	296
Third stage engine	Scale Sergeant	X248A7 (also X241)	—	—	—	—	X248A5	—	—
Thrust, lb	4,800 ( $3 \times 1,600$ )	3,100	n. a.	n. a.	n. a.	n. a.	3,100	n. a.	n. a.
Propellant	Solid	Solid	n. a.	n. a.	n. a.	n. a.	Solid	n. a.	n. a.
Specific impulse, sec	235	250	n. a.	n. a.	n. a.	n. a.	250	n. a.	n. a.
Burning time, sec	6.5	40	n. a.	n. a.	n. a.	n. a.	40	n. a.	n. a.
Fourth stage engine	Scale Sergeant	—	—	—	—	—	—	—	—
Thrust, lb	1,600	n. a.	n. a.	n. a.	n. a.	n. a.	n. a.	n. a.	n. a.
Propellant	Solid	n. a.	n. a.	n. a.	n. a.	n. a.	n. a.	n. a.	n. a.
Specific impulse, sec	250	n. a.	n. a.	n. a.	n. a.	n. a.	n. a.	n. a.	n. a.
Burning time, sec	6.5	n. a.	n. a.	n. a.	n. a.	n. a.	n. a.	n. a.	n. a.

<sup>1</sup> Inhibited white (IWFNA) or red (IRFNA) fuming nitric acid and unsymmetrical dimethylhydrazine<sup>2</sup> Or nitrogen tetroxide<sup>3</sup> Not applicable

Table IX. *Juno 2 Firing History*

No.	Date	Remarks
1	6 Dec. 58	Launched <i>Pioneer 3</i> which had velocity deficit of 990 mph, due to premature first-stage engine cutoff. Trajectory angle deviations also occurred. Weight, lb: 15.25 (plus 10.25-lb, separated fourth stage); distance from Earth, miles: 63,580.
2	3 Mar. 59	Launched <i>Pioneer 4</i> which successfully entered into heliocentric orbit after by-passing the Moon; tracked to 406,000 miles. Weight, lb: 15.25 (plus 10.25-lb, separated fourth stage).
3	16 Jul. 59	Failed to orbit IGY radiation satellite; missile destroyed after 5 sec of flight due to loss of control (main power inverter shorted).
4	14 Aug. 59	Failed to orbit inflatable sphere (Beacon 2) satellite due to velocity deficit of 825 mph (premature propellant depletion in first stage) and to fact that a tracking flare exploded in the instrument compartment (causing a pressure loss and cessation of attitude control).
5	13 Oct. 59	Orbited <i>Explorer 7</i> satellite. Weight, lb: 91.5 (plus a 12.25-lb, separated fourth stage); perigee and apogee, miles: 345 and 681.
6	23 Mar. 60	Failed to orbit radiation belt satellite due to upper stage malfunctioning.
7	3 Nov. 60	Orbited <i>Explorer 8</i> satellite. Weight, lb: 90 (plus a 12.25-lb, separated fourth stage); perigee and apogee, miles: 258 and 1,422.

Table X. *Thor Able Space Carrier Firing History*

No.	Date	Remarks
1	17 Aug. 58	Failed to boost payload into lunar trajectory (Able 1 series).
2	11 Oct. 58	Launched <i>Pioneer 1</i> into Earth-lunar space (Able 1 series). Weight, lb: 84.4 (payload: 39); distance from Earth, miles: 70,700.
3	8 Nov. 58	Launched <i>Pioneer 2</i> , which did not attain established objective due to failure of third stage to ignite (Able 1 series). Weight, lb: 86.4 (payload: 35); distance from Earth, miles: 963.
4	7 Aug. 59	Launched <i>Explorer 6</i> satellite (Able 3 series). Weight, lb: 142; perigee and apogee, miles: 156 and 26,357.
5	17 Sep. 59	Failed to orbit 265-lb Transit 1A satellite because third stage rocket did not fire (Able 2 series).
6	11 Mar. 60	Orbited <i>Pioneer 5</i> space probe around Sun (Able 4 series). Weight, lb: 94.8; distance from Earth, miles 170,000,000 at superior conjunction.
7	1 Apr. 60	Launched <i>Tiros 1</i> satellite. Weight, lb: 270; perigee and apogee, miles: 435 and 468.

Table XI. *Thor Agena A Firing History*

No.	Date	Remarks
1	28 Feb. 59	Orbited <i>Discoverer 1</i> satellite. Orbital and payload weights, lb: 1,450 and 300; perigee and apogee, miles: 176 and 519.
2	13 Apr. 59	Orbited <i>Discoverer 2</i> satellite. Orbital and payload weights, lb: 1,600 and 300; perigee and apogee, miles: 152 and 220.
3	3 Jun. 59	Failed to orbit satellite because of wrong injection angle.
4	25 Jun. 59	Failed to orbit satellite due to velocity deficit.
5	13 Aug. 59	Orbited <i>Discoverer 5</i> satellite. Orbital and payload weights, lb: 1,700 and 500; perigee and apogee, miles: 136 and 450.
6	19 Aug. 59	Orbited <i>Discoverer 6</i> satellite. Orbital and payload weights, lb: 1,700 and 500; perigee and apogee, miles: 139 and 537.
7	7 Nov. 59	Orbited <i>Discoverer 7</i> satellite. Orbital and payload weights, lb: 1,700 and 500; perigee and apogee, miles: 98.5 and 478.
8	20 Nov. 59	Orbited <i>Discoverer 8</i> satellite. Orbital and payload weights, lb: 1,700 and 500; perigee and apogee, miles: 116 and 1,030.
9	4 Feb. 60	Failed to orbit satellite because of lack of sufficient velocity.
10	19 Feb. 60	Failed to orbit satellite because of malfunction of first stage.
11	15 Apr. 60	Orbited <i>Discoverer 11</i> satellite. Orbital and payload weights, lb: 1,700 and 600; perigee and apogee, miles: 109 and 380.
12	29 Jun. 60	Failed to orbit satellite because of wrong injection angle.
13	10 Aug. 60	Orbited <i>Discoverer 13</i> satellite, 300 lb capsule recovered. Orbital and payload weights, lb: 1,700 and 600; perigee and apogee, miles: 161 and 436.
14	18 Aug. 60	Orbited <i>Discoverer 14</i> satellite, 300 lb capsule recovered. Orbital and payload weights, lb: 1,700 and 600; perigee and apogee, miles: 116 and 502.
15	13 Sep. 60	Orbited <i>Discoverer 15</i> satellite. Orbital and payload weights, lb: 1,700 and 600; perigee and apogee, miles: 130 and 472.

Table XII. *Thor Agena B Firing History*

No.	Date	Remarks
1	26 Oct. 60	Failed to orbit 2,100 lb <i>Discoverer 16</i> satellite; first and second stages did not separate.
2	12 Nov. 60	Orbited <i>Discoverer 17</i> satellite, 300 lb capsule recovered. Orbital and payload weights, lb: 2,100 and 900; perigee and apogee, miles: 116 and 616.
3	7 Dec. 60	Orbited <i>Discoverer 18</i> satellite, 300 lb capsule recovered after 48 orbits. Orbital and payload weights, lb: 2,100 and 900; perigee and apogee, miles: 154 and 459.
4	20 Dec. 60	Orbited <i>Discoverer 19</i> satellite, no recovery attempted. Orbital and payload weights, lb: 2,100 and 900; perigee and apogee, miles: 128 and 323.

Table XIII. *Thor Delta History*

No.	Date	Remarks
1	13 May 60	Failed to launch Echo passive communications satellite due to upper stage coast control difficulty.
2	12 Aug. 60	Launched <i>Echo 1</i> communications satellite. Orbital and payload weights, lb: 191.4 (plus 50 lb third stage casing) and 132; perigee and apogee, miles: 944 and 1,050.
3	23 Nov. 60	Launched <i>Tiros 2</i> meteorological satellite. Weight, lb: 280; perigee and apogee, miles: 406 and 431.

Table XIV. *Thor Epsilon Firing History*

No.	Date	Remarks
1	13 Apr. 60	Orbited <i>Transit 1B</i> navigation satellite. Weight, lb: 265; perigee and apogee, miles: 233 and 479.
2	22 Jun. 60	Orbited <i>Transit 2A</i> navigation satellite. Weight, lb: 223; perigee and apogee, miles: 389 and 657. At same time orbited 42 lb <i>Greb 1</i> solar radiation satellite with identical orbital characteristics.
3	18 Aug. 60	Failed to orbit Courier 1A, a 475 lb communications satellite, due to first stage malfunction.
4	4 Oct. 60	Orbited <i>Courier 1B</i> active delayed repeater communications satellite. Orbital and payload weights, lb: 500 and 300; perigee and apogee, miles: 587 and 770.
5	30 Nov. 60	Failed to orbit 203 lb Transit and 40 lb Greb 2.

on carrier, while the Nova is a design concept based on the use of the clustered F1 engines each producing 1,500,000 lb thrust.

The status of the Saturn is discussed in an article elsewhere in this issue by Dr. WERNHER VON BRAUN. Table XXI provides basic characteristics and Table XXII lunar and interplanetary lifting capabilities. In orbital missions the C1 can place nearly 20,000 lb to 300 miles and 4,500 lb to 22,300 miles. The advanced C2 would more than double the 300-mile orbital capability of the C1.

The latest Nova vehicle studies differ from earlier estimates in that high energy (rather than conventional) upper stages are assumed. Designs prepared by North American Aviation, Inc. engineers are based on a 6-engine first stage cluster (9,000,000 lb total thrust). The lunar landing and return vehicle would have an Earth-return weight of about 20,000 lb. A second design would permit 130,000 lb to be placed into a 22,300-mile, 24-hour orbit or 90,000 lb into a Mars orbit. Another design would be capable of orbiting a 400,000-lb manned space station at 200 or more miles from the Earth.

Table XV. *Typical IRBM-Based Carrier Vehicle Lifting Capabilities*

Carrier	Lifting Capability Pounds	Vertical Altitude, Miles	Orbital Altitude, Perigee, Miles
Juno 2 .....	95 500 30 15	1,800 11,000 Interplanetary	300
Thor Able Space Carrier .....	350 95	Interplanetary	300
Thor Agena A .....	1,700		200
Thor Agena B .....	2,200 850		300 1,200
Thor Delta .....	500 250 65	Interplanetary	300 1,000
Thor Epsilon .....	800 500		300 700

### III. United States Spacecraft Developments

By the end of 1960 the United States had placed a total of 31 satellites into orbit. Of these, 16 were still orbiting and 10 of the 16 were transmitting data to stations on the Earth's surface.

It is impossible at this time to assess the scientific and technological results obtained from all 32 satellites orbited up to 1 February 1961 because the vast amounts of data so far gathered must still be evaluated, but to illustrate the nature of the information already obtained from one satellite, let us consider a NASA project, Tiros 1, as an example.

Tiros 1 was launched on 1 April 1960 by a Thor Able carrier vehicle into a near-circular orbit at an inclination of  $48.3^\circ$  to the equator. It weights 270 lb and had an initial perigee of 435 miles, an apogee of 468 miles, and a period of 99.2 minutes. Its objective was to measure cloud cover over as much of the globe as possible. The satellite is spin stabilized; hence its axis remains fixed in space. It has two television cameras, one wide-angle camera with an f 1.5 lens and a narrow-angle camera with an f 1.8 lens, each providing 500 lines per frame, the axes of the lens being parallel to the spin axis of the satellite. Pictures were obtained only when the satellite was in that part of the orbit where the cameras could see the sunlit portion of the Earth.

A magnetic tape recorder was provided for each camera with a maximum capacity of 32 photographs, taken at 30-second intervals. The recorder stored pictures taken out of range of the two ground receiving stations. Timer systems were provided for programming on command. The pictures were transmitted by two 2-watt, FM transmitters at 235 mc and two tracking beacons operated on 108 and 108.03 mc with a 30-milliwatt output. Power was supplied from nickel-

Table XVI. *Atlas Based Carriers*

	Atlas Able	Atlas Agena A	Atlas Agena B	Atlas Centaur	Atlas Mercury	Atlas Score
<i>Vehicle Data</i>						
Length, ft						
Overall	94.34	88.17	98.8	107.67	94.5	82
First stage	67.70	66.50	67.8	82.67	69.5	82
Second stage	21.54	21.67	31	25	25 (capsule and escape tower)	n.a.
Third stage	5.10	n.a. <sup>3</sup>	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.
Diameter, in.						
First stage	120	120	120	120	120	120
Second stage	33	60	60	120	79 (capsule)	n.a.
Third stage	22	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.
Span, ft	16.5	16.5	16.5	16.5	16.5	16.5
Weight, lb						
Overall (loaded)	265,000	275,000	289,500	295,000	260,000	245,000
Overall (empty)	—	16,000	17,000	—	—	—
First stage loaded	—	265,000	265,000	—	—	n.a.
First stage empty	—	12,000	12,000	—	—	n.a.
Second stage loaded	5,000	10,000	18,000	—	n.a.	n.a.
Second stage empty	1,800	4,500	5,000	—	n.a.	n.a.
Third stage loaded	860	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.
Third stage empty	400 <sup>1</sup>	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.
Velocity, mph						
First stage burnout	—	—	—	—	17,300	17,000
Second stage burnout	—	18,000	18,000-25,000	18,000-25,000	n.a.	n.a.
Third stage burnout	25,000	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.

<i>Engine Data</i>		MA 2	MA 3	MA 3	MA 3	MA 2	MA 2	MA 2
First stage engine		MA 2 (2 XLR 89 NA 5 + 1 XLR 105 NA 5)		MA 3		MA 2 (2 XLR 89 NA 5 + 1 XLR 105 NA 5)	MA 2 (2 XLR 89 NA 5 + 1 XLR 105 NA 5)	MA 2 (2 XLR 89 NA 5 + 1 XLR 105 NA 5)
Thrust, lb.		360,000 (2 × 150,000 + 1 × 60,000) liquid oxygen and kerosene (RP1)	410,000 (2 × 165,000 + 1 × 80,000) liquid oxygen and kerosene (RP1)	410,000 (2 × 165,000 + 1 × 80,000) liquid oxygen and kerosene (RP1)	410,000 (2 × 165,000 + 1 × 80,000) liquid oxygen and kerosene (RP1)	360,000 (2 × 150,000 + 1 × 60,000) liquid oxygen and kerosene (RP1)	360,000 (2 × 150,000 + 1 × 60,000) liquid oxygen and kerosene (RP1)	360,000 (2 × 150,000 + 1 × 60,000) liquid oxygen and kerosene (RP1)
Propellants								
Specific impulse, sec		250 130 (large engines) 275 (smaller engine)	250 145 (large engines) 250 (smaller engine)	250 140 (large engines) 260 (smaller engine)	250 130 (large engines) 275 (smaller engine)	250 130 (large engines) 275 (smaller engine)	250 130 (large engines) 275 (smaller engine)	250 127 (large engines) 244 (smaller engine)
Burning time, sec								
Second stage engine		AJ 10-101 7,700	Hustler 8048 15,500	Hustler 8081 16,000	XLR 115 30,000 (2 × 15,000) liquid oxygen and liquid hydrogen			
Thrust, lb.								
Propellants		IWFNA and UDMH <sup>2</sup>	IRFNA and UDMH <sup>2</sup>	IRFNA (or nitrogen tetrox- ide and UDMH <sup>2</sup> )				
Specific impulse, sec		270 115	275 120	285 240	420 300			
Burning time, sec								
Third stage engine		X 248						
Thrust, lb.		3,100	n.a.	n.a.	n.a.			
Propellant		Solid	n.a.	n.a.	n.a.			
Specific impulse, sec		250	n.a.	n.a.	n.a.			
Burning time, sec		40	n.a.	n.a.	n.a.			

<sup>1</sup> A small 340-lb loaded, 200-lb empty, fourth stage and payload combination has been carried for trajectory adjustment. The engine produces 4,000 lb thrust, has solid charge with 225 sec specific impulse.

<sup>2</sup> Inhibited red (IRFNA) or white (IWFNA) fuming nitric acid and unsymmetrical dimethylhydrazine

<sup>3</sup> Not applicable



Table XVII. *Atlas Able Firing History*

No.	Date	Remarks
1	26 Nov. 59	Failed to place 371 lb lunar probe into trajectory because of upper staging malfunctions.
2	25 Sep. 60	Abnormal second stage ignition failure of 387 lb lunar probe.
3	15 Dec. 60	Failed to place 388 lb lunar probe into trajectory. Carrier exploded at $7\frac{1}{2}$ mile altitude 70 sec after launch.

Table XVIII. *Atlas Agena A Firing History*

No.	Date	Remarks
1	26 Feb. 60	Failed to orbit Midas 1 satellite.
2	24 May 60	Orbited <i>Midas 2</i> satellite. Orbital and payload weights, lb: 5,000 and 3,600; perigee and apogee, miles: 300 and 317.
3	11 Oct. 60	Failed to orbit Samos 1 reconnaissance satellite, weight: 4,100 lb.
4	31 Jan. 61	Orbited <i>Samos 2</i> satellite. Orbital and payload weights, lb: 4,100, including a 400 lb instrument package; perigee and apogee, miles: 300 and 350.

Table XIX. *Atlas Score Firing History*

No.	Date	Remarks
1	18 Dec. 58	Orbited <i>Score</i> communications satellite. Orbital and payload weights, lb: 8,661 and 122; perigee and apogee: 110.6 and 911.

cadmium batteries charged by 9,200 solar cells on the top and sides of the 42-inch diameter and 19-inch high "pillbox" which constitutes the outer shell of the satellite.

Nearly 23,000 cloud cover photos were received during the three months of useful life of Tiros 1. Each wide-angle picture covered an area approximately 800 miles on a side; each narrow-angle picture took in an area of roughly 80 miles on a side within the field of the wide-angle camera. Much new information on cloud structures associated with large storms was obtained, particularly the spirally banded cloud formations whose existence was previously unknown. Frontal systems and storm centers were easily recognizable and their positions plotted accurately.

Tiros 2, also a NASA project, was launched on 23 November 1960 and is very similar to Tiros 1 except that it has infrared sensors to map radiation in various spectral bands in addition to two television cameras. All instrumentation functioned properly except that the wide angle cameras did not produce high quality photos.

Table XX. *Typical ICBM-Based Carrier Vehicle Lifting Capabilities*

Carrier	Lifting Capability, Pounds	Vertical Altitude, Miles	Orbital Altitude, Perigee, Miles
Atlas Able .....	1,500 100 300 500	Interplanetary Lunar impact	300 22,300
Atlas Agena A .....	5,000 300		300 22,300
Atlas Agena B .....	5,800 750 300 100 600	Lunar impact Lunar hard landing Lunar soft landing Interplanetary	300
Atlas Centaur .....	8,500 1,200 750 2,500 1,500	Lunar soft landing Lunar impact Interplanetary	300 22,300
Atlas Mercury .....	2,600		150
Atlas Score .....	150		300

The United States plans to make 25 or 30 space launchings per year for the next decade. The types of spacecraft involved are described best in relation to their mission objectives and can be divided into four principle categories: unmanned Earth satellite vehicles, manned Earth satellite vehicles, unmanned space vehicles (probes), and manned space vehicles (spaceships).

#### *A. Unmanned Earth Satellite Vehicles*

The *Nimbus* meteorological satellite, now under development by the General Electric Company, and associated contractors, will have a stabilization system to keep its cameras pointed earthward at all times. Such a system will overcome the limitations inherent in the *Tiros* satellites just described; their stabilization gave the cameras a fixed position relative to space axes, but a changing position relative to the Earth. *Nimbus* will weigh some 650 lb and will be placed in nearly circular, polar orbits at an altitude of about 600 miles. Thor Agena B carrier vehicles should begin launching *Nimbus* in mid-1962. Instruments will include television cameras and passive and scan-type radiation-sensing equipment. Paddles continuously oriented toward the Sun will carry solar cells to provide power for the satellite subsystems. The present concept visualizes a vehicle about 10 ft long and 5 ft in diameter at the instrument-containing base section. The upper section includes the power and stabilization system mounted on a column to provide clearance for the two paddles carrying the solar cells.

As a follow-on to *Nimbus*, *Aeros* meteorological satellites will be put into 22,300 mile equatorial orbits by Atlas Centaur carriers. These orbiters will have an automatic station-keeping capability.

Table XXI. *Saturn Carrier Vehicles*

	C 1	C 2
<i>Vehicle Data</i> (Approximate)		
Length, ft		
Overall .....	180	230
First stage .....	75	70
Second stage .....	45	72
Third stage .....	60 <sup>1</sup>	30
Fourth stage .....	n.a. <sup>3</sup>	58 <sup>1</sup>
Diameter, in.		
First stage .....	260	260
Second stage .....	220	260
Third stage .....	120	220
Fourth stage .....	n.a.	120
<i>Engine Data</i>		
First stage engine ....	H 1	H 1
Thrust, lb .....	1,504,000 (8 × 188,000)	1,504,000 (8 × 188,000)
Propellants .....	Liquid oxygen and kerosene (RP 1)	Liquid oxygen and kerosene (RP 1)
Specific impulse, sec ..	257	257
Burning time, sec ....	120	120
Second stage engine ..	XLR 115	J 2
Thrust, lb .....	70,000 (4 × 17,500)	800,000 (4 × 200,000)
Propellants .....	Liquid oxygen and liquid hydrogen	Liquid oxygen and liquid hydrogen
Specific impulse, sec ..	420	420
Burning time, sec ....	500	100
Third stage engine ....	XLR 115	XLR 115 (advanced) <sup>2</sup>
Thrust, lb .....	35,000 (2 × 17,500)	80,000 (4 × 20,000)
Propellants .....	Liquid oxygen and liquid hydrogen	Liquid oxygen and liquid hydrogen
Specific impulse, sec ..	420	420
Burning time, sec ....	300	—
Fourth stage engine ..	n.a.	XLR 115 (advanced) <sup>2</sup>
Thrust, lb .....	n.a.	40,000 (2 × 20,000)
Propellants .....	n.a.	Liquid oxygen and liquid hydrogen
Specific impulse, sec ..	n.a.	420
Burning time, sec ....	n.a.	—

<sup>1</sup> Includes payload and guidance compartment<sup>2</sup> Possible upgradation of thrust<sup>3</sup> Not applicable

Table XXII. *Typical Saturn Space Carrier Vehicle Lunar and Interplanetary Lifting Capabilities*

Lunar Mission		Mars-Venus Missions				Mercury-Jupiter Missions	
Spacecraft Weight, lb	Landed Weight, lb	Flyby		Orbit		Spacecraft Weight, lb	Payload Weight, lb
		Spacecraft Weight, lb	Payload Weight, lb	Spacecraft Weight, lb	Payload Weight, lb		
Saturn C 1	5,000	1,200	135				
Saturn C 2	15,000	4,500		11,000	550	1,500	150

Table XXIII. *Mercury Capsule Flight Testing*

Date	No.	Altitude, Miles	Range, Miles	Remarks
------	-----	-----------------	--------------	---------

*Little Joe Carrier Vehicle*

4 Oct. 59	1	40		Developmental test of vehicle, which was intentionally destroyed at 40 miles altitude; no capsule separation.
4 Nov. 59	2	7	5	Half minute after launch escape system actuated, carried capsule away from carrier, and recovery was effected.
4 Dec. 59	3	55	200	Monkey passenger recovered in capsule. High performance rockets used.
21 Jan. 60	4	9.3	12	Escape system again worked perfectly, monkey recovered. Low performance flight with only two Pollux rockets used.
8 Nov. 60	5	10	13	Low thrust flight using two Castors instead of four. No capsule separation.

*Redstone Mercury Carrier Vehicle*

19 Dec. 60	1	135	235	Production version of 2,400 lb Mercury capsule recovered successfully.
31 Jan. 61	2	156	414	Successful 16 $\frac{1}{2}$ minute MR 2 flight with recovery of chimpanzee. Animal subjected to 18 g at reentry, and 6 $\frac{1}{2}$ minutes of weightlessness during ballistic flight.

*Atlas Mercury Carrier Vehicle*

9 Sept. 59	1	100	1,500	Successful flight with capsule recovery at sea. So called "Big Joe" test.
29 July 60	2	7	5	Missile exploded 65 sec after takeoff.

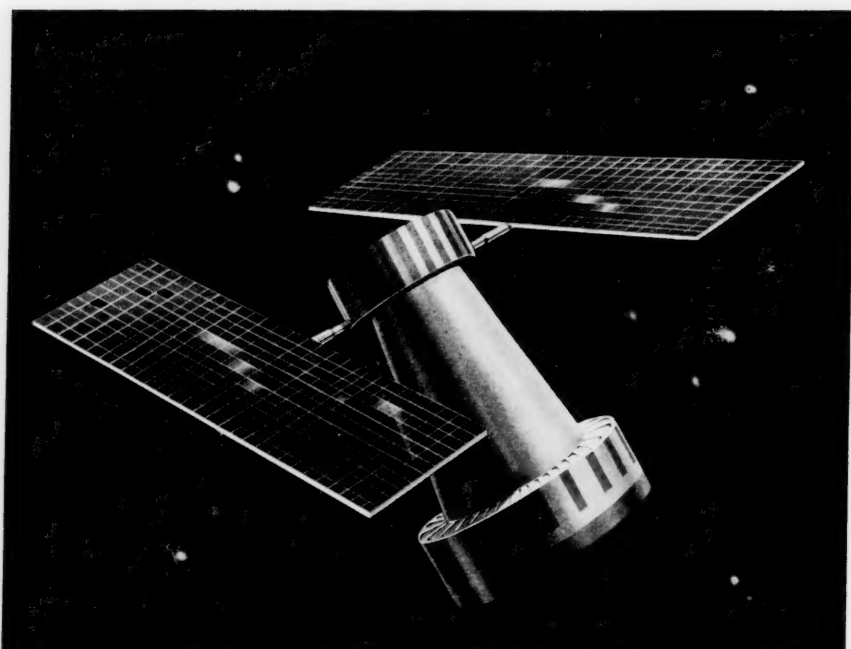


Fig. 2. Artist conception of Nimbus meteorological satellite (NASA photo)

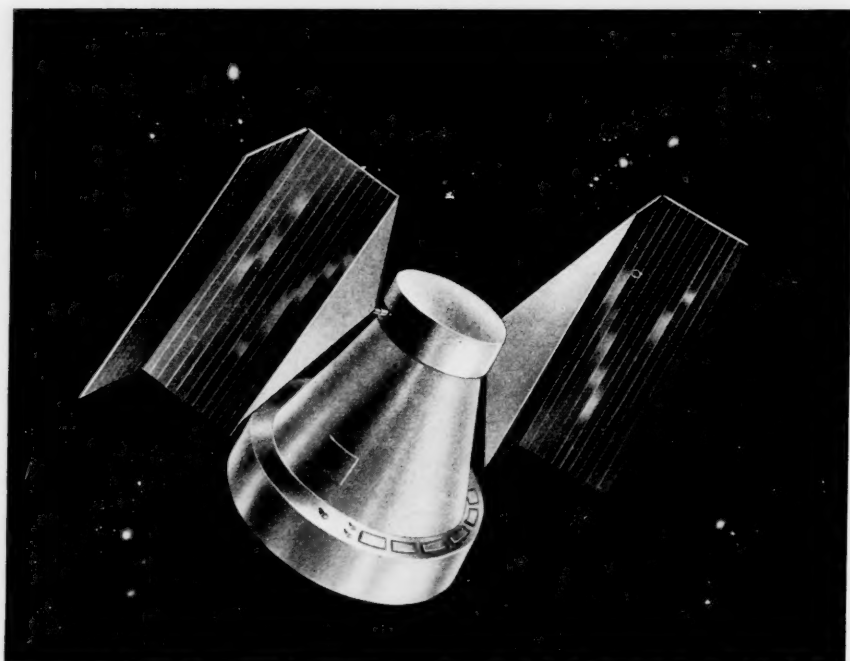


Fig. 3. Artist conception of Aeros meteorological satellite (NASA photo)

In order to conduct spectrophotometric studies of solar electromagnetic radiation in the ultraviolet and X-ray regions, an *Orbiting Solar Observatory* (OSO) is being developed. Secondary objectives include measurements of time variations in solar UV, X-ray and gamma ray emissions and terrestrial and solar neutron flux experiments. Weighing approximately 350 lb, OSO's are to be launched by Thor Delta carriers into 300-mile, circular orbits. The satellite

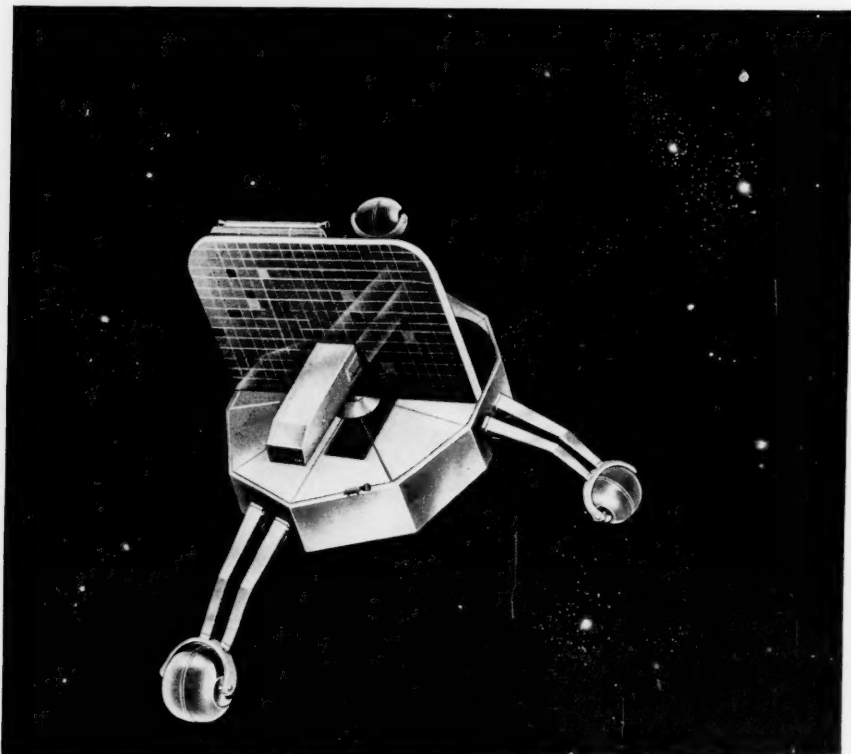


Fig. 4. Artist conception of Orbiting Solar Observatory (NASA photo)

has a large-diameter base section with extended arms to form a gyroscope wheel to permit spin stabilization and a half-disk-shaped upper section with solar cell arrays. The electronic instrumentation is in the base, while Sun-pointing instrumentation is in the arms (this includes solar sensors and compressed gas jets to control the satellite's spin axis). The OSO is being developed by the Ball Brothers Research Corp.; various universities will supply instrumentation.

Large geophysical research satellites are to be developed within the *Orbiting Geophysical Observatory* (OGO) program. Scheduled for launchings beginning in 1963, OGO's will enter either into polar orbits (perigee 170 miles, apogee 650 miles) or highly eccentric, inclined orbits with perigees of approximately 170 miles and apogees of 70,000 miles at inclinations of  $33^\circ$  to the equator. Eccentric orbiting observatories are called EGO's and polar orbiting observatories are known as POGO's; they are to be carried by Atlas Agena B's and Thor Agena B's, respectively.

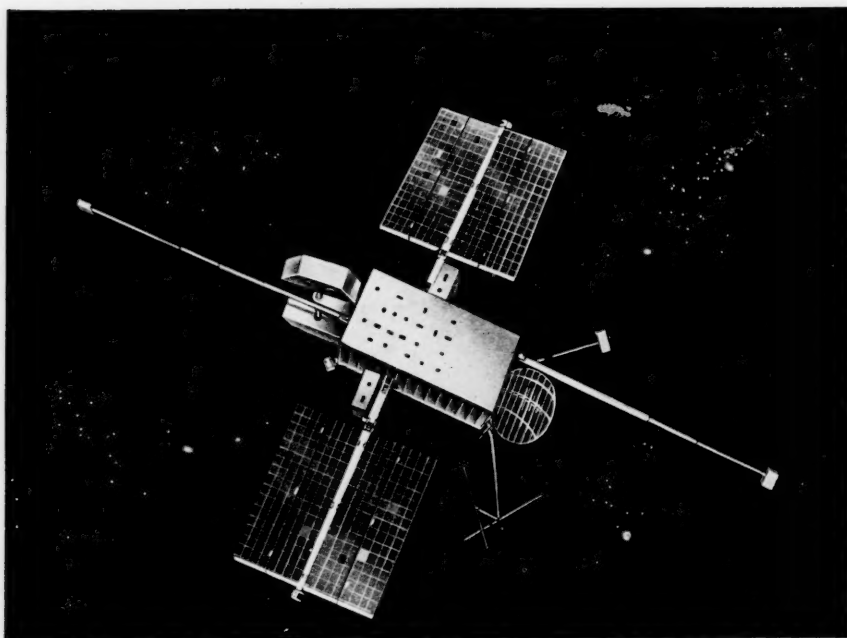


Fig. 5. Artist conception of Orbiting Geophysical Observatory (NASA photo)

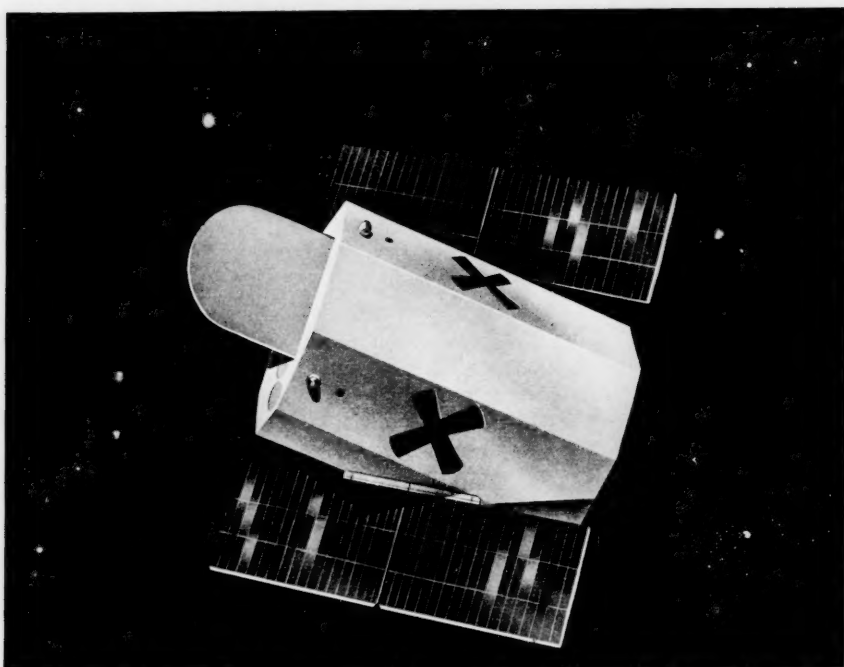


Fig. 6. Artist conception of Orbiting Astronomical Observatory (NASA photo)



Early versions of OGO's will weigh about 1,000 lb including the basic structure, electromechanical units, power supplies, controls and telemetry, and will be 6 ft long by 3 ft square. The present concept envisages a cylindrical structure of stacked, short, cylindrical compartments with large paddles for solar cells. Up to 50 different geophysical experiments may be conducted on a single mission, with data being transmitted over three types of telemetry (wideband, narrowband, and special purpose). Gas jets and reaction wheels will assure attitude control to keep the same axis always pointed towards the Earth. Some of the experiments will be carried out along the axis stabilized in the plane of the orbit, others along the axis pointing at the Sun, while still others will be mounted in booms so that they will not be disturbed by such central body influences as trapped gases. Among the fields to be investigated by OGO's are atmospheric structure meteorology, magnetic fields, ionospheres, solar physics, astronomy, energetic particles, and vehicular structure tests. Development is being undertaken for the NASA by the Space Technology Laboratories, Inc.

The first *Orbiting Astronomical Observatory* (OAO) is expected to be launched in 1963 by an Atlas Agena B carrier vehicle into roughly a 500-mile, circular orbit. Under development for NASA by the Grumman Aircraft Engineering Corp., the OAO will have an octagonal design, weigh up to 3,500 lb, including 1,000 lb of instrumentation. It will be approximately 9.5 ft long and 6.5 ft in diameter, not including the paddle wheels.

OAO's are designed to carry 36-inch and 24-inch telescopes, smaller 8-inch telescopes coupled to video tubes, photometers, and spectrometers. The satellite will be highly stabilized and will have pointing control sufficient to permit a star to be tracked with great accuracy. Typical experiments are general ultraviolet radiation mapping, star brightness in the ultraviolet, cosmic gas and dust studies, research into Sun-Earth relationships, and stellar composition investigations.

The satellite's memory device will be capable of storing some 100,000 bits of information, which will be read out upon command over a telemetry system. Power will come from twin arrays of solar cells mounted on the protruding paddle wheels.

### *B. Manned Earth Satellite Vehicles*

Minimum manned artificial satellites are the forerunners to the manned space stations and spaceships of the future. As the first step in a major "man-in-space" effort, the United States has established the Mercury project with the principal objective of propelling into space, and recovering, a small, one-man satellite. This project, now in the advanced development stage, is so well known that it is not necessary to describe it in detail.

Before any sustained program for manned lunar and planetary exploration can become feasible, man's capabilities in, and reactions to, the space environment must be ascertained. Therefore, man is considered far more than a mere passive biological specimen. In the Mercury program, provision is made for him to perform the functions of a pilot, flight engineer, navigator, and radio operator; he will be able to control the attitude of the capsule, initiate reentry, make changes and adjustments in equipment and use alternate systems, determine his position, and communicate with ground station unless presently unsuspected reactions to space flight prevent him from doing these things.

To assure safety, the Mercury satellite is equipped with automatic sensing and control devices of the type usually found in high-speed military aircraft.

Moreover, with the friendly cooperation of any countries, a network of Mercury ground stations is being established throughout the world. With the assistance of a system of high-speed computers, control of Mercury satellites can be taken from the ground when necessary during orbital flight. An escape system, provided for emergency use, is designed to operate automatically should the rocket fail on the ground or in the air; however, it can be actuated by either the ground crew or the astronaut.

Since the astronaut does expect to function as pilot, flight engineer, navigator, and radio operator, his training for orbital flight includes tryouts in ballistic trajectories in Redstone Mercury carriers. A typical test will carry the pilot to an altitude of some 125 miles and a range of 200 miles, giving him launch, reentry and recovery experience and  $5\frac{1}{2}$  minutes of weightlessness. Table XXIII lists the Little Joe, Redstone and Atlas boosted Mercury capsule tests conducted up to 1 February 1961.

It is planned to accomplish manned ballistic flights during 1961 and the first manned orbital flight in late 1961 and into 1963. The realization of these dates depends on the results achieved during the remaining stages of qualification testing of the capsule and its equipment and on satisfactory performance of the tracking and recovery crews.

### C. Unmanned Space Vehicles (Probes)

As a follow-on to the unsuccessful attempts of Atlas Able carriers to launch lunar orbiters, the NASA has established the *Ranger* rough-landing program.

Five *Ranger* spacecraft are to be developed by the Jet Propulsion Laboratory, the first two being test vehicles and the last three actually impacting on the surface of the Moon. They will be launched by Atlas Agena B vehicles.

The first two vehicles are to be sent into heliocentric orbits greater than Earth's during the latter half of 1961 and will conduct engineering investigations of attitude control systems, power

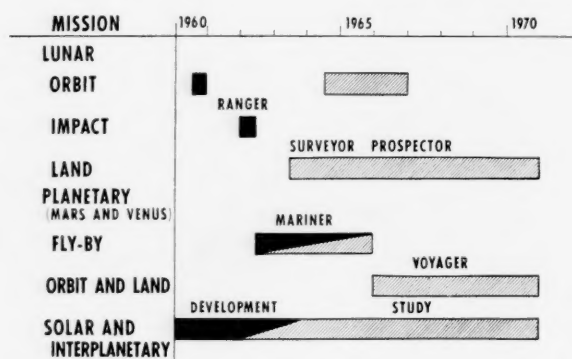


Fig. 7. Time scale of lunar and planetary space exploration programs planned by the NASA for the current decade

supplies (including the solar cells located in two extended paddles), communications equipment, and the reaction of structure and components to space conditions. They will also carry instruments to investigate cislunar fields and charged particles and to make hydrogen and dust measurements.

The last three vehicles, scheduled for 1962 flights, will incorporate Ford-Aeronutronics Division soft-landing capsules, each fitted with a retrorocket to reduce terminal velocity to less than 500 fps. The spacecraft itself will be equipped with high-resolution television to transmit pictures to the Earth during the brief, final minutes before impact; if possible it will record the actual impact area of the capsule. In addition, a gamma ray spectrometer will be carried.

The major device contained within the rough landing capsule will be a rugged, lightweight seismometer. Associated telemetry will of course be included, and sensors will be placed aboard to record internal temperatures.

The follow-on step to lunar exploration is the *Surveyor* program monitored by the Jet Propulsion Laboratory for the NASA. Concerned with the surface and

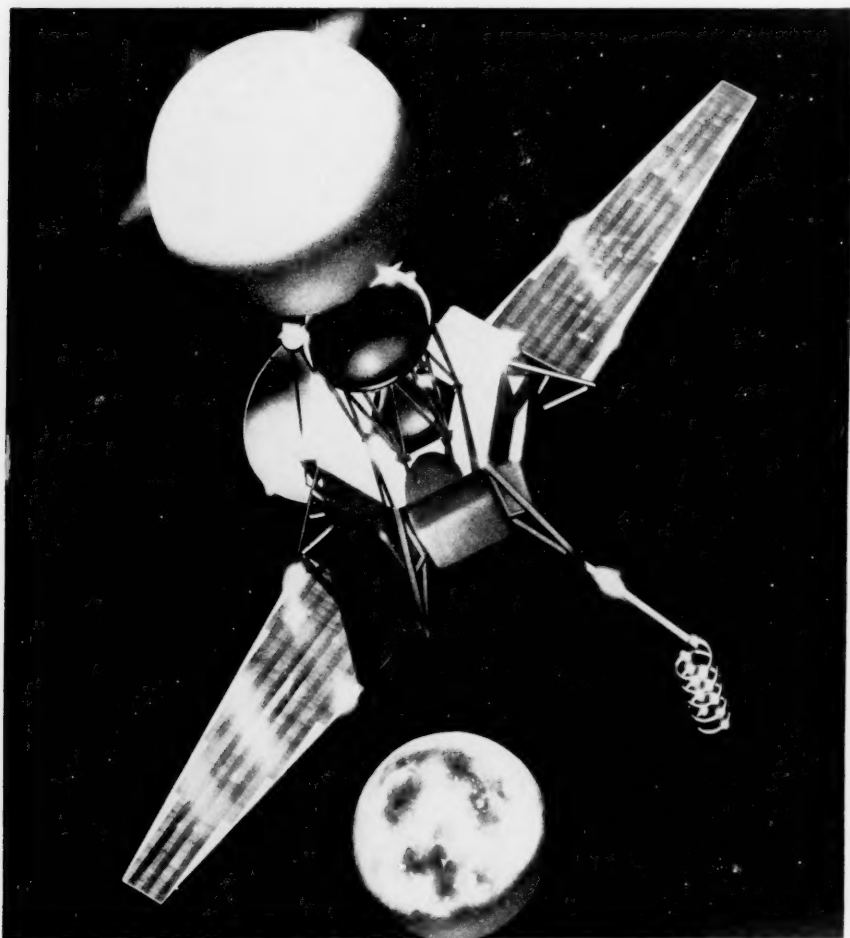


Fig. 8. Artist conception of Ranger lunar rough landing spacecraft (Ford Motor Company, Aeronautic Division photo)

subsurface exploration of the Moon, it is planned that seven Hughes Aircraft Company soft-landing spacecraft will be constructed and flown during the period of 1964—1966. These craft will be injected into lunar trajectories by Atlas Centaur carrier vehicles and will travel in space for about 66 hours before landing on the Moon.

Each spacecraft is expected to weigh about 2,500 lb, including a 750-lb. soft-landing capsule, nearly 250 lb of scientific instruments, and approximately 500 lb of communications equipment, structure, and temperature control devices. The

tripod lander will be 11 ft high from the base of the frame to the top of the antenna. Its solid propellant retrorocket will provide the main energy source to brake lunar approach velocity so that craft can gently approach the sur-

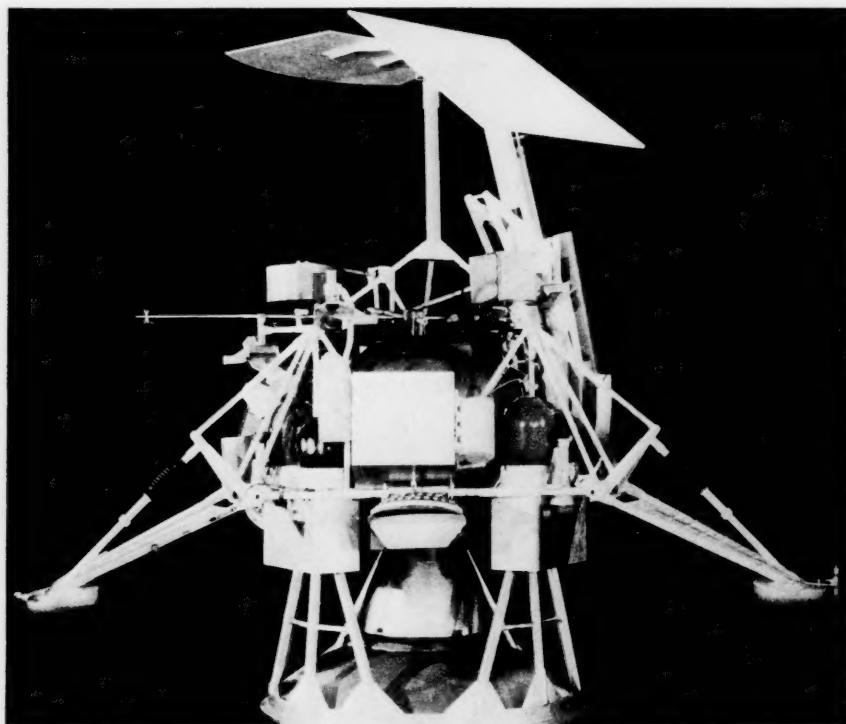


Fig. 9. Model of the Surveyor space probe, scheduled to be soft-landed on the Moon by an Atlas Centaur space carrier vehicle in 1963. Its payload of over 200 lb of scientific instruments will measure radiation fields, atmosphere, magnetic fields, and surface and subsurface characteristics. Lunar astrophysical data will be telemetered to Earth by solar cell-powered transmitters within the probe (Hughes Aircraft Company photo)

face. Final vertical and lateral velocity adjustments will be made by a small, liquid propellant, motor, assuring a touchdown at less than 10 mph. Landing shock will be taken up by its three legs.

Instrumentation planned for the Surveyor series includes:

- Television cameras
- Seismometer
- Magnetometer
- Gravimeter
- Drill
- Plasma probe
- Neutron activator tube
- Ionization gage

Probably the most interesting device to be carried on Surveyors is the rotary drill which is designed to penetrate 1.5 ft or more into the lunar surface and bring samples into the lander for chemical analysis. Other instruments will

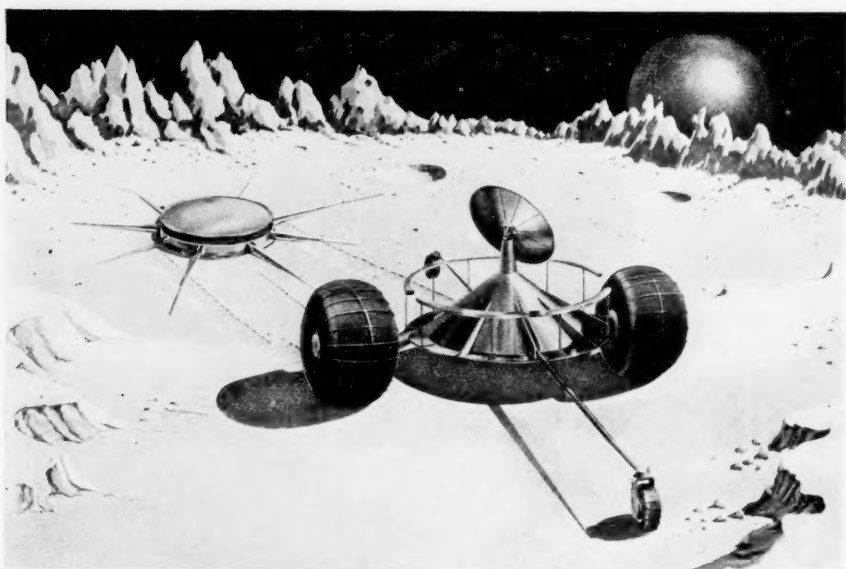


Fig. 10. Artist's concept of a Prospector-like, remotely controlled, roving vehicle which could be soft-landed on the lunar surface by the Saturn space carrier vehicle by 1966 (NASA photo)

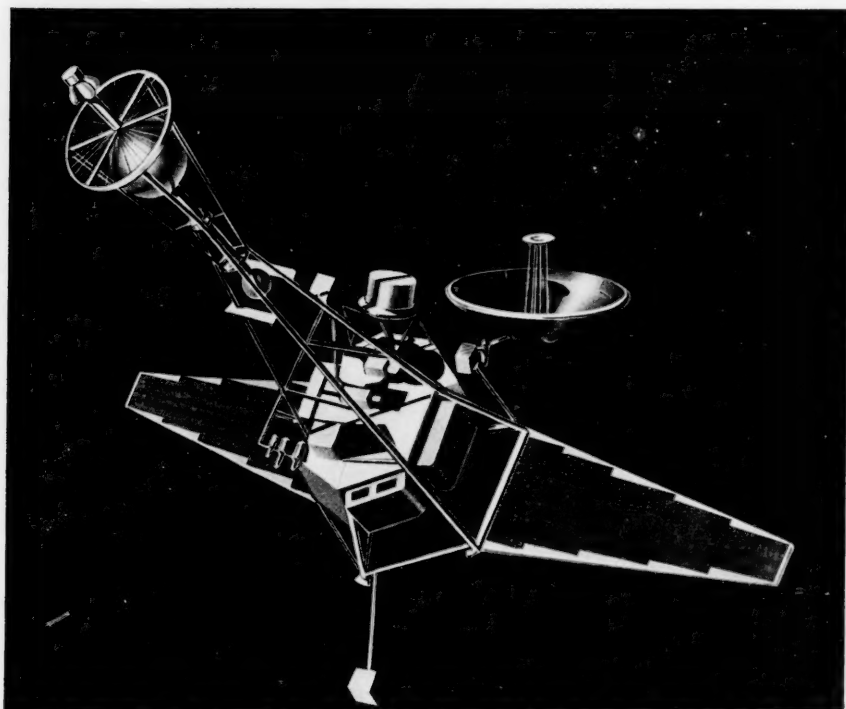


Fig. 11. Artist's concept of Mariner interplanetary probe (NASA photo)

measure the lunar magnetic field, moonquakes, meteor impacts, gravity, radiation and atmospheres. Telemetry devices will transmit findings over a period of one to three months to Earth. Power will be supplied by a solar panel at the top opposite to the antenna.

When Saturn space carriers become available, both stationary and mobile soft-landing vehicles called *Prospectors* are planned for soft landings on the

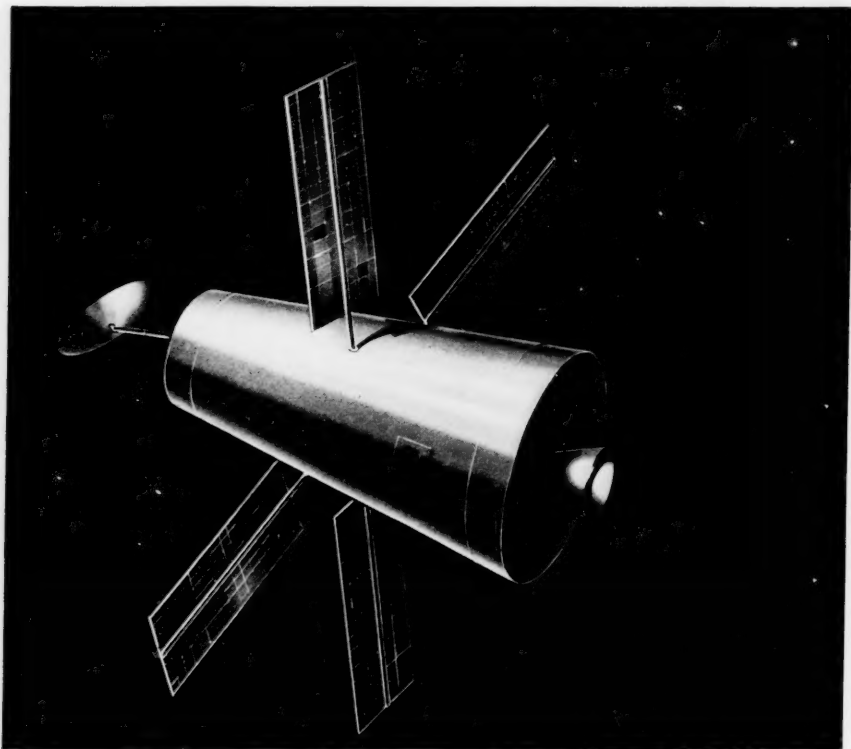


Fig. 12. Artist's concept of Voyager interplanetary probe (NASA photo)

Moon. Studies that will lead to vehicular configuration decisions are being conducted by the George C. Marshall Space Flight Center and the Jet Propulsion Laboratory.

*Mariner* is a somewhat modified version of Ranger designed to conduct interplanetary probings and fly-by missions to Venus and Mars from 1962 to 1965. Boosted by Atlas Centaurs, they will weigh from 600 to 1000 lb, including up to 75 lb of instrumentation. Mariners are scheduled to carry devices for measuring high-energy radiations, interplanetary particles and dust, magnetic fields, atmospheric structure, cloud cover, planetary rotation rates, diameters and temperatures, and they will conduct photographic studies. These vehicles may also be able to test for the existence of organic molecules.

Just as the *Prospector* represents the logical follow-on of Ranger and Surveyor programs, so does *Voyager* represent the developmental growth of Pioneer and Mariner spacecraft. Voyagers will be launched by Saturn C1 space carriers

beginning in 1965 for general interplanetary missions and by C2 versions in 1968 for Venus and Mars missions. Later, flights to Mercury and Jupiter are planned, as well as out-of-ecliptic probings. The major objectives of the Voyager program are to establish the feasibility of Saturn-launched, interplanetary spacecraft and to conduct long-duration artificial satellite measurements in the vicinity of Venus and Mars. Many of the same type of measurements will be conducted by Voyagers as by Mariners, although greater details and higher accuracies are expected. It should be possible to eject instrumented capsules from the orbiting satellites down into the atmospheres to conduct composition, pressure, temperature, density, and wind investigations.

#### *D. Manned Space Vehicles (Spaceships)*

There have been many proposals, concepts and design studies generated in the U. S. for vehicles capable of undertaking the initial steps in the manned exploration of the solar system. Of these, NASA's 3-man Apollo spaceship program has entered into the advanced study phase.

The ultimate objective of the Apollo program is manned circumlunar flight, consistent with the anticipated capabilities of the Saturn vehicle. It will be-

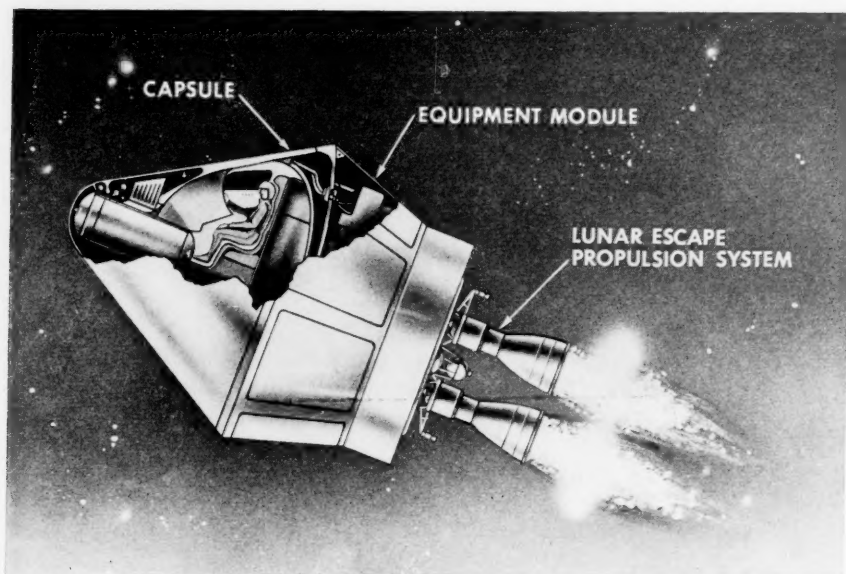


Fig. 13. Artist's concept of Apollo, showing capsule, equipment module, and propulsion system (NASA photo)

come a versatile spaceship designed to permit man to explore in person the space environment out to and around the Moon. Studies now underway are aimed at further defining the requirements for a vehicular system capable of making manned reconnaissance flights to the vicinity of the Moon and returning to Earth. The evolution of Apollo into a developmental and production article represents a logical step toward the future goal of landing scientific teams on the Moon and on other worlds in the solar system.



Although considerable progress has been made in the technology of simulated spaceflight conditions, problems of major concern exist for manned flight beyond low Earth orbits. The high energies of cosmic radiation require shielding techniques unknown today, especially for flights beyond the estimated time required for the circumlunar mission. And the energy from solar flares is so high that the success of any spaceflight mission may depend on the capability to predict the frequency of their occurrence. Spaceflights must be carefully planned so that spaceships merely pass through the high-intensity, trapped radiation of the VAN ALLEN belt without orbiting in it continuously.

Many other problems remain, such as how to design and construct continuously operating equipment of long life, acceptable resistance to the space environment, high reliability, and how to assure the logistics of Earth-to-orbit, orbit-to-orbit, and orbit-to-spaceship operations.

The solution of man's environmental problems for spaceflight over long periods will be partially resolved by simulating the space environment in our laboratories and research facilities on Earth, but many spaceflight conditions can only be created for very short periods in the laboratory.

Animals and men have survived over extended periods on hydroponically produced plant food, and they have existed for a few days on reprocessed body wastes. We have learned something about the effects of weightlessness over periods of minutes. And the gravitational environment of man can be simulated by centrifugal force in a rotating spacecraft.

The astronaut's problems in space and his survival in a planetary environment have not yet even been completely defined. We do know, however, that at least initially he must take all his food and air with him. He must be able to live for days, weeks, and possibly months between takeoff from and return to Earth and expect to exist in a closed cabin environment using techniques of survival that are new and different. Systems for closed ecologies are still crude—even in concept. More efficient methods are needed to recover used water from body wastes, treating  $\text{CO}_2$  to obtain life sustaining oxygen, to improve food concentration, and to stock high-energy food prepared on Earth and packaged in organic materials that could be eaten in space. Until these and many other facets of manned space flight are thoroughly investigated and solutions provided for problems that arise, the spaceship will remain an unrealizable dream. Only hard work, imaginative thinking, creative engineering, and adequate time will turn this dream into reality.

# Atmosphere Near the Moon<sup>1</sup>

By

S. F. Singer<sup>2</sup>

(Received January 23, 1961)

## Abstract — Zusammenfassung — Résumé

**Atmosphere Near the Moon.** Any reasonably anticipated steady evolution of gas from the moon is insufficient for the formation of an atmosphere. Contrary to expectations from the classical theory of an exosphere, we find that even the heaviest gases, for example the noble gases krypton and xenon, cannot be retained by the moon. Because of the ionizing effects of solar ultraviolet radiation, electric forces now become more important than gravitational forces. The lifetime of an atmosphere containing all the krypton and xenon believed to have evolved since the origin of the moon is of the order of 800 and 50 years respectively. After the atmosphere has thinned to less than a mean-free path (i.e., an exosphere), yet another mechanism of escape of heavy gases exists. It seems likely that the moon as a whole is positively charged to a potential of about +20 volts, owing to the great intensity of solar ultraviolet radiation. Hence, in the vicinity of the moon there will exist a strong electrostatic field. Whenever a krypton or xenon atom is ionized while it is in flight within the screening length near the moon, the ion will be expelled by the electrostatic field. The lifetime turns out to be ~1000 years and is somewhat increased by the effect of solar corpuscular streams. Hence we conclude that there is not much likelihood that light or heavy gases evolving from the moon will be retained by the moon. The only gas in the vicinity of the moon can come from interplanetary space itself.

Accreted, accommodated and reemitted solar coronal gas yields an average permanent density of about 80 hydrogen atoms per cm<sup>3</sup>; this density may rise to about 10<sup>5</sup> per cm<sup>3</sup> following solar eruptions.

**Die Atmosphäre in der Nähe des Mondes.** Eine als mäßig angenommene stationäre Erzeugung von Gas auf dem Mond ist für die Bildung einer Atmosphäre nicht ausreichend. Im Gegensatz zu den Erwartungen der klassischen Theorie der Exosphäre wurde gefunden, daß gerade die schweren Gase, z. B. die Edelgase Krypton und Xenon, vom Mond nicht behalten werden können, da wegen der Ionisation durch die Ultraviolettstrahlung der Sonne die elektrostatischen Kräfte eine größere Rolle spielen als die Gravitationskräfte. Die Lebensdauer einer Krypton-Xenon-Atmosphäre, die eventuell seit der Bildung des Mondes entstanden sein könnte, beträgt größenordnungsmäßig 50 bis 800 Jahre. Wenn sich die Atmosphäre so weit verdünnt hat, daß die mittlere Stoßzahl vernachlässigbar klein wird, dann existiert kein Entweichmechanismus für die schweren Gase. Der Mond scheint nun ein Potential von etwa +20 Volt zu besitzen, bewirkt durch die Ultraviolettstrahlung. In unmittelbarer Nähe des Mondes kann also ein starkes elektrisches Feld existieren, so daß positiv geladene Ionen abgestoßen werden können. Daraus wird gefolgert, daß das Gas in der Nähe des Mondes einzig und allein vom interplanetaren Gas stammt.

<sup>1</sup> Supported by a grant from the National Aeronautics and Space Administration.

<sup>2</sup> Department of Physics, University of Maryland, College Park, Maryland, U.S.A.

**L'atmosphère au voisinage de la lune.** Toute émission permanente de gaz par la lune, en quantités raisonnablement prévisibles, ne suffit pas à former une atmosphère. En effet, contrairement à ce que l'on attendrait de la théorie classique de l'exosphère, la lune ne peut retenir les gaz même les plus lourds comme le krypton et le xénon. Par l'effet ionisant du rayonnement ultra-violet solaire les forces électriques deviennent plus importantes que les forces de gravitation. La durée de vie d'une atmosphère composée de la totalité de krypton et de xénon, que l'on peut estimer avoir été formés depuis l'origine de la lune, est de l'ordre respectivement de 800 et 50 ans. Une fois l'atmosphère réduite à l'épaisseur d'un libre parcours moyen, un autre mécanisme de libération des gaz lourds se présente. Il est dû au fait probable que la lune est portée dans son ensemble à un potentiel de +20 volts sous l'effet du rayonnement ultra-violet du soleil. Il existe par conséquent un champ électrostatique intense expulsant tout ion au voisinage de la surface. La durée de vie résultante qui peut être estimée à 1000 années est un peu accrue par les courants corpusculaires d'origine solaire. Il faut donc présumer que le seul gaz existant au voisinage de la lune doit être d'origine interplanétaire.

### I. Summary of Observations

One of the intriguing problems in current space research activities relates to the presence of a lunar atmosphere. Some upper limits have been obtained by various observations; for example, in France DOLLFUS [1] has made polarimetric observations which lead to a density of  $10^{-9}$  of the density of the terrestrial atmosphere. Detailed investigations by J. N. LIPSKIJ [2] gave a density of  $10^{-4}$  of the terrestrial; however, his analysis has been questioned effectively by E. J. ÖPIK [3] who concludes that the absence of observable optical effects near the moon's cusps give an upper limit of one millionth (and probably less) of the terrestrial.

Quite a different set of observations has been obtained by ELSMORE [4]; it is concerned with refraction of a radio star as it is obscured by the lunar disk. From such observations a pressure of the order of  $10^{-13}$  atmospheres can be deduced as an upper limit.

### II. Theory as Tool for Exploration

In the absence of direct measurements our information on the lunar atmosphere must be obtained by other methods. Theory can be very helpful in anticipating experiments, as well as for interpreting any eventual discoveries with lunar probes. The problem resolves down to finding possible sources for an atmosphere, and comparing the strength of these sources with mechanisms of dissipation of an atmosphere, chiefly escape into interplanetary space. If the sources are weaker than the rate of escape, then an atmosphere cannot build up. We will therefore examine the cases of internal sources (from the moon's interior) and external sources.

### III. Atmosphere from Internal Sources

Let us consider first the escape problem of a lunar atmosphere. The outstanding difference between the earth and the moon is the small mass of the moon and therefore its low value of gravitational field. This is reflected in the fact that atoms will escape quite rapidly from the surface of the moon. To examine the rate of escape, one may use an approximate formula derived by SPITZER [5] which gives the time  $t_1$  during which the particle density would decrease by a factor  $e$  (for an isothermal atmosphere)

$$t_1 = (2\sqrt{6c^3/9g v_{\infty}^2}) \exp (3 v_{\infty}^2/2 c^2). \quad (1)$$

Here  $v_\infty$  is the velocity of escape,  $g$  the acceleration of gravity, and  $c^2 = 3 \text{ kT/m}$ . If we assume an average lunar surface temperature  $T$  of  $400^\circ \text{ K}$ , the lifetime of a hydrogen atom would be 1600 sec, and of an oxygen atom 1.4 years.

This result shows how sensitive the escape time is to the atomic mass. For example, a straightforward application of Eq. (1) to heavy gases such as xenon and krypton gives lifetimes of the order of  $10^{41}$  and  $10^{24}$  years, respectively, i.e. times that are large compared to the age of the moon. (See Tables 1, 2 and 3.) Hence, it might be surmised that xenon and krypton evolving from the moon would in fact accumulate and remain in the lunar atmosphere.

Table 1. Data on the Moon

Radius, km	Area, $\text{cm}^2$	Mass, g	Surface Gravity $\text{cm/sec}^2$	Escape Velocity $v_\infty$ , $\text{km/sec}$	Escape Energy, ev	
					Kr	Xe
1738	$3.8 \times 10^{17}$	$7.35 \times 10^{25}$	162	2.38	2.4	3.7

Table 2. Data on Krypton and Xenon

	Mean Atomic Weight	Mass, g	Gas Kinetic Cross Section, $\text{cm}^2$	Escape Level Load, $\text{atoms/cm}^2$ column	Ionization Potential	
					ev	$\sigma_n$ , $\text{cm}^2$
Kr	83.8	$1.39 \times 10^{-22}$	$7.8 \times 10^{-15}$	$1.3 \times 10^{14}$	14.0	$1.8 \times 10^{-15}$
Xe	131.3	$2.18 \times 10^{-22}$	$9.4 \times 10^{-15}$	$1.1 \times 10^{14}$	12.1	$2 \times 10^{-15}$

Table 3. Escape Times of Neutral Atoms from a Thick Atmosphere

	$T = 1500^\circ \text{ K}$			$T = 400^\circ \text{ K}$	
	$v_\infty^2/c^2$	$t_1$ , sec	$t_1$ , years	$v_\infty^2/c^2$	$t_1$ , years
Kr	12.6	$5.1 \times 10^9$	170	47.2	$10^{24}$
Xe	19.8	$1.3 \times 10^{14}$	$4 \times 10^6$	74.3	$10^{41}$

EDWARDS and BORST [6] have worked out in some detail the possible sources of xenon and krypton evolving from the moon. They have considered such mechanisms as spontaneous fission of uranium 238, fission from thermal neutrons produced in the lunar rock by  $\alpha$  particles, possible effects from cosmic-ray bombardment, and also the decay of iodine 129. The first and the last of these mechanisms are particularly important for the production of krypton and xenon. Finally, of course, the possibility cannot be excluded that appreciable amounts of xenon and krypton were contained in some primeval gas of the moon. EDWARDS and BORST conclude that the amount of gas evolved from a 1-km-thick layer of rocks might be of the order of  $2 \times 10^{16}$  krypton atoms and  $1.8 \times 10^{15}$  xenon atoms per  $\text{cm}^2$  column, more than sufficient to produce a pressure of the order  $10^{-13}$  atmosphere. (This amount is considered by ELSMORE [4] to be in accord with radio observations of the occultation of two radio sources.)

We may accept the production rates calculated by EDWARDS and BORST, but we must modify the conventional calculation for rate of escape.

First we shall consider the presence of a thick atmosphere and show that

it reduces very quickly to an exosphere. Next we shall show that even an exosphere cannot be maintained but becomes thinner and thinner.

The treatment of the escape of gases follows the recent paper of ÖPIK and SINGER [7]. If we consider first of all a thick atmosphere of the moon, then the escape layer of this atmosphere would be separated from the surface of the moon and might have a temperature of some  $1500^\circ\text{K}$ , similar to the temperature of the base of the exosphere of the earth. We can then show that the escape time for krypton is of the order of 170 years and for xenon  $4 \times 10^6$  years; in other words very short compared to the lifetime of the moon. Now as the atmosphere thins down sufficiently, this escape level is still above the surface of the moon but the atmosphere will be sufficiently cooled by contact with the lunar surface so that the temperature is low throughout. Then the atoms will escape with a temperature corresponding to about  $400^\circ\text{K}$ . In that case the lifetimes would be  $10^{24}$  years and  $10^{41}$  years for krypton and xenon, respectively, and it would seem therefore that such an atmosphere could survive. However, now we must consider the effect of solar radiation. A detailed examination of the photoionization produced by photons in the far ultraviolet shows that the rate of escape of the krypton and xenon ions would be of the order of  $10^6$  per  $\text{cm}^2$  per sec. Thus in the lifetime of the moon, the total loss would have been  $1.5 \times 10^{23}$  atoms per  $\text{cm}^2$  column, or more than the probable content of the heavy gases in the entire lunar mass.

(Contrary to certain treatments, for example, by HERRING and LICHT [8], it can be shown that the thermal corpuscular stream from the solar corona cannot efficiently eject atoms from the lunar atmosphere. It will only cause additional ionization by charge exchange or by impact ionization, but not necessarily increase the rate of escape.)

We now finally consider the situation when the atmosphere of the moon is a true exosphere, i.e. when the atoms do not make collisions with each other but describe free orbits under the influence of gravitational and other forces. We have shown [7] that the degree of ionization must be determined by the ratio of flight time for a particle traveling in a ballistic orbit to the photoionization lifetime. From this we derive a degree of ionization of 1 in  $10^5$ . Now these ions will be affected by any electrical potential of the moon. We have roughly calculated that the lunar potential should be of the order of 20–25 volts (positive). Therefore any (positive) krypton or xenon ion that happens to be formed within the region where the potential is not yet screened will be expelled. The screening distance has been calculated [7] and is of the order of 20 meters. This length may be compared with a characteristic scale height for krypton and xenon which is of the order of 20 km. The lifetime of the krypton and xenon ions can now be calculated and it turns out to be about 1000 years; hence, the exosphere cannot survive.

We have considered [7], in addition, the effect of a solar corpuscular stream on such a krypton and xenon exosphere. We find that the solar corpuscular stream causes additional ionization of the xenon and krypton atoms in their ballistic orbits, and would increase the degree of ionization by about a factor 2.5. This in turn increases the electron density in the vicinity of the moon and reduces the screening length to about 4 meters. Hence the lifetime of the krypton-xenon exosphere is increased to about 3000 years.

Our final conclusion is that an independent lunar atmosphere, i.e. one that evolves from the moon, cannot exist, even if it consists of heavy gases such as krypton and xenon. Hence a lunar gaseous envelope is entirely determined by the surrounding interplanetary medium.

## IV. External Sources of a Lunar Atmosphere

The presence of a lunar atmosphere as a gravitational condensation of interplanetary gas has been discussed by FIRSOFF [9] and by BRANDT [10]. The two authors are in disagreement on many points and a detailed account of their controversy has been published. However, both treatments are fundamentally wrong on theoretical grounds. Consider the idealized case in which magnetic and electric fields are considered absent; both FIRSOFF and BRANDT give the distribution of density of a gravitationally accreted atmosphere around a center of force by a barometric formula of the type

$$N(r)/N_{\infty} = \exp(Y) \quad (2)$$

where  $Y = GMm/(rkT)$ . However, the correct distribution for a pure exosphere (where the particles do not collide with each other, i.e. where the mean length of path exceeds the radius of the planet) is calculated as follows:

$$N(r)/N_{\infty} = 2\pi^{-1/2} [Y^{-1/2} + (\exp Y) \cdot \int_Y^{\infty} \exp(-x^2) dx] \quad (3)$$

When the temperature  $T$  is high (and  $Y$  is small), the difference between Eq. (2) and our Eq. (3) is not significant. However, for large values of  $Y$ , i.e. for low temperatures or for larger values of the molecular mass, Eq. (2) yields the spurious high concentration of atmospheric density in the vicinity of the moon [9].

Actually, the contribution to the density by the gravitationally accreted incoming component of interplanetary gas may be at times negligible in comparison to the outgoing component. We may expect that the fast particles, after striking the surface of the moon, will be accommodated. They will lose their charge, if any, and when leaving the surface as neutral atoms or molecules will have a much lower temperature, greater molecular weight and hence a larger value of  $Y$  than the incoming gas. (In this respect at least, BRANDT's more recent criticism of FIRSOFF's work is unjustified.) As has been pointed out by GOLD [11], it is the component accommodated to the lunar surface temperature which contributes chiefly to the atmospheric density near the surface.

It is tempting to make an estimate of the atmospheric density near the moon based on our best present knowledge of the properties of the interplanetary gas [12], [13]. We may view it as the exosphere of the solar corona and adopt values  $N_{\infty} \sim 10/\text{cm}^3$  for the density [14] and  $u \sim 40$  km/sec for the outward velocity of the solar protons<sup>1</sup>. These are approximate quiescent values and probably increase by a couple orders of magnitude during solar eruptions.

The accretion rate is therefore given approximately by

$$N_{\infty} \cdot u \pi R_M^2 (1 + v_{\infty}^2/u^2) \sim 4 \times 10^7 \pi R_M^2.$$

Because of the rough nature of the lunar surface we may consider the accommodation coefficient to be of the order of unity. In any case, any inaccuracy in this coefficient is far outweighed by the uncertainty in  $N_{\infty}$ .

<sup>1</sup> The reason for the low velocity of 40 km/sec stems from the fact that the base of the solar exosphere is located at a fairly high level where the temperature of the solar corona may have dropped considerably below the value of one to two million degrees in the inner corona. Actually, the problem is complicated by the fact that the collision cross section of the ions depends on their velocity so that different parts of the Maxwellian distribution have essentially different bases of an exosphere. The problem has been considered in greater detail elsewhere.



The escape flux from the sunlit hemisphere is given by [13]

$$2\pi R_M^2 N_0 (kT/2\pi m)^{1/2} (1 + Y_0) \exp(-Y_0)$$

where  $Y_0 = GMm/(R_M kT)$  and turns out to be 0.85. The value of  $N_0$  found by equating these two rates turns out to be 80 H-atoms/cm<sup>3</sup>. The sealevel density at the earth, for comparison, is  $2.69 \times 10^{19}$  molecules per cm<sup>3</sup>.

### V. Conclusion

We have calculated the average permanent gas density in the vicinity of the lunar surface as about 80 hydrogen atoms per cm<sup>3</sup>. During eruptions of solar gas the density may rise to  $4-40 \times 10^4$  per cm<sup>3</sup> for a few hours, assuming a solar stream of density  $10^2-10^3$  per cm<sup>3</sup> and velocity 2000 km/sec.

Of course, any release of gas, whether volcanic or by meteoritic impact, or perhaps manmade, will temporarily enhance the atmospheric density near the moon.

### References

1. A. DOLLFUS, C. R. Acad. Sci. **234**, 2046 (1952).
2. J. N. LIPSKIJ, Publ. Sternberg Astronom. Inst. Moscow **22**, 66-123 (1953).
3. E. J. ÖPIK, Irish Astronom. J. **3**, 137-143 (1955).
4. B. ELSMORE, Radio Observations of the Lunar Atmosphere. Philos. Mag. **2**, 1040-1046 (1957).
5. L. SPITZER, The Terrestrial Atmosphere Above 300 km, in: The Atmosphere of the Earth and Planets, edited by G. P. KUIPER, p. 241. Chicago: University Press, 1952.
6. W. F. EDWARDS and L. B. BORST, Possible Sources of a Lunar Atmosphere. Science **127**, 325-328 (1958).
7. E. J. ÖPIK and S. F. SINGER, Escape of Gases from the Moon. J. Geophysic. Res. **65**, 3065-3070 (1960).
8. J. R. HERRING and A. L. LICHT, The Solar Wind, in: Proceedings of COSPAR Symposium, Nice, January 1960. Amsterdam: North Holland Publishing Co., 1960.
9. V. A. FIRSOFF, Dissipation of Planetary Atmospheres. Science **130**, 1337-1378 (1959).
10. J. C. BRANDT, Density of the Lunar Atmosphere. Science **131**, 1606 (1960).
11. T. GOLD, J. Geophysic. Res. **64**, 1798 (1959).
12. J. W. CHAMBERLAIN, Interplanetary Gas: II. Expansion of a Model Solar Corona. Astrophysic. J. **131**, 47-56 (1960).
13. E. J. ÖPIK and S. F. SINGER, Distribution of Density in a Planetary Exosphere. Physic. Fluids **3**, 221-233 (1961).
14. D. E. BLACKWELL, Reported at the National Academy of Sciences, Washington, April 27, 1960.



# Predictions of Cosmic Ray Storms from Geomagnetic Data

By

A. E. Sandström<sup>1</sup>

(With 6 Figures)

(Received March 1, 1961)

## Abstract — Zusammenfassung — Résumé

**Predictions of Cosmic Ray Storms from Geomagnetic Data.** The FORBUSH decrease, marking the start of a cosmic ray storm, is normally associated with the sudden commencement of a geomagnetic storm. A study has been made concerning the possibility to predict the former from the latter with a time lag allowing for the preparations of high altitude studies.

**Über die Vorhersage von Stürmen kosmischer Strahlung aus geomagnetischen Werten.** Die FORBUSH-Abnahme, die den Beginn eines Sturms der kosmischen Strahlung kennzeichnet, ist normalerweise mit dem plötzlichen Beginn eines geomagnetischen Sturms verbunden. Es wird nun untersucht, inwieweit es möglich ist, daraus Vorhersagen zu treffen.

**Prédiction d'orages cosmiques à partir de données géomagnétiques.** Avant un orage cosmique, la chute de FORBUSH est généralement accompagnée du brusque développement d'un orage magnétique. Une étude a été faite pour tenter d'établir une corrélation entre les deux phénomènes avec un délai permettant la préparation de sondages à haute altitude.

## I. Introduction

The common type of cosmic ray storm (C.R.S.) starts with a more or less sudden drop in the cosmic ray intensity called a FORBUSH decrease (F.d.) [1]. The latter is followed by a period of low intensity and, finally by a slow regression (Fig. 1). Usually the decrease is associated with one of the geomagnetic disturbances known as storm sudden commencements (s.s.c.) [2]. It is most prominent in the nucleonic component. Most decreases can be observed also in the meson component which fact indicates that the corresponding variations of the primary radiation are not confined only to particles belonging to the lowest region of the rigidity spectrum. Registrations below ground have revealed that sometimes even fairly high rigidities are included [3].

The apparent correlation between the F.d. and an adjacent s.s.c. has lead to discussions as to the true relationship between cosmic ray storms and magnetic storms. A long series of investigations appear to have proved that although the two phenomena are correlated neither of them depends directly on the other. Apparently they are both due to the same cause.

<sup>1</sup> Cosmic Ray Group, Institute of Physics, Uppsala University, Uppsala, Sweden.

Recent satellite observations have shown that the cosmic ray storm exists in space far off from the Earth. The space probe Pioneer V, launched on March 11, 1960 registered the F.d. on March 31 on a distance of  $8 \times 10^6$  km from the Earth [4]. Therefore it appears to be established that cosmic ray storms are not confined to the immediate vicinity of the Earth.

The C.R.S. are in themselves of a very interesting nature with a variation as to type, frequency, and duration difficult to systematize. Moreover, other

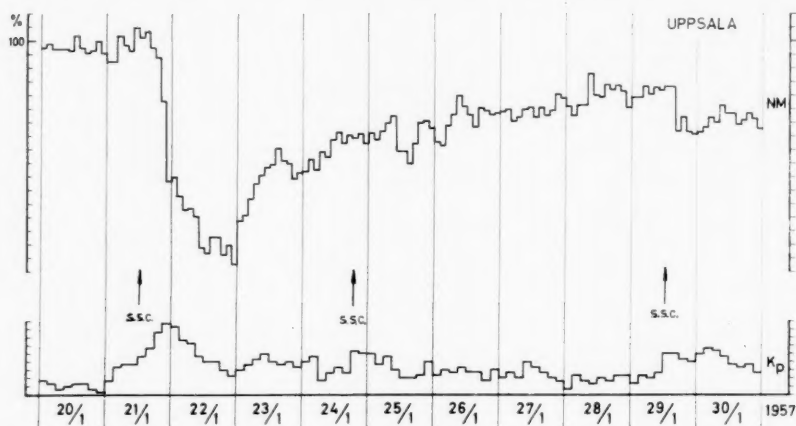


Fig. 1. A very prominent and typical FORBUSH decrease. The cosmic ray storm displays a very well defined minimum and a slow recovery. It is of an unusually long duration. Mark the two small FORBUSH decreases during the recovery period. The arrow indicates the sudden commencement

phenomena have been observed during the C.R.S. Registrations by balloon-borne instruments [5] as well as the Pioneer V experiment [4] have revealed an increased inflow of particles during part of the fully developed C.R.S., although no simultaneous increase could be detected at the surface of the Earth. This inflow appears inside one hour after a solar flare. It has to be regarded as a C.R. solar flare effect consisting of particles lacking the energy to penetrate far enough into the atmosphere to generate secondaries observable at the Earth's surface. The possibility of such phenomena appearing during a C.R.S. as well as the phenomenon of the storm itself makes it desirable to have as many opportunities as possible to observe the intensity variations in space during such storms. Therefore, it might be profitable to investigate the possibility of predicting the onset of cosmic storms by means of the sudden commencements.

## II. Primary Data

The present survey is based upon primary bihourly data collected at the cosmic ray station in Uppsala ( $59.9^\circ$  N  $18.0^\circ$  E, geomagn. lat.  $58.6^\circ$ ). The nucleon component was recorded by means of a standard neutron pile monitor [6]. The meson component was registered with standard cubical counter telescopes [7] and with counter telescopes pointing east and west with  $30^\circ$  zenith angles. The registrations cover the period Aug. 31, 1956—Dec. 31, 1959. The data were corrected for atmospheric effects by means of barometer coefficients [6]. The data concerning sudden commencements were taken from tables published in Journal of Geophysical Research. Altogether 48 C.R.S. are included in the survey.

### III. Start and Development of a Cosmic Ray Storm

Fig. 1 illustrates the main features of a very prominent C.R.S. The ordinate represents the cosmic ray intensity in per cent of the mean intensity before

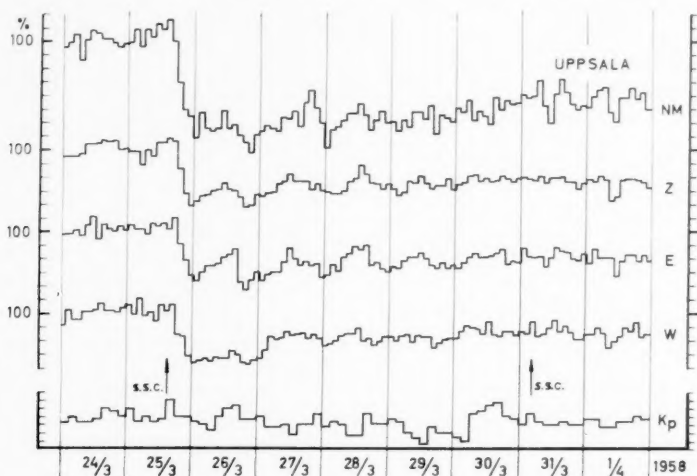


Fig. 2. A general type of cosmic ray storm. The letters to the right indicate: NM nucleonic component, Z meson component from standard counter telescopes, E and W meson component from telescopes inclined  $30^\circ$  from the zenith to the east and west. The arrow indicates the sudden commencement

the F.d. In Fig. 2 the features of a more common type of storm are displayed. The meson component has been included for comparison. The F.d. is well defined in both cases. A badly defined decrease is shown by Fig. 3. It is barely recognizable in the records of the meson component.

It is always difficult to determine the onset time of a F.d. accurately. In a case as that illustrated by Fig. 3 the determination becomes even more difficult. It happens that the onset time cannot be determined with an accuracy better than  $\pm 6$  hours. A natural definition of the onset time ought to be as the point in the intensity time curve where the intensity starts to decrease definitely. However, the statistical fluctuations tend to obscure the starting point of the decrease even in bihourly diagrams where we do not demand an accuracy better than  $\pm 2$  hours. When time intervals are selected as short as a quarter of an hour the statistical fluctuations rapidly grow to a level

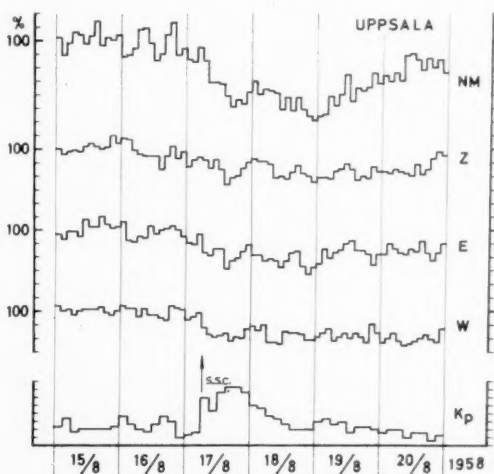


Fig. 3. A small and diffuse FORBUSH decrease, scarcely detectable in the records of the meson component. Compare text under Fig. 2. The arrow indicates the sudden commencement

where they counteract what can be gained through the shorter time intervals. The daily variation obscures the starting point also. LOCKWOOD [8] defines the onset time as the middle of the first time interval during which the intensity attains a value of at least one per cent below the normal level. The fallacies of this definition are apparent. The daily variation usually has an amplitude of some tenths of a per cent, but especially as regards the nucleonic component the amplitude for single days can mount to the order of magnitude of one per cent. Therefore, despite this definition it is still possible that the onset point might be displaced by the daily variation.

A scanning of the diagrams of FORBUSH decreases reveals that in most cases there is a time interval displaying a maximum gradient. The center of this maximum gradient can be determined far better than the onset time. When comparing with the time of a s.s.c. we will therefore refer to the center of the maximum gradient. As will be shown the lapse of time between a s.s.c. and the maximum gradient is in most cases sufficiently long to make the error insignificant even when the middle of the maximum gradient is being read from bihourly diagrams such as those in Figs. 1 to 3.

It happens that several sudden commencements precede a F.d. If the distances to the F.d. are considerable the most adjacent s.s.c. has been selected. There are some exceptions, i.e. when the most adjacent s.s.c. was observed by only a couple of stations while another one close by was recorded by more than five stations. Then the latter has always been preferred. When several s.s.c:s have happened one upon another very close to a F.d. the earliest one in the group has been preferred.

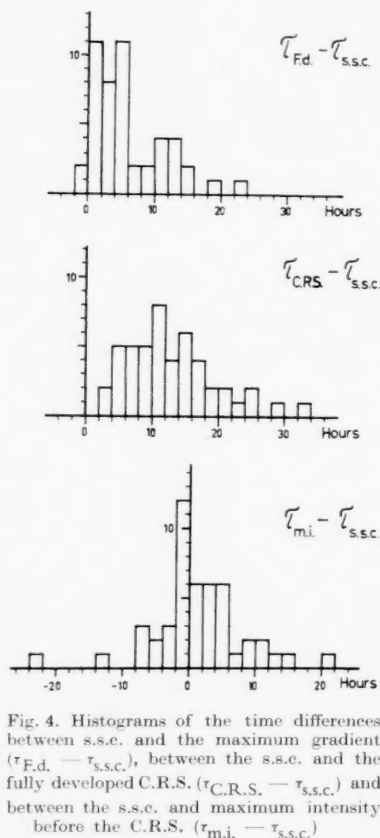


Fig. 4. Histograms of the time differences between s.s.c. and the maximum gradient ( $\tau_{Fd} - \tau_{s.s.c.}$ ), between the s.s.c. and the fully developed C.R.S. ( $\tau_{CRS} - \tau_{s.s.c.}$ ) and between the s.s.c. and maximum intensity before the C.R.S. ( $\tau_{mi} - \tau_{s.s.c.}$ )

Fig. 4 offers a histogram of the time intervals between the s.s.c. and the maximum gradient. Bihourly intervals were chosen as the error in time can be  $\pm 2$  hours as concerns the maximum gradient. The time of a s.s.c. is known to the minute.

The point of minimum intensity during a C.R.S. is difficult to determine from the same reasons as the onset time. If the minimum is broad the time, as read from the diagrams of the nucleonic component, will differ from that found for the meson component. Apart from the statistical fluctuations this difference is probably due to the influence of the daily variation. The latter differs in amplitude as well as to phase between the two components. However, in the present survey the minimum is important, only for one reason. Provided it does not follow too far from the F.d. it can be regarded as the point where the C.R.S. has become fully developed. The variations of the time interval between

the s.s.c. and the full development of the accompanying C.R.S. are illustrated by the third histogram in Fig. 4. In cases where the minimum was broad or too far from the F.d. the final end of the slope was selected as the point of complete development of the C.R.S.

Another feature of interest is the duration of the C.R. storms. Many of them last up to a couple of weeks. However, there are several with an extremely short regression period. Of the storms considered in the present survey about 25 per cent had a duration of less than 5 days, while 34 per cent lasted between 5 and 10 days. Only 10 per cent lasted up to 15 days. Those of a duration exceeding 15 days are too few to offer a significant figure.

#### IV. Predecreases and Onset Times

The widths of the decreases vary within wide limits. Accordingly no conclusions can be drawn from Fig. 4 as to the position of the onset time relative to the s.s.c. In many cases the problem is complicated by the existence of a predecrease.

The predecrease might consist of a small drop in the intensity followed by a maximum before a well developed main F.d. Sometimes the intensity drop is lacking. In single cases the maximum can attain several per cent above the normal level. It is possible that a predecrease of the former type is a very badly developed F.d. of the ordinary kind. The upper diagram in Fig. 5 illustrates a case where this predecrease is accompanied by a s.s.c. As in a few cases rather prominent decreases have been recorded without a preceding s.s.c., the absence of a s.s.c. does not contradict the assumption that a predecrease of the type in question really is a small F.d.

In many instances the decrease starts directly from the normal intensity level. However, in such cases statistical fluctuations and the daily variation supply a kind of statistical maximum in the vicinity of the F.d. We regard this maximum as a substitute in cases where there is no maximum of the predecrease type. Thus including all C.R.S.'s we get the third histogram in Fig. 4. As can be seen in more than half the number of cases the s.s.c. precedes the intensity maximum. This appears to dispose of the idea that, as a rule, the onset time coincides with the s.s.c.

#### V. Sudden Commencements and Forbush Decreases

It is a fact that there are a considerable number of s.s.c.'s not followed by any F.d. For reasons of estimating the probability of a s.s.c. being associated with a F.d. it is necessary to decide if there are any s.s.c.'s which can be excluded from the discussion.

According to BACHELET et al., when a C.R.S. is fully developed the sudden commencements appearing during the remainder of the storm are usually not followed by any further FORBUSH decreases [9]. In case a decrease takes place it will be less prominent than the first one. This is a rule with many exceptions,

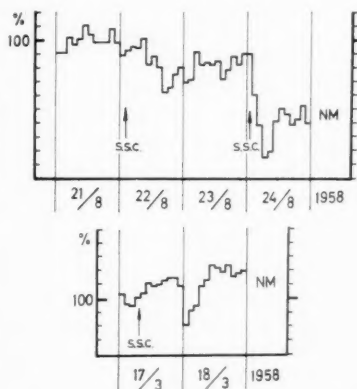


Fig. 5. The upper diagram illustrates a FORBUSH decrease with a predecrease. The lower diagram displays a FORBUSH decrease of unusually short duration in March 1958. The arrows indicate the sudden commencements

e.g. the July events of 1959, where 3 decreases followed one upon the other. Of these the second one was the most prominent. There are many other cases with a series of new decreases before the intensity returned even to the vicinity of its normal level. It is possible, however, that such decreases tend to be easily obscured by the big intensity fluctuations which are common during cosmic ray storms. It is also possible that many of them are too small to be observed at all. There are also several instances of two comparatively prominent decreases following closely one upon the other. According to BACHELET *et al.* decreases occurring during the return stage of a C.R.S. are less sharp and well developed than the initial one. Nevertheless, the prominent decrease illustrated by Fig. 1 was followed by two very steep decreases, one on the 25th and one on the 29th.

The small decreases appearing during the return to normal conditions after a prominent C.R.S. might be of considerable interest. They ought to be studied far off from the Earth where we can expect them to be recognized more easily. They also indicate the existence of interesting features in the process of plasma from the sun streaming into the region around the Earth. However, if a prominent F.d. is expected because of a preceding s.s.c. it will be natural to launch rockets during the whole stretch of the crucial period. Thus there are no practical reasons why we should be interested in the sudden commencements appearing while a C.R.S. is still in progress. This rules out all s.s.c.s following upon the one preceding the first F.d. It is advisable, also, to confine the discussion to s.s.c.s observed by more than five stations. This has the advantage to limit the survey to events with a high probability of being observed by any geomagnetic station.

As already mentioned, some decreases are preceded by a group of s.s.c.s. Naturally such a group has to be counted as one single event. On the other hand we exclude six C.R.S.s which, apparently, were not accompanied by any s.s.c. within a reasonable distance from the F.d.

After these exclusions there remains 121 s.s.c.s and 48 C.R.S.s. Thus roughly 40 per cent of the former were followed by a C.R.S. This is in accordance with the results by BACHELET *et al.* [9]. The aspects become more favourable if we take into account the magnetic storm associated with the s.s.c. A typical such storm consists of a s.s.c., an initial phase, a main phase, and a slow recovery. If we exclude storms without a s.s.c. the remainder can be divided into three categories: those displaying all the phases, those lacking the main phase, and an anormal type characterized by very irregular variations following immediately upon the s.s.c. BACHELET *et al.* have found that in 80 per cent of all cases magnetic storms of the first two types are associated with C.R.S.s. It does not seem to matter if the main phase is missing. The irregular magnetic storms appear not to be associated with C.R.S.s.

## VI. The Character of Cosmic Ray Storms

For the planning of investigations during a C.R.S. it would be of interest to be able to predict the character of the decrease and, if possible, the following C.R.S. BACHELET *et al.* have divided the C.R.S.s into three main types (I, II, and III) according to the sharpness and steepness of the decrease [9]. Storms with a less well defined F.d. were collected in a fourth class, Type X. At present there does not appear to be any means of predicting these types of storms from the character of the s.s.c.s.

BACHELET *et al.* point out that there is a very high correlation of C.R.S.s with sudden commencements. In the records from Uppsala only 6 storms out of a total of 55 appear not to be associated with any s.s.c.



A few C.R.S:s are of exceptionally short duration. Mostly they are to be found during the recovery stage after a storm of normal length. They are characterized by a steep and, usually, small F.d. followed by a rapid recovery. In most cases the F.d. is preceded by a s.s.c. A single storm of short duration was recorded on March 17—18, 1958 (Fig. 5). Apparently it was not associated with any preceding storm although it took place during a period of increasing C.R. intensity. It is remarkable because of a well developed F.d. and a duration of only 12 hours. The storm next before started on Feb. 10. The reality of this C.R.S. is verified by its appearance with essentially the same features in the meson component not only in the records from the Uppsala station but also

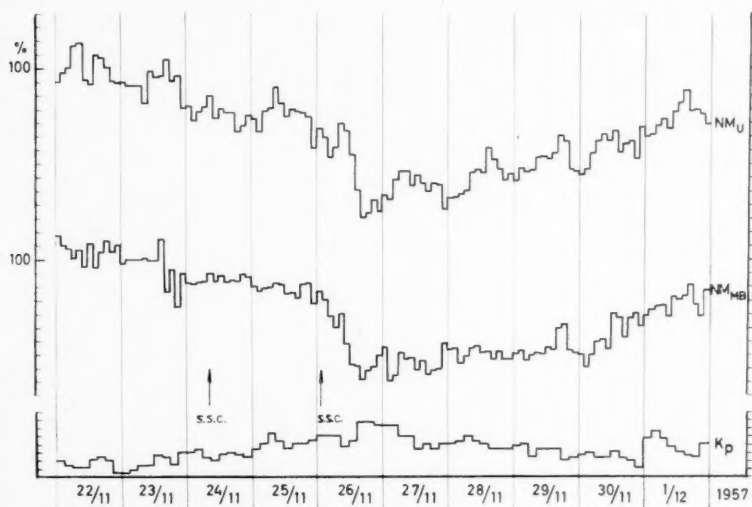


Fig. 6. Diagram of a FORBUSH decrease following a sudden commencement during the progress of a magnetic storm. For lettering, see text to Fig. 2

in the records from the C.R. stations at Kiruna and Murchison Bay. It is recognizable also in the neutron monitor records from most stations. An event of this kind is very interesting in itself. Observations far out from the Earth would help to understand what really is happening. This is an illustration of the desirability not to restrict balloon and rocket experiments to prominent C.R.S:s, only.

When a s.s.c. and an associated F.d. happen during a magnetic storm already in progress very often the F.d. is small and badly defined (Type X of BACHELET et al.). Even if it is of a normal character the C.R.S. can be affected by a general decrease in C.R. intensity associated with the progress of the magnetic storm (Fig. 6). Somewhere on the downward slope or in the minimum region of the intensity time curve there is a period with a maximum gradient. Should the whole slope be included in the F.d. the s.s.c. succeeds the onset of the C.R.S. If the start of the maximum gradient marks approximately the onset of the F.d., the storm belongs to a type of combined intensity decreases which has been discussed by McCracken [10]. According to him the F.d. with the following C.R.S. is superimposed upon the general intensity variation associated with the magnetic storm.

Records of the H-component from Uppsala Ionosphere Observatory were



scrutinized for some correlation between the magnitude and general appearance of the s.s.c. and the character of the associated C.R.S. However, no such correlation could be traced. Likewise, there is no apparent correlation between the amplitude of the s.s.c. and the prominence of the associated F.d. This is natural since the characteristic figures of the former are dependent on the coordinates for the points where they are being recorded. A prominent F.d. appears to be associated with a prominent s.s.c., but this is by no means a general rule.

## VII. Discussion

From the histogram  $\tau_{m.i.} - \tau_{s.s.c.}$  in Fig. 4 it is evident that there are at least two hours between the s.s.c. and the full development of a C.R.S. On an average there will be 5 to 15 hours for preparations. This offers time also for deciding the importance and type of the storm if at the same time records of the variations of the nucleon component are being followed closely.

There is far less time for preparations if observations are contemplated also concerning the initial part, i.e. the F.d. Excluding the rare cases when the decrease has started already before the s.s.c. we find that the average lapse of time between the latter and the middle of the F.d. is 3 hours. Accordingly there is only a small chance of observing the onset in the upper parts of the atmosphere or in the space surrounding the Earth without some kind of continuous recording. This is especially true concerning the most prominent decreases which usually follow very closely upon the s.s.c.

The first histogram in Fig. 4 indicates that there are two cases where the s.s.c. coincides or comes later than the maximum gradient. One of these cases is of special interest as it concerns the prominent decrease of May 11, 1959. BACHELET et al. have commented upon this decrease which appears to be the first one observed where beyond doubt the s.s.c. followed after the onset of the F.d. [11]. A scrutiny of the records of the nucleon and meson components in Uppsala as well as those of the meson component in Kiruna reveals the same early onset of the F.d. relative to the s.s.c.

In the other case, June 28, 1958, there are two sudden commencements with a time difference of 10.5 hours. After the first s.s.c. there is a considerable intensity increase especially in the nucleon component. The F.d. is fairly prominent. It appears to start directly from maximum intensity with the second s.s.c. ( $6 \pm 1$ ) hours after this maximum. In this case it is possible that the decrease ought to have been correlated to the first one of the two sudden commencements.

From the histogram  $\tau_{F.d.} - \tau_{s.s.c.}$  in Fig. 4 it appears as if there was a second maximum between 10 and 14 hours. Five out of the eight decreases in this period are to be considered as prominent. One of the other three is the F.d. of remarkably short duration already commented upon (Fig. 5). This tends to show that it might be profitable to launch a series of experiments concerning a period of more than 10 to 15 hours after a s.s.c.

The fact that, even when certain s.s.c.'s have been ruled out, only 40 per cent of the latter are followed by interesting C.R. intensity variations makes it desirable to find some way of deciding if a s.s.c. will be associated with a C.R.S. or not. At present this does not appear to be possible. A small statistical survey displays that in general a s.s.c. associated with a F.d. is preceded by a period lacking sudden commencements. Between Sept. 1956 and Dec. 1959, inclusive, this period was never less than two days. In 80 per cent of the cases it was more than four days. In this scrutiny s.s.c.'s observed by less than five stations were not excluded.

Thus it can be considered as a rule that the longer the period has been without a s.s.c. the higher the possibility that the next s.s.c. will be followed by a C.R.S.

If the time allows, the development of the magnetic storm can be followed for predictions as to an associated C.R.S. According to the results of BACHELET et al. cited above, there is an 80 per cent chance of a C.R.S. when the s.s.c. develops into a regular magnetic storm with at least an initial phase. It has to be remembered that this figure is applicable only if all s.s.c.s are excluded which take place during a C.R.S. already in progress or during its recovery stage. It is a serious drawback that the time it takes the magnetic storm to develop is too long, generally, for predictions as to an associated C.R.S.

The development of the decrease can be employed as a complement to the predictions from geomagnetic records. However, for this purpose the registrations of the nucleonic component have to be treated with the least possible loss of time. The neutron monitor records have to be corrected for atmospheric effects. At most C.R. stations this is being done after collecting data for a considerable period. It would be necessary to arrange for continuous corrections for at least 15 hours following a s.s.c. supposed to be associated with a C.R.S. Naturally, we can dispense with these considerations if a gadget is being attached to the monitor automatically correcting for the variations in atmospheric pressure.

#### References

1. S. E. FORBUSH, *Physic. Rev.* **51**, 1108 (1937).
2. S. CHAPMAN and J. BARTELS, *Geomagnetism*. Oxford 1940.
3. N. R. PARSONS, Private Communication.
4. C. Y. FAN, PETER MEYER and J. A. SIMPSON, *Physic. Rev. Letters* **5**, 269 (1960).
5. K. A. ANDERSSON, R. ARNOLDY, L. PETERSON and J. R. WINCKLER, *J. Geophysic. Res.* **64**, 1133 (1959).
6. J. A. SIMPSON, W. FONGER and S. B. TREIMAN, *Physic. Rev.* **90**, 934 (1953); A. E. SANDSTRÖM and S. LINDGREN, *Ark. Fysik* **16**, 137 (1959).
7. Bulletin d'Information n:o 4 du Comité Spécial de l'Année Geophysique Internationale, p. 158 (1955).
8. J. A. LOCKWOOD, *Physic. Rev.* **112**, 1750 (1958).
9. F. BACHELET, P. BALATA, A. M. CONFORTO and G. MARINI, *Nuov. Cim.* **16**, 292 (1960).
10. K. G. McCracken, Thesis, University of Hobart, Tasmania, 1959.
11. P. BALATA, F. BACHELET, A. M. CONFORTO, N. IUCCI and G. MARINI, *Nuov. Cim.* **13**, 1055 (1959).

Vol.  
7  
1961

# Erzeugung von Plasmastrahlen hoher Temperaturen und Geschwindigkeiten

Von

Th. Peters<sup>1</sup>

(Mit 18 Abbildungen)

(Eingegangen am 6. März 1961)

## Zusammenfassung — Abstract — Résumé

**Erzeugung von Plasmastrahlen hoher Temperaturen und Geschwindigkeiten.** Nach einem kurzen historischen Überblick über die Physik des thermischen Plasmas werden verschiedene Lichtbogen-Brennkammern beschrieben, in denen bei kontinuierlichem Betrieb hohe Plasmatemperaturen und Plasmaströmungsgeschwindigkeiten erreicht werden können. Die Bedeutung der astrophysikalischen Forschung für die Plasmaphysik wird besonders hervorgehoben.

**Generation of Plasma Jets Having High Temperatures and Velocities.** Following a brief historical survey concerning the physics of thermal plasmas several types of electric arc chambers are discussed, by means of which high plasma temperatures and plasma jet velocities are available with continuous operation. In particular, the significance of astrophysical research for plasma physics is emphasized.

**Réalisation de jets de plasma à températures et vitesses élevées.** Après une courte vue générale historique sur la physique du plasma thermique, différentes chambres à l'arc électrique sont décrites, dans lesquelles des températures et vitesses de plasma élevées peuvent être réalisées en marche continue. L'importance de la recherche astrophysique pour la physique du plasma est soulignée.

## I. Plasmaphysik und Magnetogasdynamik

In dem vorliegenden Bericht über die Methoden zur Erzeugung schnellströmender Plasmen soll ausschließlich von *stationären* Strömungen *thermischer* Plasmen die Rede sein. Nicht behandelt werden hier dementsprechend die bei Explosionen, Stoßwellen und Funkenentladungen *kurzzeitig* auftretenden Plasmen und die in Niederdruck-Entladungen sich aufbauenden *nichtthermischen* Plasmen, bei denen die Temperatur der freien Elektronen weit über der Gastemperatur liegt.

Thermische Plasmen finden wir in den stationären elektrischen Entladungen bei Gasdrücken über 0,1 Atmosphären, da dann die Häufigkeit der Stöße zwischen den energieübertragenden Elektronen und den schweren Gasparkeln für einen Ausgleich zwischen Elektronen- und Gastemperatur sorgt. Eine Reihe von Untersuchungen hat ergeben, daß dann (zumindest innerhalb der Meßfehlergrenzen) auch die Anregungszustände der Atome und Ionen entsprechend der BOLTZMANN-Verteilung besetzt sind.

<sup>1</sup> Forschungsinstitut für Physik der Strahlantriebe e. V., Stuttgart-Vaihingen, Allmandstraße 124, Bundesrepublik Deutschland.

Ein thermisches Plasma stationär aufrechtzuerhalten, gelang bisher nur mit Hilfe des *elektrischen Lichtbogens*, da einerseits der Energieinhalt chemischer Brennstoffe unzureichend ist, um die Verbrennungsgase so hoch zu heizen, daß von einer merklichen Ionisation gesprochen werden kann<sup>1</sup>, und andererseits noch keine praktische Lösung des Problems gefunden ist, Gase mittels Kernreaktionen stationär auf Plasmatemperaturen aufzuheizen.

Die Plasmaphysik des Lichtbogens hat, historisch betrachtet, das Interesse recht verschiedenartiger Disziplinen in Physik und Technik gefunden. Ausgehend von DAVYS und RITTERS ersten Lichtbogenexperimenten (etwa um 1808) ist im vorigen Jahrhundert vornehmlich die auffälligste Eigenschaft des Plasmas, die intensive Lichtausstrahlung, zum bevorzugten Untersuchungsobjekt geworden und zu technischer Anwendung in der Bogenlichtbeleuchtung gekommen. Diese Entwicklungsrichtung gipfelt in den heute verfügbaren Quecksilber- und Edelgas-Hochdrucklampen und in den Scheinwerferlichtbögen.

Bemerkenswert ist, daß diese Lichtbogenlampen erst von jenem Zeitpunkt an auf optimale Betriebsbedingungen gebracht werden konnten, als quantitative Theorien über die Strahlungseigenschaften von Plasmen ausgearbeitet waren. So kam es, daß die Gasentladungsphysiker erst in den dreißiger Jahren rasche Fortschritte in der Entwicklung von intensiven Lichtquellen machen konnten, nachdem in den beiden Jahrzehnten zuvor die Quantentheorie der Strahlung und des Atombaus entstanden war. Als von ganz entscheidender Bedeutung erwies sich die Theorie der thermischen Ionisation von SAHA und EGGERT (1920), die überhaupt erst eine quantitative Plasmaforschung ermöglichte.

Es ist nicht uninteressant, in diesem Zusammenhang den parallelen Entwicklungsgang in der Astrophysik zu verfolgen, denn die vielfältigen Beziehungen zwischen den Problemen der Astrophysiker und denen der Gasentladungsphysiker haben insbesondere in den beiden letzten Jahrzehnten zu einer fruchtbaren Zusammenarbeit und zum gegenwärtigen Stand der Plasmaphysik geführt. Sternspektroskopie und theoretische Berechnungen über den Aufbau des Sterninnern hatten deutlich gemacht, daß die Sterne Plasmakugeln unterschiedlicher Größe und Oberflächentemperatur sind. Aber erst SAHA konnte auf Grund seiner Theorie, in Verbindung mit den bis dahin bekannten Gesetzen der Linienstrahlung, die Sternspektren richtig deuten. Eine quantitative Analyse der Sternatmosphären hinsichtlich ihrer chemischen Zusammensetzung und der physikalischen Zustandsgrößen (Temperatur, Druck usw.) begann etwa zur gleichen Zeit, als die Gasentladungsphysiker die Bogenlichtquellen quantitativ durchforschten [1]. Die Plasmaphysik im Laboratorium wurde nun zur „experimentellen Astrophysik“, und die Astrophysiker konnten ihre Theorien an den Entladungsplasmen prüfen [2].

Hatte bis dahin die Spektroskopie und somit die Messung der thermischen Zustandsgrößen von Stern- und Entladungsplasmen im Vordergrund des Interesses gestanden, so gewann bald die *Dynamik des Plasmas*, angeregt durch das Studium der Bewegungsvorgänge in der Sonnenatmosphäre und im interstellaren Gas, in wachsendem Umfang an Bedeutung. Dieser neue Zweig der Plasmaphysik, der zu Beginn verschiedenartig getauft wurde (Kosmische Elektrodynamik [3], Magnetohydrodynamik [4], Dynamik des Plasmas [5]), stellt recht eigentlich die Fortsetzung der klassischen Gasdynamik in das Gebiet hoher Temperaturen dar und ergab naturgemäß die ersten Berührungspunkte zwischen Astrophysikern und Aerodynamikern [6]. Da das Plasma elektrisch leitend ist, gesellen sich zu

<sup>1</sup> Dieser Umstand führt zu den beträchtlichen Schwierigkeiten bei der Verwirklichung des magnetohydrodynamischen Generators.

den Erhaltungssätzen für Masse, Impuls und Energie, die teilweise elektromagnetische Zusatzglieder erhalten, noch die MAXWELLSchen Gleichungen der Elektrodynamik hinzu.

Den mathematisch einfachsten Zugang zu dieser Magnetogasdynamik gewinnt man über die thermodynamische Theorie irreversibler Prozesse, die zwar keine quantitativen Aussagen über die Transportkoeffizienten machen kann, dafür aber eine geschlossene Übersicht über die generell möglichen Phänomene liefert [7].

Für die Erhaltungsgleichungen (ohne Reibung und Schwerkraft) ergibt die Theorie

$$\text{Masse:} \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho \mathfrak{B} = 0$$

$$\text{Impuls:} \quad \varrho \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \varrho (\mathfrak{B}, \operatorname{grad}) \mathfrak{B} = -\operatorname{grad} p + \frac{1}{c} [\mathfrak{j} \times \mathfrak{B}]$$

Energie:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho \left( \frac{\mathfrak{B}^2}{2} + u \right) = -\operatorname{div} \left\{ \left( \frac{\mathfrak{B}^2}{2} + h \right) \varrho \mathfrak{B} + \mathfrak{B} \right\} + (\mathfrak{j}, \mathfrak{E}) + \varepsilon(\varrho, T) - s(\varrho, T)$$

$\mathfrak{B}$ ,  $\varrho$ ,  $p$  sind die üblichen Bezeichnungen für Geschwindigkeit, Dichte und Druck.  $u$  ist die innere Energie,  $h$  die Enthalpie pro Masseneinheit.  $\varepsilon(\varrho, T)$  sei irgendeine nichtelektrische Energieerzeugung (erg/sec cm<sup>3</sup>) (z. B. durch thermonukleare Reaktionen) und  $s(\varrho, T)$  die ausgestrahlte Energie in denselben Einheiten. Beide Funktionen sind wie  $u$  und  $h$  im allgemeinen abhängig von Dichte und Temperatur des Plasmas.

Die elektrische Feldstärke  $\mathfrak{E}$  und die magnetische Induktion  $\mathfrak{B}$  sind in bekannter Weise verknüpft durch die MAXWELLSchen Gleichungen. Ferner gelten — unter Vernachlässigung von Gliedern, die in dieser kurzen Skizzierung der Theorie nicht weiter interessieren — die linearen Ansätze für die

$$\text{Stromdichte:} \quad \mathfrak{j} = \sigma \left( \mathfrak{E} + \frac{1}{c} [\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}] \right)$$

und für die Wärmestromdichte:

$$\mathfrak{B} = -\kappa \operatorname{grad} T$$

wo  $\sigma$  die elektrische Leitfähigkeit und  $\kappa$  die Wärmeleitfähigkeit darstellt. Beide Materialfunktionen sind ebenfalls dichte- und temperaturabhängig.

Während also die Kontinuitätsgleichung ungeändert bleibt, treten in der EULERSchen Bewegungsgleichung und in der Energiegleichung zusätzliche elektromagnetische Glieder auf, die in Verbindung mit der Stromdichtegleichung zu folgenden allgemeinen Aussagen führen:

1. Das Strömungsfeld eines ionisierten Gases kann durch die elektromagnetische LORENTZ-Kraft  $\frac{1}{c} [\mathfrak{j} \times \mathfrak{B}]$  beeinflusst werden.

2. Wegen der Geschwindigkeitsabhängigkeit der elektrischen Stromdichte (induzierte Ströme), tritt eine Kopplung zwischen dem Magnetfeld und dem Strömungsfeld auf.

3. Ein ionisiertes, elektrisch leitendes Gas kann durch JOULEsche Wärme  $(\mathfrak{j}, \mathfrak{E})$  auf- bzw. nachgeheizt werden.

Erinnert man sich an die mathematischen Schwierigkeiten, die bereits in der klassischen Gasdynamik bei räumlichen Strömungsproblemen auftreten, so gewinnt man einen Eindruck von der Kompliziertheit dieser Theorie, die Hydrodynamik, Thermodynamik und Elektrodynamik in sich vereinigt. Experimentell wurden hydromagnetische Effekte zunächst an flüssigen Metallen, die wir als

„Modellplasmen“ auffassen dürfen, untersucht (z. B. [8]). Hydromagnetische Pumpen zur Beförderung flüssiger Metalle in Kühlkreisläufen von Reaktoren stellten die erste technische Anwendung dieser Theorie dar.

Die ganze Vielfalt der Erscheinungen kommt aber erst zur Geltung bei den Versuchen, mittels elektrischer Entladungen in das Gebiet höchster Temperaturen und extremer Magnetfelder vorzudringen. Alle diese seit etwa einem Jahrzehnt unternommenen Versuche, Temperaturen zu erreichen, die zur Auslösung von thermonuklearen Reaktionen führen, werden zur Zeit noch mit Kurzzeitentladungen durchgeführt und sollen in diesem Bericht nicht behandelt werden.

Während wir so auf der einen Seite der Temperaturskala das experimentelle Vordringen in Temperaturbereiche verfolgen können, die bislang nur dem Sterninneren vorbehalten waren, gewahren wir auf der anderen Seite, ebenfalls seit Jahren, das Eindringen der Gasdynamik in den Temperaturbereich der Plasmadynamik auf Grund der rasch voranschreitenden Entwicklung in der Flugkörpertechnik.

Hier stoßen wir zunächst auf das Problem der *Außenumströmung* schnell fliegender Körper (Hyperschallbereich  $M > 10$ ), insbesondere auf das sogenannte Wiedereintauchproblem der aus dem Weltraum zurückkehrenden und in die Atmosphäre eintauchenden Körper, deren Nasenkegel Temperaturen ausgesetzt sind, wie wir sie zuvor im Laboratorium nur in elektrischen Lichtbögen vorgefunden haben.

Nicht weniger interessant ist das Problem der *Innenströmung* in den Triebwerken. In dem Maße, wie die Fluggeschwindigkeiten zunehmen bzw. zunehmen sollen, werden auch die Ausströmgeschwindigkeiten der Triebwerke anwachsen müssen, wenn erträgliche Massenverhältnisse bzw. Raketenwirkungsgrade eingehalten werden sollen. Der Energiesatz der Gasdynamik ergibt für die Ausströmgeschwindigkeit  $v_a$ , sofern die Geschwindigkeit  $v_0$  im Brennraum vernachlässigt werden kann, was meist der Fall ist,

$$v_a = \sqrt{2(h_0 - h)}$$

wo  $h_0$  die Enthalpie (pro Masseneinheit) in der Brennkammer und  $h$  die Enthalpie des entspannten Gases ist. Bei sehr großen Entspannungsverhältnissen ist  $h \ll h_0$ , und die maximal mögliche Ausströmgeschwindigkeit wird  $v_a = \sqrt{2h_0}$ . Da die chemischen Treibstoffe einen begrenzten Energieinhalt besitzen, ist auch die Ausströmgeschwindigkeit chemisch beheizter Triebwerke begrenzt. Unter Berücksichtigung technisch erreichbarer Entspannungsverhältnisse ergibt sich eine obere Grenze von 4000 bis 4500 m/sec.

Sollen also die Ausströmgeschwindigkeiten erhöht werden, so muß die Enthalpie (bzw. Temperatur) in der Brennkammer erhöht werden. Der Energiesatz der Magnetogasdynamik weist diesbezüglich auf zwei Möglichkeiten hin:

Aufheizung durch

JOULESche Wärme ( $j, \mathcal{E}$ )

oder (und)

Kernreaktionen [symbolisiert durch  $\varepsilon(q, T)$ ].

Darüber hinaus deutet die Bewegungsgleichung auf die Möglichkeit einer zusätzlichen elektromagnetischen Beschleunigung durch das Kraftglied  $\frac{1}{c} [j \times \mathcal{B}]^1$ .

<sup>1</sup> Ein thermisches Plasma ist quasineutral ( $N_e = Z_i \cdot N_i$ , Elektronenkonzentration = Ionenladungszahl  $\times$  Ionenkonzentration). Da somit keine elektrische Raumladung vorhanden ist, besteht auch keine Möglichkeit, ein Plasma durch ein äußeres elektrisches Feld (wie bei den Ionenantrieben) zu beschleunigen.



Beschleunigungsversuche dieser Art wurden mit kondensierten Funkenentladungen bereits durchgeführt (KOLB, BOSTICK u. a.), sie stehen in engem Zusammenhang mit den erwähnten Bemühungen um den Nachweis thermonuklearer Reaktionen in Hochtemperaturplasmen. Inwieweit sich auch Spaltungsreaktionen für eine kontinuierliche Aufheizung von Gasen in den Plasmazustand eignen werden, ist zur Zeit noch Gegenstand einiger theoretischer Überlegungen<sup>1</sup>.

So bleibt, wie schon eingangs erwähnt wurde, für kontinuierliche Betriebsbedingungen beim gegenwärtigen Stand der experimentellen Technik lediglich die Aufheizung durch JOULEsche Wärme im elektrischen Lichtbogen. Da hohe Ausströmgeschwindigkeiten hohe Temperaturen in der Brennkammer voraussetzen, werden wir uns zunächst mit der Erzeugung hoher Temperaturen befassen.

## II. Hohe Temperaturen

Hohe Lichtbogentemperaturen erfordern große Stromdichten, und so hatten bereits 1922 GERDIEN und LOTZ [9] einen Lichtbogen hoher Stromdichte entwickelt,



Abb. 1. Wasserstabilisierter Lichtbogen (Kanalbogen). Aus beiden Kanalenden treten Plasmastrahlen mit hoher Geschwindigkeit aus. Damit die Plasmastrahlen deutlich sichtbar werden, ist die Brennräumeachse aus der Verbindungslinie der Elektroden herausgedreht. (Nach MAECKER [10])

entwickelt, der durch eine Metalldüse eingeschnürt wurde. Um diese Düse vor dem Zerschmelzen zu schützen, ersannen sie den Kunstgriff, Wasser tangential in die Düse einzuspritzen, so daß sich eine rasch rotierende und sich ständig erneuernde Wasserhaut bilden konnte, die die Funktion der Brennräumeachse übernahm. Im Betrieb verdampfen beträchtliche Mengen des kontinuierlich zugeführten Wassers, werden auf Plasmatemperaturen aufgeheizt und strömen mit hoher Geschwindigkeit aus beiden Düsenenden heraus

(Abb. 1). Da die Elektrodendämpfe durch diese Plasmastrahlen fortgeblasen werden, brennt der GERDIEN-Bogen in einem Wasserplasma.

GERDIEN und LOTZ verfolgten das Ziel, eine Lichtquelle besonders hoher Flächenhelligkeit zu schaffen. Vom heutigen Standpunkt aus betrachtet, ist das Wasserplasma von Atmosphärendruck nicht sonderlich dafür geeignet. Tatsächlich haben sie uns aber mit dem Kunstgriff der rotierenden Wasserwand die bis heute noch höchstbelastbare Lichtbogenbrennkammer geliefert.

<sup>1</sup> Das bekannte Projekt „Rover“ mag in diesem Zusammenhang erwähnt werden, obwohl es keine plasmadynamischen Probleme bietet. Da der in einem Spaltungsreaktor aufgeheizte Wasserstoff nicht heißer werden kann als die festen Wände des Wärmeaustauschers, nimmt man etwa 3000° K als maximal erreichbare Temperatur an. Dementsprechend ist der Wasserstoff lediglich teilweise dissoziiert, aber nicht ionisiert. Trotzdem errechnen sich maximale Ausströmgeschwindigkeiten bis zu 10000 m/sec, da die auf die Masseneinheit bezogene Enthalpie des Wasserstoffes wegen des kleinen Molekulargewichts verhältnismäßig hoch liegt.



Indessen waren zu jenem Zeitpunkt keine quantitativen spektroskopischen Temperaturmeßmethoden bekannt, die es ermöglicht hätten, zuverlässige Temperaturangaben zu machen<sup>1</sup>.

Als nun vor etwa zehn Jahren MAECKER [10] und LARENZ [11] unabhängig voneinander das interessante Problem des GERDIEN-Bogens wieder aufgriffen, hatte sich diese Situation außerordentlich gewandelt. Eine ganze Reihe spektroskopischer Temperaturbestimmungsmethoden war unterdessen teils im Laboratorium neu erarbeitet, teils aus der Astrophysik übernommen worden. Insbesondere die Entwicklung der Quecksilber-Hochdrucklampen (s. ELENBAAS) und der Edelgasbögen [12] hatte wesentlich zur Vervollständigung und Erprobung dieser Methoden beigetragen.

Während es sich jedoch bei diesen Lichtbogentypen noch um Plasmen in verhältnismäßig schwachem Ionisationszustand gehandelt hatte, deuteten bereits die ersten Spektren der wasserstabilisierten GERDIEN-Bögen auf sehr hohe Temperaturen und folglich starke Ionisation hin. Und gerade diese — für damalige Begriffe — sehr hohen Temperaturen ermöglichten nun die Anwendung einer einfachen und eleganten Meßmethode, die von LARENZ und BARTELS [13] ausgearbeitet wurde. Sie erkannten, daß die zuerst von SAHA [14] und weiterhin von FOWLER und MILNE [15] entwickelte Methode, die in Verbindung mit SAHAS Theorie der thermischen Ionisation so erfolgreich zur Deutung der Sternspektren geführt hatte, daß gerade diese Methode auch für die Temperaturbestimmung an hochionisierten Bogenplasmen vorzüglich geeignet war.

Das Bemerkenswerte an dieser Methode ist, daß sie nur Relativmessungen erfordert. Die relative Intensität einer Spektrallinie ist, bei Ausstrahlung aus optisch dünner Schicht, gegeben durch die BOLTZMANN-Verteilung

$$i \sim N \cdot e^{-E_m/kT},$$

wo  $N$  die Konzentration derjenigen Atom- bzw. Ionenart angibt, die zur Ausstrahlung der betrachteten Linie befähigt ist und  $E_m$  die Anregungsenergie bedeutet. Betrachten wir beispielsweise ein atomares Gas, das bei konstantem Druck aufgeheizt wird, so steigt die Strahlung eines Volumenelementes rasch mit der Exponentialfunktion an, denn die Atomkonzentration  $N$  nimmt wegen der Gasverdünnung zunächst nur langsam ab ( $\sim \frac{1}{T}$ ). Sobald aber eine hinreichend hohe Temperatur überschritten wird, „stirbt“ die strahlungsfähige Atomart wegen der zunehmenden Ionisierung rasch aus. Die Folge ist, daß die Strahlungsintensität nach Durchlaufen eines Maximumwertes wieder absinkt. Der dem Maximum zugeordnete Temperaturwert läßt sich, sofern der Gasdruck bekannt ist, leicht aus der obigen Gleichung in Verbin-

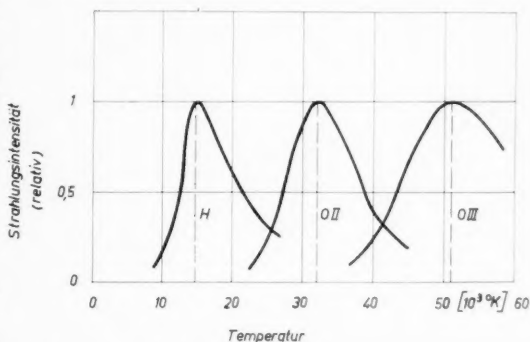


Abb. 2. Relative Strahlungsintensität im Wasserplasma

<sup>1</sup> Rückschauend dürfen wir auf Grund der veröffentlichten elektrischen Daten annehmen, daß GERDIEN und LOTZ Temperaturen von 30000° K erreicht haben.

derung mit der SAHA-Gleichung und der Gasgleichung berechnen. Sind mehrere Atomarten vorhanden, so muß die Zusammensetzung des Plasmas bekannt sein.

Abb. 2 veranschaulicht den relativen Strahlungsverlauf des Wasserplasmas bei Atmosphärendruck als Funktion der Temperatur. Für die Balmerlinien des Wasserstoffs erhält man aus der Rechnung ein Strahlungsmaximum bei  $15000^{\circ}\text{K}$ . Zu höheren Temperaturen hin folgen dann die Maxima der einfach geladenen Sauerstoffionen (OII) bei  $32000^{\circ}\text{K}$  und der zweifach geladenen Sauerstoffionen (OIII) bei  $51000^{\circ}\text{K}$ .

Hätte die Lichtbogensäule eine einheitliche Temperatur anstelle einer radialen Temperaturverteilung, so könnten wir bei verschiedenen Stromstärken eine Reihe von Spektren aufnehmen und dann nachsehen, welches dieser Spektren maximale Intensitäten (bzw. Linienbreiten) der Balmerlinien anzeigt. Der zugehörigen Lichtbogensäule könnte dann eine Temperatur von  $15000^{\circ}\text{K}$  zugeordnet werden. Entsprechend könnten wir mit den Ionenlinien des Sauerstoffs bei höheren Temperaturen verfahren<sup>1</sup>.

Indessen hat die Lichtbogensäule keine einheitliche Temperatur, sondern eine mehr oder minder steile radiale Temperaturverteilung mit einem Temperaturmaximum in der Bogenachse. Das eben beschriebene Verfahren braucht aber nur geringfügig abgewandelt zu werden. Wir stellen fest, bei welchem Radius  $r^*$  im Bogenspektrum ein Strahlungsmaximum auftritt und ordnen dieser Stelle die theoretisch ermittelte Temperatur zu. Darüber hinaus geben Relativmessungen zu beiden Seiten des Maximums Aufschluß über den Temperaturverlauf in der Umgebung.

Auf diese Weise gelangte LARENZ, der aus dem Straßenbahnnetz in Hannover nicht mehr als 500 A entnehmen konnte, bereits über das Strahlungsmaximum der OII-Linien hinaus auf  $35000^{\circ}\text{K}$ . MAECKER und Mitarbeiter fanden zufällig in dem Gleichstromaggregat einer Schiffsentmagnetisierungsanlage in Kiel eine Stromquelle hoher Leistung und konnten mit 1500 A und einer Bogenleistung von 450 kW pro cm Bogenlänge auch das Strahlungsmaximum der OIII-Linien bei  $51000^{\circ}\text{K}$  nachweisen (Abb. 3).

Diese Arbeitsgruppe hatte zuvor einige Sonderformen des wasserstabilisierten Bogens entwickelt. Der sogenannte „Rohrbogen“ für mittlere Leistungen bestand im wesentlichen aus einem Quarzrohr mit tangentialer Wasserzufuhr, in dem ein relativ dünner Wasserschleier (Größenordnung 1 mm Schichtdicke) den Wärmeschutz der Quarzwand übernahm. Mit Hilfe dieses Bogentyps hat z. B. JÜRGENS

<sup>1</sup> Diese Serie von Bogenspektren wäre vergleichbar mit der Harvardsequenz der Sternspektren, denn die wesentlichen Unterschiede zwischen den Spektren der einzelnen Spektralklassen beruhen ja ebenfalls auf den verschiedenen Temperaturen bzw. Ionisationszuständen einer praktisch einheitlichen Sternmaterie und nicht auf irgendwelchen grundsätzlichen Verschiedenheiten in der chemischen Zusammensetzung.

Betrachtet man die Spektralsequenz von den „kühlen“ M-Sternen bis zu den heißen O- und B-Sternen, so findet man wiederum zunächst ein Anwachsen der Intensität der Balmerlinien (in Absorption) bis zu dem Maximalwert bei der Spektralklasse A2 und anschließend ein ständiges Absinken der Intensität bei heißeren Sternen. Da nun der Gasdruck in den Sternatmosphären im allgemeinen wesentlich unter Atmosphärendruck liegt, setzt die Ionisation schon bei kleineren Temperaturen ein. Dementsprechend sind die Strahlungsmaxima in der Temperaturskala nach links verschoben, und man findet auf diese Weise für die A2-Sterne nicht  $15000^{\circ}\text{K}$ , sondern nur  $9300^{\circ}\text{K}$  als „Ionisationstemperatur“.

[17] sehr genaue absolute und relative Strahlungsmessungen an Balmerlinien und -kontinuum durchgeführt. Im Rahmen der Meßgenauigkeit ( $T = 12650 \pm 100^\circ \text{K}$ ) konnten im Wasserplasma keine Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht festgestellt werden.

Für hohe Leistungen wurde der sogenannte „Kanalbogen“ entwickelt, der in Abb. 4 skizziert und in Abb. 1 im Betrieb dargestellt ist. Hier hatte die rotierende

Wasserwand eine Dicke von etwa 1 cm, während der wasserfreie Kanaldurchmesser (Brennraumdurchmesser) 1,4 bis 5 mm betrug. Als höchste Brennraumbelastung ergab sich bei  $52000^\circ \text{K}$  und 2,3 mm Kanaldurchmesser ein Wert von  $11000 \text{ kW/cm}^2$ , oder umgerechnet,  $10^{13} \text{ kcal/m}^3 \text{ h}^1$ . Da sich bei 1500 A und 2 mm Kanaldurchmesser bereits Eigenmagnetfelder bis zu 3000 Gauß aufbauen, ergibt sich in der Bogenachse ein Überdruck von 0,9 atü [19]. Infolgedessen müssen in den aus beiden Kanalenden austretenden Plasmastrahlen Strömungsgeschwindigkeiten auftreten, die bis nahe an die Schallgeschwindigkeit heranreichen. Diese errechnet sich für ein Wasserplasma von  $50000^\circ \text{K}$  zu 15 km/sec.

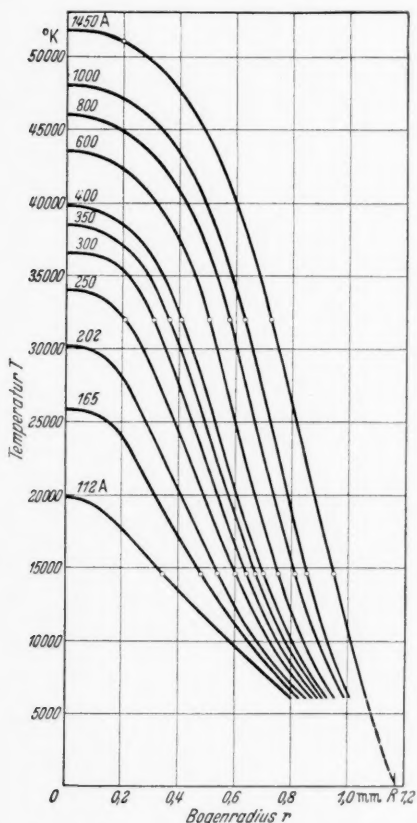


Abb. 3. Radiale Temperaturverteilung in der Säule eines GERDIEN-Wirbelbogens für verschiedene Stromstärken, nach BURHORN, MAECKER und PETERS [16]

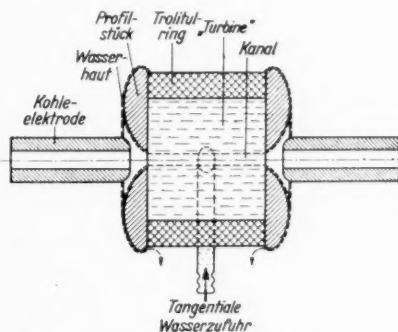


Abb. 4. Schematische Darstellung des Kanalbogens

Experimentell konnten die Strömungsverhältnisse in den Plasmastrahlen der Hochleistungsbögen nicht weiter verfolgt werden, da die erwähnte Stromquelle hoher Leistung ja ganz anderen Zwecken diene und daher nur für eine begrenzte Dauer zur Verfügung stand. Überhaupt hatte das Forschungsvorhaben zunächst

<sup>1</sup> Es sei bemerkt, daß die Strahlung des Wasserplasmas für den Energieumsatz in diesen Brennkammern von nur geringer Bedeutung ist.

Wesentlich anders werden die Verhältnisse bei Schichtdicken von 1 m und mehr, da dann bereits Gasdrücke von mehr als 10 atm ausreichen, um das Plasma im Temperaturbereich von  $20000$  bis  $50000^\circ \text{K}$  zum Schwarzstrahler zu machen [18].

keinerlei Beziehung zu gasdynamischen oder magnetogasdynamischen Problemen. Da man zum erstenmal ein vollionisiertes Plasma mit den Oberflächentemperaturen von 0- und B-Sternen unter stationären Bedingungen im Laboratorium untersuchen konnte, standen spektroskopische und reine plasmatheoretische Fragen im Vordergrund. Insbesondere konnte eine kurz nach der Durchführung dieser Versuche von SPITZER und Mitarbeitern [20] veröffentlichte Theorie über die elektrische Leitfähigkeit vollionisierter Plasmen innerhalb der Meßgenauigkeit von  $\pm 15\%$  durch das Experiment bestätigt werden [21].

Annähernd hohe Temperaturen wie in den wasserstabilisierten Lichtbögen wurden in der Folgezeit auch mit einer anderen „freibrennenden“ Bogenart erreicht. BUSZ und FINKELNBURG [22] hatten den Schutzgas-Schweißbogen, der zwischen einer praktisch nicht abbrennenden Wolframkathode und einer metallischen Anode bei Atmosphärendruck betrieben wird, durch Anwendung einer wassergekühlten Kupferanode in Platten- oder Halbkugelform zu einem für physikalische Untersuchungen brauchbaren Bogentyp umgewandelt. Argon und Stickstoff, kathodenseitig zugeführt, konnten in diesem Bogen bei 500 A auf über  $30000^\circ\text{K}$  aufgeheizt werden. Aber weniger die hohen Temperaturen dieser Bogenanordnung sind für die im folgenden Abschnitt behandelten Lichtbogen-Brennkammern von Bedeutung geworden, als vielmehr die Elektrodenmaterialien, die wegen ihrer Haltbarkeit den Bau von Brennern für extrem lange Betriebszeiten ermöglichten.

### III. Plasmastrahlen

Für die ersten Untersuchungen an den Plasmastrahlen der wasserstabilisierten Lichtbögen (1951) wurde der Kanalbogen in eine einseitig geschlossene Brennkammer umgewandelt. Der aus dem freien Kanalende austretende Plasmastrahl hatte nach Messungen von WEISS [23] eine Temperatur von  $13500^\circ\text{K}$  und eine Geschwindigkeit von 1200 m/sec. Da die Bogenleistung verhältnismäßig klein war und sich überdies nur ein geringer Überdruck in der Brennkammer einstellte, konnten keine höheren Ausströmgeschwindigkeiten erreicht werden. In den letzten Jahren ist dieser Bogentyp jedoch wesentlich verbessert und insbesondere bei der General Electric Comp. [24] und in den Midway-Laboratorien der Universität Chicago [25] in Richtung zu beträchtlich höheren Leistungen hin (bis zu  $10^4\text{ kW}$ ) weiterentwickelt werden.

Wenn wir uns nicht auf das Wasserplasma beschränken wollen, müssen wir ganz allgemein die Frage stellen, wie einströmendes Gas in einem Lichtbogenbrennraum aufgeheizt werden kann. Grundsätzlich ergeben sich dafür drei Möglichkeiten:

1. Man kann den Wasserwirbel ersetzen durch einen Gaswirbel. Anstelle von Wasser wird dann das aufzuheizende Gas tangential in die Brennkammer eingeführt. Wegen der zentrifugierenden Wirkung des Wirbels bleibt das kältere Gas ständig in der Wandnähe und schützt die Wand vor thermischer Überlastung, während das heiße Gas in der Nähe der Bogenachse verbleibt (Wirbelstabilisierung). Wir wollen diesen Fall mit *Zentrifugalströmung* kennzeichnen.
2. Das aufzuheizende Gas wird ausschließlich in axialer Richtung zugeführt, strömt also parallel zur Bogenachse. Dieser Fall sei mit *Axialströmung* gekennzeichnet.
3. Der Lichtbogen kann quer zur Bogenachse angeblasen werden, ein Verfahren, das allerdings nur bei kleinen Gasgeschwindigkeiten funktioniert, weil die

Entladungsbahn bestrebt ist, der kalten Gasströmung auszuweichen. Wird der Bogen zu stark angeblasen, so erlischt er<sup>1</sup>.

Dieser letztere Fall soll im Folgenden nicht weiter behandelt werden, obwohl er schon frühzeitig in der Hochtemperaturchemie (BIRKELAND- und EYDE-Prozeß) Anwendung gefunden hat und vielleicht auch vorübergehend in Lichtbogenbrennkammern für Hyperschallkanäle Verwendung finden wird. Bei Brennkammern, die mit Drehstrom arbeiten, tritt in jedem Fall ein Queranblasen der zwischen den drei Elektroden brennenden Bögen auf.

Die meisten der heute bekannten Brenntypen arbeiten nach dem Prinzip der Gaswirbelstabilisierung (Zentrifugalströmung), das auf SCHÖNHERR [26] zurückgeht. In verschiedenen Laboratorien (Giannini Plasma-dyne Corp. [27], Avco Research and Advanced Development Div. [28], General Electric Comp. [29] usw.) sind Lichtbogenbrennkammern zur Aufheizung von Gasen (Wasserstoff, Edelgase, Luft, Stickstoff) mit Bogenleistungen bis zu einigen  $10^3$  kW entwickelt worden oder noch in der Entwicklung. Wegen der zentrifugierenden Wirkung des Gaswirbels entstehen bei diesen Bogentypen Plasmastrahlen mit relativ steilen Temperaturverteilungen. Daher werden vielfach Ausgleichskammern hinter dem eigentlichen Entladungsraum angebracht, wobei allerdings erhebliche Wärmeverluste an das Kühlmittel (bis zu 50% der Bogenleistung) in Kauf genommen werden müssen.

Diese energieverzehrenden Ausgleichskammern können aber weitgehend vermieden werden, wenn man von der Zentrifugalströmung zur Axialströmung übergeht. Bei der Betrachtung dieses Falles gehen wir aus von dem sehr eingehend untersuchten Hochstromkohlebogen [30], der in Abb. 5 abgebildet ist. Eine für den Bau von Lichtbogenbrennkammern sehr wichtige Eigenschaft des Bogens ist die, daß der Bogen als elektromagnetische Pumpe wirkt.

Daß von der Kathode in Richtung zur Anode eine beträchtliche Gasströmung ausgeht, wurde schon früher beobachtet, man hatte nur keine plausible Erklärung dafür. Der Auftrieb kam als Ursache nicht in Frage, weil die Strömungsrichtung unabhängig von der Bogenstellung war. Verdampfung der Kathode schied als Ursache ebenfalls aus.

Vor einigen Jahren erkannte MAECKER [31], daß die LORENTZ-Kraft für die Ausbildung der Strömung verantwortlich ist. Bei einem völlig zylindersymmetrischen Bogen besitzt die Kraft  $\frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]$  nur eine radial nach innen gerichtete Komponente, die von einem Gasdruckgradienten kompensiert wird ( $\text{grad } p = -\frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]$ ). Eine axiale Strömung kann sich in diesem Falle nicht ausbilden, da keine Druckdifferenzen in Achsenrichtung auftreten.

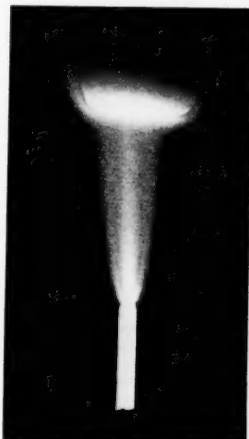
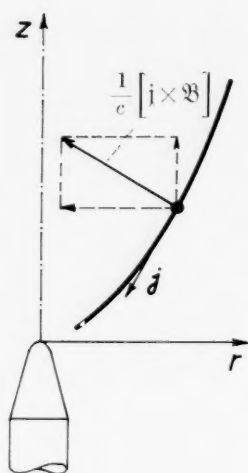


Abb. 5. Hochstromkohlebogen. Kathode unten, Anode oben. Bei 200 A beträgt die Temperatur in der Bogenachse  $11\,000^\circ\text{K}$

<sup>1</sup> Dieses Verfahren wird weitgehend bei Hochleistungsschaltern angewandt. Aber obwohl die Elektroingenieure und die Lichtbogenphysiker auf diesem Gebiete viele gemeinsame Probleme haben, stehen ihre Absichten doch in krasssem Gegensatz zueinander. Während der Lichtbogenphysiker versucht, Bedingungen zu schaffen, die dem Lichtbogen eine „angenehme“ Existenzmöglichkeit bieten, versucht der Schalterbaukonstrukteur, den lästigen Bogen fortzublasen.

Der Hochstrombogen ist nun zwar rotationssymmetrisch, aber keineswegs mehr zylindersymmetrisch, weil der Bogen sich in Kathodennähe zusammenschnürt. In diesem Falle verlaufen die Stromdichtelinien näherungsweise parabolisch, und die LORENTZ-Kraft, die definitionsgemäß senkrecht auf  $\mathbf{j}$  und  $\mathfrak{B}$  steht, erhält nicht nur eine radiale, sondern auch eine axiale Komponente, die

Anode



Kathode

Abb. 6. Komponenten der  
LORENTZ-Kraft  $\frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathfrak{B}]$  in  
Kathodennähe

mäßigerweise kathodenseitig zuführen. Damit das Plasma aus der Brennkammer ausströmen kann, wandelt man die Vollanode in eine düsenförmig durchbohrte Anode um.

Auf diese Weise entsteht dann die in Abb. 7 dargestellte Konzeption einer Lichtbogenbrennkammer mit axialer Strömung. Der Gleichstromlichtbogen wird in axialer Richtung von kaltem Gas angeströmt, wobei das Gas gezwungen ist, den Bogenraum zu durchlaufen. Das auf Plasmatemperaturen aufgeheizte Gas wird anschließend in einer Düse entspannt und tritt mit hoher Geschwindigkeit am Düsenende aus. Der Einlauf der Düse übernimmt die Funktion der Anode. Natürlich braucht man sich nicht auf den Fall isentroper Entspannung zu beschränken, man kann z. B. den anodisch wirkenden Teil hinter der Düse anordnen und auf diese Weise versuchen, den Fall der isothermen Expansion zu realisieren.

Versuche mit düsenförmigen Anoden wurden vom Verfasser ab 1953 im Forschungslaboratorium der Siemens-Schuckert-Werke durchgeführt. Die erste brauchbare Brennkammer (Abb. 8) diente allerdings wiederum zur Aufheizung von Wasser, das vor dem Versuch eingefüllt wurde. Der durch eine Drahtexplosion gezündete Bogen brannte dann in dem punktiert gezeichneten Raum zwischen der Kathodenspitze und der im Deckel befestigten Anodendüse. Das rasch verdampfende Wasser wurde nun in dem Bogenraum bei einem Druck von

nicht durch einen Druckgradienten kompensiert werden kann und daher ein Gaselement beschleunigt (Abb. 6). Da diese Komponente in Richtung auf den sich erweiternden Bogenteil zeigt, wird eine Plasmaströmung in Richtung zur Anode erzeugt. MAECKER hat schließlich auch den erhöhten Gasdruck und den Rückstoß auf die Kathode gemessen, Größen, die sich andererseits leicht aus der magnetohydrodynamischen Theorie berechnen lassen. Es ergab sich dabei eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment. Die Absolutwerte sind natürlich klein:

Bei 200 A Bogenstrom beträgt der magnetische Überdruck vor der Kathode 60 mm Wassersäule und die Rückstoßkraft ist 0,5 pond. Aus der Bewegungsgleichung errechnet sich dann eine maximale Plasmageschwindigkeit in der Bogenachse von 350 m/sec. Dieser Wert konnte anschließend von WIENECKE [32] experimentell bestätigt werden. Es sei bemerkt, daß dieses magnetische Pumpen nicht nur bei dem Hochstromkohlebogen auftritt, sondern auch in allen anderen Bogenentladungen, die eine Kontraktion an der Kathode aufweisen.

Bei der Konstruktion einer Bogenbrennkammer zur Erzeugung von Plasmastrahlen wird man diesen strahlbildenden Effekt natürlich mit zu Hilfe nehmen, zumal diese magnetisch angetriebene Strömung mit zunehmender Stromstärke rasch ansteigt. Dementsprechend wird man das aufzuheizende Gas zweck-



50 atü auf etwa  $12000^{\circ}\text{K}$  aufgeheizt und in der LAVAL-Düse auf Atmosphärendruck entspannt. Unter diesen Brennraumbedingungen errechnet sich für das Wasserplasma eine Aufheizenthalpie von  $1 \cdot 10^5 \text{ KW sec/kg}$ , so daß bei 30 KW

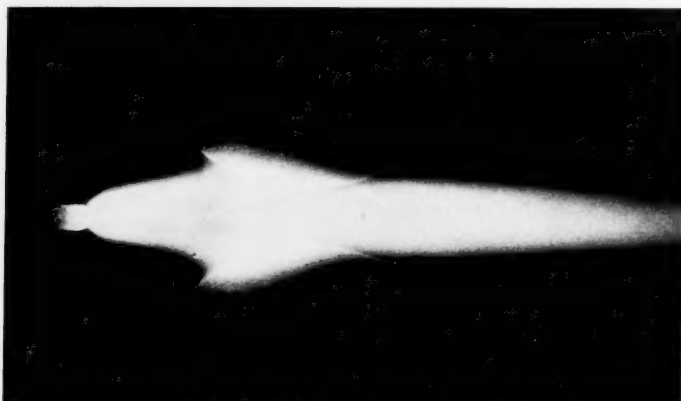


Abb. 7. Modell einer Lichtbogen-Brennkammer a) zur Erzeugung schnellströmender Plasmen (Magnetohydrodynamik), b) für Hyperschall-Windkanäle, c) für Plasma-Triebwerke. Es ist natürlich nicht möglich, eine aufgeschnittene Brennkammer in Betrieb zu zeigen. Die Modell-Aufnahme zeigt in Wirklichkeit einen senkrecht stehenden Hochstromkohlebogen mit einer aufgeschnittenen Düse als Anode. Die Bogenströmung wurde durch ein Quermagnetfeld in die halbierte Düse hineingedrückt

Bogenleistung (200 A, 150 V) nicht mehr als 0,3 gr/sec Wasser aufgeheizt werden konnten. Der Düsenenddurchmesser betrug daher nur 2 mm [33].

In Abb. 9 sind Plasmastrahlen abgebildet, die mit dieser Brennkammer erzeugt wurden. Das obere Bild ist kurz nach dem Einschalten des Bogens aufgenommen worden und zeigt die typischen MACHschen Knoten. Nach etwa 10 sec Brennzeit veränderte sich die Form der ungekühlten Graphitdüse durch Ausbrand im Düsenhals so stark, daß Strahlformen wie im unteren Bild auftraten. Bei derartigen Strömungsformen ist der Gasdruck am Düsenende noch wesentlich größer als der Außendruck, das Gas expandiert dann im Außenraum zunächst weiter und bildet schließlich in einigem Abstand vom Düsenende in der Strahlmitte einen senkrechten Stoß aus (MACH disc, „MACHsche Scheibe“). Derartige Stoßkonfigurationen wurden bereits an kalten Überschall-Luftstrahlen untersucht und mit Schlieren-, Schatten- und Interferenzmethoden sichtbar gemacht [34, 35].

Zum Vergleich sind in Abb. 10 zwei Aufnahmen übereinandergestellt: Das obere Bild zeigt die MACH disc-Konfiguration im Plasmastrahl, die auf Grund der stark druck- und temperaturabhängigen Austrahlung des Plasmas ohne An-

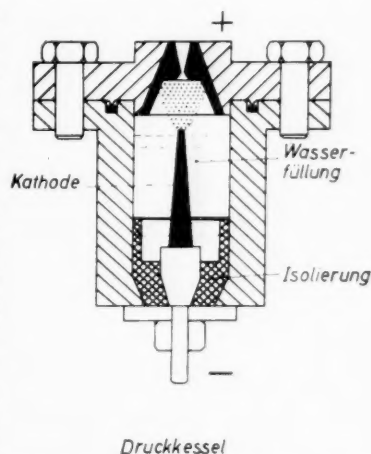


Abb. 8. Hochdruck-Brennkammer zur Erzeugung von Überschall-Plasmastrahlen



wendung besonderer Hilfsmaßnahmen deutlich in Erscheinung tritt. Das untere Bild ist mit der Schlierenmethode an Luftstrahlen gewonnen worden<sup>1</sup>.

Um die MACH-Zahlen in den Plasmastrahlen zu ermitteln, wurde eine rasch rotierende, scharfkantige Kupferscheibe als Störzentrum am Rande der Strahlen eingeführt. Die gemessenen Winkel der auf diese Weise erzeugten MACHschen Linien ergaben MACH-Zahlen in dem Bereich  $M = 1,6$  bis  $1,8$ .

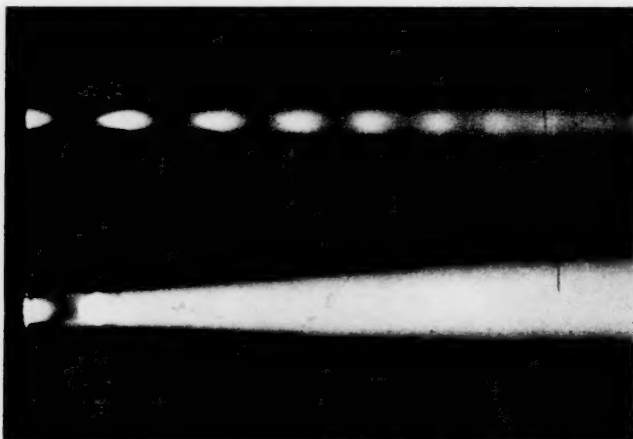


Abb. 9. Wasserplasmastrahlen mit 6,5 bis 7,4 km/sec

Nun erhält man für die Schallgeschwindigkeit eines Plasmas, vollständiges thermisches Gleichgewicht vorausgesetzt, die Beziehung [36]

$$v_s^2 = \frac{5 + x(1-x) \left( \frac{5}{2} + \frac{\chi_i}{kT} \right)^2}{3 + x(1-x) \left[ \left( \frac{3}{2} + \frac{\chi_i}{kT} \right)^2 + \frac{3}{2} \right]} \cdot \frac{p}{\rho} = \gamma_s \cdot \frac{p}{\rho}$$

mit  $x$  als Ionisationsgrad und  $\chi_i$  als Ionisierungsenergie.

Da die Ionisierungsenergien von Wasserstoff und Sauerstoff praktisch gleich sind (13,6 eV), kann die Schallgeschwindigkeit des Wasserplasmas für den Ionisationsbereich aus obiger Gleichung mit ausreichender Genauigkeit berechnet werden. Der Isentropenexponent  $\gamma_s$  geht für  $x \rightarrow 0$  und  $x \rightarrow 1$  gegen  $5/3$  (eiatomige Gase), fällt dagegen im Gebiet mittleren Ionisationsgrades fast bis auf den Wert 1,1 ab (Abb. 11).

Mit der spektroskopisch bestimmten mittleren Strahltemperatur von  $8000^\circ \text{K}$  ergibt sich aus Abb. 12 eine Schallgeschwindigkeit von 4,1 km/sec. Wird dieser Wert multipliziert mit den gemessenen MACH-Zahlen, so erhält man Strahlgeschwindigkeiten von 6,5 bis 7,4 km/sec. Diese Werte liegen unter den nach Rechnungen von SÄNGER-BREDT [37] zu erwartenden Geschwindigkeiten, was recht plausibel ist, da mit Wärmeverlusten in der Düse und möglicherweise auch mit Relaxationserscheinungen gerechnet werden muß.

<sup>1</sup> Diese Aufnahme wurde freundlicherweise von J. A. NICHOLLS, Aircraft Propulsion Laboratory, University of Michigan, zur Verfügung gestellt und ist der Arbeit T. C. ADAMSON JR. und J. A. NICHOLLS, On the Structure of Jets from Highly Underexpanded Nozzles into Still Air, J. Aero/Space Sci. 26, No. 1, 16 (1959) entnommen.

Stärkeres Einführen der Kupferscheibe in den Strahlrand führt zur Ausbildung eines stationären schrägen Verdichtungsstoßes wie in der unteren Aufnahme der Abb. 13 und schließlich zu Stoßkonfigurationen, wie man sie vor den Nasenkegeln sehr schnell fliegender Körper findet.

Nach der in Abb. 7 wiedergegebenen Konzeption wurden in der Folgezeit auch Lichtbogenbrenner zur Aufheizung von Gasen entwickelt. Im Zusammenhang mit Problemen der Hochtemperatur-Chemie, die in der Entwicklungsabteilung der Knapsack-Griesheim AG untersucht wurden, ergab sich die Forderung nach extrem langen Betriebszeiten. Da die bis dahin verwendeten Graphitelektroden in verhältnismäßig kurzer Zeit abbrennen, wurden Metallelektroden in Erwägung gezogen, und in dieser Hinsicht bot gerade der im vorigen Abschnitt erwähnte, von BUSZ und FINKELNBURG untersuchte Bogen-typ einen Anhaltspunkt zur Lösung des Problems. Anstelle der Graphitkathode trat eine indirekt wassergekühlte Wolframkathode, und die Graphitanode wurde durch eine wassergekühlte Kupferanode in Düsenform ersetzt. (Einen ähnlichen Weg haben ROMPE und Mitarbeiter [38] eingeschlagen.)

Eine für Dauerbetrieb geeignete Brennkammerausführung für einen Leistungsbereich bis 50 KW (200 A, 250 V bei Betrieb mit Wasserstoff) ist in Abb. 14 skizziert. Der als Kathode geschaltete Wolframstab wird in einer Spannzange gehalten und zentriert. Die Anode besteht

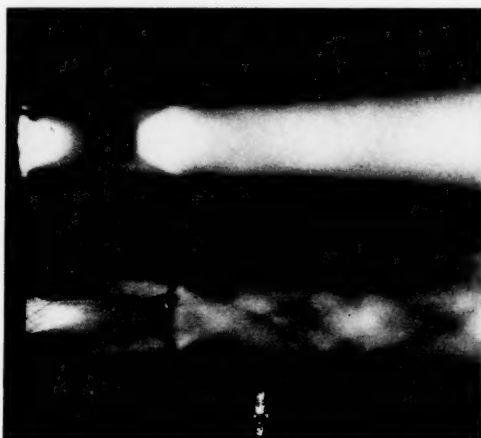


Abb. 10. MACH disc-Konfiguration. Oben: Plasmastrahl, unten: Luftstrahl

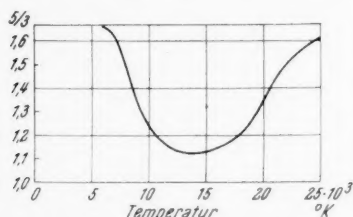


Abb. 11. Isentropenexponent  $\gamma_4$  für das Wasserplasma bei Atmosphärendruck im Bereich der Ionisation

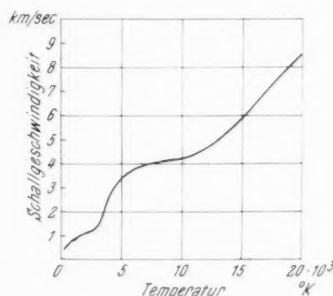


Abb. 12. Schallgeschwindigkeit des Wasserplasmas bei Atmosphärendruck

aus einer auswechselbaren Kupferdüse, deren Kühlkanäle so bemessen sind, daß das Kühlwasser mit einer Geschwindigkeit von mindestens 10 m/sec an der Düsenaußenwand entlangströmt. Als Isolation zwischen Kathode und Anode dient im thermisch belasteten Teil der Brennkammer eine Keramikdüse, die zusammen mit dem Wolframstab einen schmalen Ringspalt für die Zufuhr der aufzuheizenden Gase bildet.

Die Versuche haben gezeigt, daß eine gefährliche Brennfleckbildung an der Anodendüsenwand vermieden werden kann, wenn die Gase mit genügend hoher Geschwindigkeit in die Brennkammer einströmen. Möglicherweise ist die Ausbildung einer turbulenten Grenzschicht für den erstrebenswerten großflächigen Stromübergang an der Anodendüse erforderlich. Erfahrungsgemäß sind die Ringspaltwerte so zu bemessen, daß die kalten Gase mit einer Geschwindigkeit von mindestens 20 m/sec einströmen.



Abb. 13. Ausbildung von schrägen Verdichtungsstößen durch fortschreitende Einführung einer rotierenden Kupferscheibe in den Strahlrand. Temperatur und Druck hinter der Stoßfront des oberen Bildes entsprechen näherungsweise den Verhältnissen in der Umgebung des Staupunktes eines mit der Flug-MACH-Zahl  $M = 35$  in 30 km Höhe fliegenden Gerätes

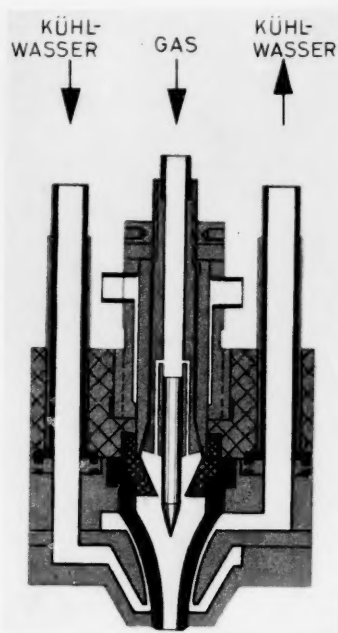


Abb. 14. Lichtbogen-Brennkammer zur Aufheizung von Gasen mit axialer Gasströmung

Bei hohen Stromstärken ( $I > 500$  A) können sich trotz hoher Gasgeschwindigkeit gelegentlich noch Mikrobrennflecke ausbilden, die eine Aufrauhung der Düsenoberfläche hervorrufen. Die Gefahr besteht, daß solche Mikrobrennflecke sich an einem Punkt festsetzen und dann zu größeren Brennflecken mit hoher Stromdichte anwachsen, was zu einer örtlichen Überhitzung der Düsenwand führen würde. Das Festsetzen der Mikrobrennflecke kann aber durch Anbringen eines axial gerichteten Magnetfeldes leicht unterbunden werden: Da wir annehmen dürfen, daß die Stromfäden bzw. die gedachten Stromdichtelinien an der Düsenwand eine senkrechte Komponente zur Wand besitzen, wird bei angelegtem axialem Feld wiederum die LORENTZ-Kraft  $\frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]$  wirksam, welche die Brennflecke mit hoher Umlauffrequenz im Kreise herumtreibt. Auf diese Weise wird die im zeitlichen Mittel auftretende thermische Beanspruchung der Flächenelemente erheblich verringert. Bei den Versuchen mit höheren Leistungen (400 KW, entsprechend 1000 A, 400 V bei Wasserstoffbetrieb) wurde dieses Verfahren mit Erfolg angewendet, so daß Betriebszeiten von über 100 Stunden

erreicht werden konnten (axiales Magnetfeld von 1000 Gauß). Bei einigen Brennern wurden die Wolframkathoden durch nachführbare Graphitelektroden ersetzt, wie sie beispielsweise auch bei den Avco-Lichtbogenbrennern im gleichen Leistungsbereich zu finden sind.

In Abb. 15 ist ein Stickstoff-Plasmastrahl von etwa  $10000^\circ\text{K}$  und 3000 m/sec Strahlgeschwindigkeit dargestellt. Bei der Betriebsweise mit dem Lichtbogen-



Abb. 15. Stickstoff-Plasmastrahl mit 3 km/sec und etwa  $10000^\circ\text{K}$

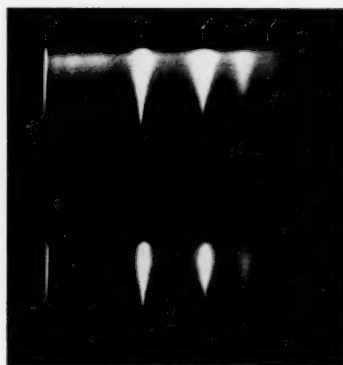


Abb. 16. Spektren der Strahlmitte von Wasserstoff-Plasmastrahlen

technisch schwierig zu handhabenden Wasserstoff wurden die Plasmastrahlen spektroskopisch auf „Reinheit“ untersucht. Durch scharfe Abbildung der ge-

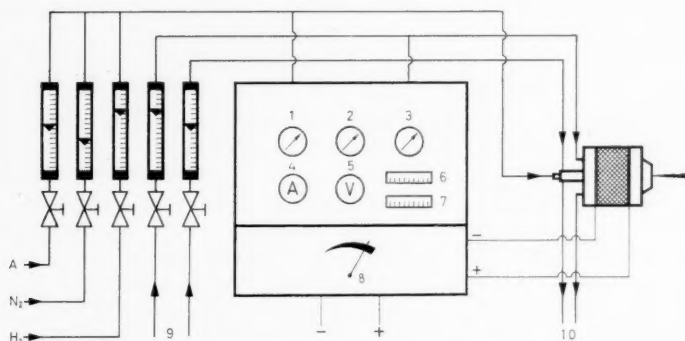


Abb. 17. Plasmabrenner-Anlage

1 Gasdruck, 2 Brennkammerdruck, 3 Kühlwasserdruck, 4 Amperemeter, 5 Voltmeter (Bogenspannung), 6 Temperatur Kühlwassereinlauf (Anode), 7 Temperatur Kühlwasserrücklauf (Anode), 8 Vorwiderstand, 9 Kühlwasserzulauf für Anode und Kathode, 10 Kühlwasserrücklauf

gesamten Strahlänge auf den Spalt eines Spektrographen entstehen dann Spektren wie in Abb. 16, in denen auch bei starker Belichtung keinerlei Spuren von Wolfram (Kathode) oder Kupfer (Anode) zu erkennen sind. Die für den Betrieb derartiger Lichtbogenbrenner erforderlichen Hilfsmittel und Regeleinrichtungen sind schließlich in Abb. 17 zusammengestellt.

#### IV. Zusammenfassung und Ausblick

Das Programm, die Methoden zur Erzeugung stationärer Plasmaströmungen darzulegen, führte auf die Physik des thermischen Plasmas, die weitgehend mit der Physik des Lichtbogens verflochten ist, weil thermische Plasmen bislang nur in Lichtbogenentladungen stationär aufrechterhalten werden konnten [36].

Die Lichtbogenphysik findet als „experimentelle Plasmaphysik“ seit dem vorigen Jahrhundert zunächst in der Lichttechnik ein weiträumiges Anwendungsgebiet. Seit Bestehen der Theorie der thermischen Ionisation (EGGERT 1919, SAHA 1920) und der Quantentheorie der Strahlung (PLANCK, EINSTEIN 1917) dürfen wir auch von einer theoretischen Plasmaphysik sprechen, obwohl die Plasmaphysik um diese Zeit noch keine selbständige Forschungsrichtung innerhalb der physikalischen Disziplinen darstellt. Theoretische Plasmaphysik ist zunächst weiter nichts als ein Zweig der modernen Astrophysik<sup>1</sup>, und experimentelle Plasmaphysik ist ein Teilgebiet innerhalb der weitverzweigten Gasentladungsphysik.

Erst in den dreißiger Jahren ergeben sich immer häufiger Berührungspunkte zwischen beiden Disziplinen. Die in der Astrophysik entwickelten Temperaturmeßmethoden, die dort zur quantitativen Analyse von Sternatmosphären benötigt werden, werden nun übertragen auf die „terrestrischen“ Plasmen in den Lichtbögen und führen so zu einem wesentlich verbesserten Verständnis der Lichtquellen (Quecksilber- und Edelgashochdrucklampen). Als „Gegenleistung“ stellen die Gasentladungsphysiker Plasmen unter wohldefinierten Bedingungen im Labor zur Verfügung, an denen astrophysikalische Theorien (Linienstrahlung, Kontinua, elektrische Leitfähigkeit usw.) geprüft werden können.

Etwa ab 1940, nachdem eine fundierte Kenntnis über den mechanisch-thermischen Zustand in den Sternatmosphären erreicht ist, erkennen die Astrophysiker, daß die dynamischen Erscheinungen in der Sonnenatmosphäre ebenso wie die Bewegungsvorgänge im interstellaren Gas nicht mit hydrodynamischen Theorien allein — wie etwa in der terrestrischen Meteorologie — erklärbar sind, sondern daß auf Grund der elektrischen Leitfähigkeit der Materie eine Kopplung zwischen Magnetfeldern und Strömungsfeldern eintritt (ALFVÉN: Magneto-hydrodynamische Wellen, 1942). So entsteht, wiederum im Bereich astrophysikalischer Probleme, ein neues theoretisches Gebäude, die Magnetohydrodynamik, die in ihrer umfassenden Gestalt Hydrodynamik, Thermodynamik und Elektrodynamik in sich vereinigt.

Die Theorie ergibt, daß nachweisbare magnetohydrodynamische Effekte experimentell nur dann zu erwarten sind, wenn, ausreichend starke Magnetfelder vorausgesetzt, die elektrische Leitfähigkeit und die geometrische Ausdehnung des leitenden Mediums genügend groß sind oder wenn die Strömungsgeschwindigkeit ausreichend hoch ist. In der Astrophysik haben wir es nun mit so großen geometrischen Dimensionen zu tun, daß diese Bedingungen praktisch immer in irgendeiner Weise erfüllt sind. Im Labor jedoch werden die Plasmendimensionen durch die bereitstehenden Energieversorgungsanlagen gegeben und sind dementsprechend klein. (Die üblichen Lichtbogendurchmesser liegen in der Größenordnung von 1 mm bis 1 cm.) Aus diesem Grunde wurden die ersten Versuche mit flüssigen Metallen durchgeführt, die bei labormäßig bedingten Dimensionen eine ausreichend hohe elektrische Leitfähigkeit aufweisen. Darüber hinaus aber

<sup>1</sup> EGGERTS Arbeit zielte im Zusammenhang mit EDDINGTONS Untersuchungen auf ein besseres Verständnis der Materie im Sterninneren ab, während SAHA die Deutung der Sternspektren gelang.

wurde versucht, Plasmaströmungen hoher Geschwindigkeit experimentell darzustellen [33], und so erklärt sich, daß die ersten Lichtbogenanordnungen zur Erzeugung schnellströmender Plasmen zunächst für magnetohydrodynamische Untersuchungen bestimmt waren.

Etwa zur gleichen Zeit meldeten sowohl die Aerodynamiker als auch die Triebwerksingenieure ihre Interessen an der Gasdynamik hoher Temperaturen an. Dementsprechend verzeichnen wir eine rasch wachsende Anzahl von theoretischen und experimentellen Arbeiten über magnetogasdynamische Probleme hin-

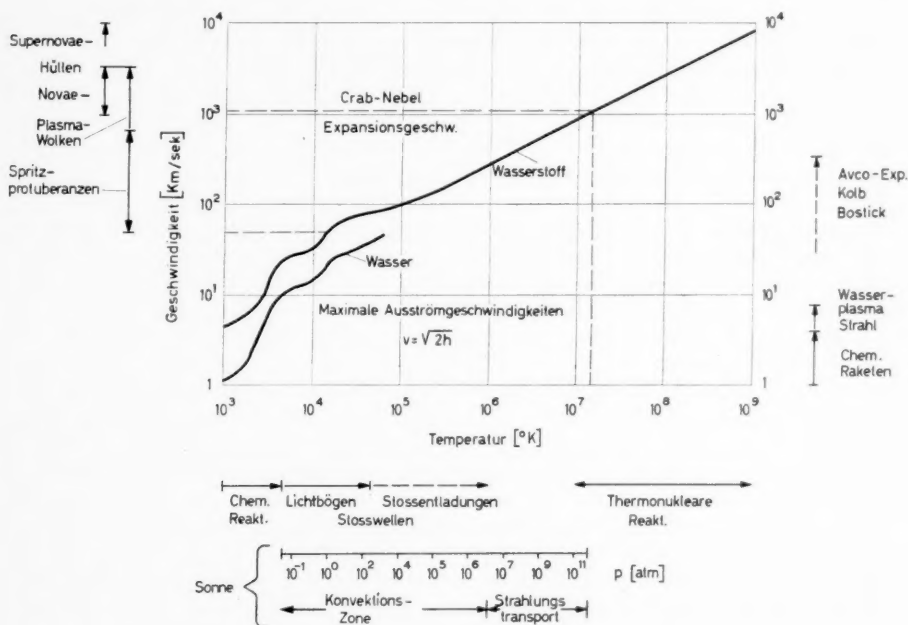


Abb. 18. Temperatur-Geschwindigkeits-Diagramm

sichtlich der Außenumströmung schnell fliegender Körper (Wiedereintauchproblem) und über Möglichkeiten zur Erhöhung der Ausströmgeschwindigkeiten in den Triebwerken.

Für die Aerodynamik des Hyperschallbereichs wird nun gerade der Temperaturbereich um  $10000^\circ\text{K}$  interessant, der in den atmosphärischen Lichtbögen (Niederstrom- und Hochstromkohlebogen) bereits eingehend untersucht ist und noch untersucht wird. Für kontinuierlich laufende Hyperschallwindkanäle werden dementsprechend die im vorigen Abschnitt beschriebenen Lichtbogenbrennkammern von Bedeutung werden. Darüber hinaus können diese Lichtbogenanordnungen als „Modell-Brenner“ für spätere Triebwerksentwicklungen betrachtet werden.

In der Triebwerksforschung werden aber noch viel höhere Temperaturen ins Auge gefaßt, da die Ausströmgeschwindigkeiten mit der Brennumenthalpie ansteigen. Im Endeffekt berühren sich hier die Interessen der Triebwerksingenieure und der Plasmaphysiker, die sich gegenwärtig mit äußerster Anstrengung um die Erforschung der Grundlagen für die Realisierung der kontinuierlichen Kernfusion bemühen.



Auch im Gebiet hoher Plasmageschwindigkeiten liefert uns die Astrophysik ein reichliches Anschauungsmaterial. Das soll an Hand von Abb. 18 verdeutlicht werden, in der als Abszisse die Temperatur und als Ordinate die Geschwindigkeit aufgetragen ist, die bei isentropischer Expansion ins Vakuum erreichbar wäre. Wasserstoff mit dem kleinsten Molekulargewicht ergibt die höchsten Geschwindigkeiten und ist auch in der Astrophysik von besonderem Interesse. Im Temperaturbereich bis nahe an  $10^5$  °K ist ebenfalls die maximale Ausströmgeschwindigkeit für Wasser eingetragen, da das Wasserplasma in der künftigen Triebwerksentwicklung wahrscheinlich eine besondere Rolle spielen wird. Auch haben die wasserstabilisierten Lichtbögen in der experimentellen Plasmaphysik zu der bisher höchsten stationär erreichbaren Temperatur (50000° K) bei höchster Brennumbelastung (11000 KW/cm<sup>3</sup> bzw.  $10^{13}$  kcal/m<sup>3</sup>h) geführt.

Im Dissoziations- und Ionisationsbereich, kenntlich an dem wellenförmigen Verlauf der Kurven, ist die zugrunde gelegte Enthalpie  $h$  auf Atmosphärendruck bezogen. Oberhalb von  $10^5$  °K gilt für Wasserstoff  $v \sim T^{1/2}$ , unabhängig vom Druck in der Brennkammer (vollständige Ionisation).

Unter der Temperaturskala finden wir zunächst die experimentell erreichten Temperaturwerte, wobei die Grenze für chemische Reaktionen mit 5000° K angenommen wurde. Anschließend folgen die in stationären Lichtbögen gemessenen Temperaturen bis 50000° K und schließlich (gestrichelt) die mit elektrischen Stoßentladungen kurzzeitig erreichten Temperaturwerte. Darunter finden wir als astrophysikalisches Beispiel die Temperaturskala der Sonne mit den zugehörigen Gasdrücken.

Auf der rechten Seite sind in Richtung wachsender Geschwindigkeit zunächst die mit chemisch beheizten Triebwerken erreichbaren Ausströmungsgeschwindigkeiten mit der Grenze bei etwa 4 km/sec aufgetragen. Bis zu 6 km/sec ergeben die Versuche mit Heliumplasmastrahlen (Giannini Corp.) und bis zu 7 km/sec wurden bereits 1954 für den Wasserplasmastrahl gefunden. Die mittels Stoßentladungen magnetisch angetriebenen Plasmaströmungen (gestrichelt) reichen weit in das Gebiet hoher Geschwindigkeiten hinein. Bei den ersten Experimenten von KOLB wurden Stoßwellengeschwindigkeiten von etwa 100 km/sec beobachtet. Weitere Experimente, die insbesondere in den Avco-Everett Res. Lab. durchgeführt wurden, ergaben kurzzeitig Geschwindigkeiten bis zu 500 km/sec.

Auf der linken Seite finden wir schließlich die in der Natur beobachtbaren Gasgeschwindigkeiten (keine Schwerpunktgeschwindigkeiten ganzer Systeme wie Sterne oder Galaxien). Da die Sterne zum größten Teil aus Wasserstoff bestehen, wird uns die Geschwindigkeitskurve für Wasserstoff näherungsweise darüber Auskunft geben, welcher Temperaturbereich in einem Stern für die Erzeugung der verschiedenen Phänomene verantwortlich ist. So sehen wir, daß die an der Sonne beobachteten Spritzprotuberanzen, die den Geschwindigkeitsbereich von 50 bis 700 km/sec überdecken, ihre zugehörige Energie aus der Konvektionszone der Sonne entnehmen müssen, denn selbst wenn Magnetfelder wesentlich zur Beschleunigung beitragen sollten, so können diese wiederum nur durch Umwandlung von mechanischer Energie (z. B. Turbulenz) in magnetische Energie entstanden sein. Die mechanische Energie entsteht aber letzten Endes durch Umwandlung von thermischer Energie. Die mit mehr als 1000 km/sec von der Sonne ausgeschleuderten Plasmawolken sehr geringer Dichte, die auf der Erde die bekannten magnetischen Störungen verursachen, verdanken ihre Existenz wahrscheinlich einem Übertragungsmechanismus, derart, daß die Energie größerer Gasmassen sich durch magnetische Kopplung auf sehr viel kleinere Gasmassen überträgt, wobei dann starke elektromagnetische Beschleunigungen auftreten können.



Interessant sind auch die mit großer Radialgeschwindigkeit expandierenden Hüllen bei Novae- und Supernovae-Ausbrüchen. Als Spezialfall ist der heute noch mit einer mittleren Geschwindigkeit von 1100 km/sec expandierende Crab-Nebel eingetragen, der an der Stelle der im Jahre 1054 beobachteten Supernova im Taurus steht.

Angenommen, wir hätten keine Kenntnis von einer Theorie des Sterninneren, die ja allein aus der Bedingung des hydrostatischen Gleichgewichts auf die Existenz von Temperaturen von über  $10^7$  °K führt, und weiterhin angenommen, daß die Blau-Verschiebung der Linien in den Spektren der betreffenden Sternhüllen tatsächlich als DOPPLER-Effekt zu deuten ist — woran nicht gezweifelt werden kann, — so müßten wir anhand der Wasserstoffkurve in Abb. 18 aus der Beobachtung von radialen Gasgeschwindigkeiten von mehr als 1000 km/sec allein schon aus gasdynamischen Gründen ( $v = \sqrt{2h}$ ) auf die Existenz von Temperaturen von über  $10^7$  °K im Sterninneren schließen.

So finden wir gerade in der Natur die Gasgeschwindigkeiten vor, die den Triebwerksdynamiker in Zukunft interessieren werden. Wir werden sehr auf die Gesetzmäßigkeiten der „kosmischen Elektrodynamik“ achtgeben müssen, wenn wir herausfinden wollen, wie unsere Triebwerke funktionieren sollen.

#### Literaturverzeichnis

1. W. ELENBAAS, The High Pressure Mercury Vapour Discharge. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1950.
2. A. UNSÖLD, Physik der Sternatmosphären, S. 351. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer, 1955.
3. H. ALFVÉN, Cosmical Electrodynamics. Oxford: Clarendon Press, 1950.
4. T. G. COWLING, Magnetohydrodynamics. New York: Interscience, 1957.
5. A. SCHLÜTER, Dynamik des Plasmas I, II. Z. Naturforsch. **5a**, 72 (1950); **6a**, 73 (1951).
6. H. C. VAN DE HULST, Problems of Cosmical Aerodynamics. Int. Un. of Theor. and Appl. Mech. and I.A.U. 1951.
7. H. MAECKER und TH. PETERS, Einheitliche Dynamik und Thermodynamik des thermischen Plasmas. Z. Physik **144**, 586 (1956).
8. S. LUNDQUIST, Experimental Investigations of Magneto-Hydrodynamic Waves. Physic. Rev. **76**, 1805 (1949).
9. H. GERDIEN und A. LOTZ, Über eine Lichtquelle von sehr hoher Flächenhelligkeit. Wiss. Veröff. Siemens-Konz. **2**, 489; Z. techn. Phys. **4**, 157 (1923).
10. H. MAECKER, Ein Lichtbogen für hohe Leistungen. Z. Physik **129**, 108 (1951).
11. R. W. LARENZ, Temperaturmessung in der Säule eines Gerdien-Bogens. Z. Physik **129**, 343 (1951).
12. P. SCHULZ, Elektrische Entladungen in Edelgasen bei hohen Drucken I, II. Ann. Phys. **1**, 95, 107, 318 (1947); Z. Naturforsch. **2a**, 583 (1947).
13. R. W. LARENZ und H. BARTELS, Über ein Verfahren zur Messung sehr hoher Temperaturen in nahezu durchlässigen Bogensäulen. Naturwiss. **37**, 164 (1950); Z. Physik **129**, 327 (1951).
14. M. N. SAHA, Versuch einer Theorie der physikalischen Erscheinungen bei hohen Temperaturen mit Anwendungen auf die Astrophysik. Z. Physik **6**, 40 (1921).
15. R. H. FOWLER und E. A. MILNE, The Intensities of Absorption Lines in Stellar Spectra and the Temperatures and Pressures in Reversing Layers of Stars. Monthly Notices **83**, 403 (1923).
16. F. BURHORN, H. MAECKER und TH. PETERS, Temperaturmessungen am wasserstabilisierten Hochleistungsbogen. Z. Physik **131**, 28 (1951).
17. G. JÜRGENS, Temperatur und Elektronendichte in einem wasserstabilisierten Lichtbogen. Z. Physik **134**, 21 (1952).
18. W. FINKELNBURG und TH. PETERS, Kontinuierliche Spektren. Handbuch der Physik, Bd. XXVIII, S. 100. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer, 1957.

19. H. MAECKER, Der elektrische Lichtbogen. *Ergebn. exakt. Naturw.* **25**, 293 (1951).
20. L. SPITZER, R. S. COHEN and P. McR. ROUTLY, The Electrical Conductivity of an Ionized Gas. *Physic. Rev.* **80**, 230 (1950).
21. H. MAECKER, TH. PETERS und H. SCHENK, Ionen- und Atomquerschnitte im Plasma verschiedener Gase. *Z. Physik* **140**, 119 (1955).
22. G. BUSZ und W. FINKELNBURG, Thermische Lichtbögen hoher Temperatur und niedriger Brennspannung. *Z. Physik* **138**, 212 (1954).
23. R. WEISS, Untersuchung des Plasmastrahles, der aus einem Hochleistungs-bogen austritt. *Z. Physik* **138**, 170 (1954).
24. W. R. CORLISS, *Propulsion Systems for Space Flight*. New York, Toronto, London: Mc Graw-Hill, 1960.
25. J. H. BONIN and C. F. PRICE, Behavior of Materials Subjected to Ultrahigh Temperature Environments. Conference on Extremely High Temperatures. Editors: H. FISCHER and L. C. MANSUR. New York: Wiley, 1958.
26. O. SCHÖNHERR, Über die Fabrikation des Luftsalpeters nach dem Verfahren der Badischen Anilin- und Sodafabrik. *ETZ* **30**, 365 (1909).
27. G. M. GIANNINI, A. C. DUCATI, W. F. VON JASKOWSKY and D. RAGUSA, Experiments with High Intensity Electric Discharges. Proceedings of an International Symposium on High Temperature Technology. New York, Toronto, London: Mc Graw-Hill, 1960.
28. T. R. BROGAN, Electric Arc Gas Heaters for Re-entry Simulation and Space Propulsion. *Avco-Everett Res. Lab. Research Rep.* 35, Sept. 1958.
29. M. L. GHAI, Plasma Generation Facility and Some Research Results. Conference on Extremely High Temperatures. Editors: H. FISCHER and L. C. MANSUR. New York: Wiley, 1958.
30. H. MAECKER, Elektronendichte und Temperatur in der Säule des Hochstromkohlebogens. *Z. Physik* **136**, 119 (1953).
31. H. MAECKER, Plasmaströmungen in Lichtbögen infolge eigenmagnetischer Kompression. *Z. Physik* **141**, 198 (1955).
32. R. WIENECKE, Über das Geschwindigkeitsfeld der Hochstromkohlebogensäule. *Z. Physik* **143**, 128 (1955).
33. TH. PETERS, Plasmastrahlen mit Überschallgeschwindigkeit. *Naturwiss.* **24**, 571 (1954).
34. R. LADENBURG and D. BERSHADER, High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion, Vol. IX, Physical Measurements in Gas Dynamics and Combustion. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1954.
35. T. C. ADAMSON JR. and J. A. NICHOLLS, On the Structure of Jets from Highly Under-expanded Nozzles into Still Air. *J. Aero/Space Sci.* **26**, 16 (1959).
36. W. FINKELNBURG und H. MAECKER, Elektrische Bögen und thermisches Plasma. *Handbuch der Physik*, Bd. XXII, S. 254. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer, 1956.
37. I. SÄNGER-BREDT, The Thermodynamic Properties of Hydrogen and Water as Possible Working Fluids for Nuclear Rockets. *Mitteilungen aus dem Forschungsinstitut für Physik der Strahlantriebe e. V.* Nr. 16. Stuttgart: Verlag Flugtechnik, 1958.
38. W. NEUMANN, A. PETERS, K. RADEMACHER und R. ROMPE, Beschreibung einer Anordnung zur Erzeugung eines Argon-Plasmastrahls mit beständigen Elektroden und Messung der Temperaturverteilung im Plasmastrahl. *Experimentelle Technik der Physik*, Bd. VII, S. 77. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1959.

# The Theory of Steady, One-dimensional, Laminar Flame Propagation for One-step Chemical Reactions<sup>1</sup>

By

S. S. Penner<sup>2, 4</sup> and F. A. Williams<sup>3, 4</sup>

(With 2 Figures)

(Received February 10, 1961)

## Abstract — Zusammenfassung — Résumé

**The Theory of Steady, One-dimensional, Laminar Flame Propagation for One-step Chemical Reactions.** The present status of the theory of one-dimensional, steady, laminar flame propagation for one-step chemical reactions is reviewed with particular emphasis on methods of solution and on the physical processes that dominate observable results.

**Die Theorie der stationären eindimensionalen und laminaren Flammenausbreitung für einstufige chemische Reaktionen.** Es wird ein Überblick über den gegenwärtigen Stand der Theorie der eindimensionalen stationären und laminaren Flammenausbreitung einer einstufigen chemischen Reaktion gegeben. Teilweise werden Lösungsmethoden besprochen, sowie physikalische Prozesse, die leichter der Beobachtung zugänglich sind.

**La théorie unidimensionnelle de la propagation des flammes en régime permanent laminaire pour des réactions chimiques simples.** Une revue de l'état actuel de la théorie unidimensionnelle de la propagation des flammes en régime permanent et laminaire pour des réactions chimiques simples.

## I. Introduction

Combustion processes occur in all of the currently available propulsion engines utilized in space exploration. They are likely to play an important role also for a good many years to come. Perhaps the most fundamental combustion problem that requires for successful analytical description (in VON KÁRMÁN's terminology) the "marriage of chemistry and fluid mechanics" is one-dimensional, steady, laminar flame propagation.

<sup>1</sup> Supported by the Office of Ordnance Research, U.S. Army, under Contract DA 04-495-Ord-1634 with the California Institute of Technology. This paper was essentially completed in August 1960 when F. A. WILLIAMS spent a one-month leave at the California Institute of Technology.

<sup>2</sup> Professor of Jet Propulsion, California Institute of Technology, Pasadena, California, U.S.A.

<sup>3</sup> Assistant Professor of Mechanical Engineering, Pierce Hall, Harvard University, Cambridge, Massachusetts, U.S.A.

<sup>4</sup> Daniel and Florence Guggenheim Jet Propulsion Center, California Institute of Technology, Pasadena, California, U.S.A.

The problem of determining the propagation velocity of a nearly constant pressure combustion wave was first studied by MALLARD and LE CHATELIER [1], who considered the rate of heat liberation by chemical reactions to be of secondary importance. Using simplified models of the wave, TAFFANEL [2] and, independently at a later date, DANIELL [3] were the first investigators to demonstrate the important result that the burning velocity is proportional to the square root of the reaction rate and to the square root of the ratio of an effective thermal conductivity to a specific heat at constant pressure. Further development of the theory has been pursued vigorously in recent years both in the U.S.S.R. and in the West. VON KÁRMÁN's significant contributions to this field will be evident from the following critical summary description of relevant analytical procedures.

The essential features of the mathematical problem of predicting the propagation speed of a steady, one-dimensional, laminar deflagration wave may be well illustrated by examining the unimolecular process  $R \rightarrow P$ . The necessary modifications required in the presence of chain reactions will be discussed in Section III where a criterion for the validity of the steady-state approximation of VON KÁRMÁN and PENNER for reaction intermediates is mentioned. Recent investigations of flames with heat loss that lead to predictions of flammability limits will not be considered in the present survey.

The basic set of conservation equations [4] for steady, adiabatic, one-dimensional laminar flame propagation may be written in simple form if the following approximations are introduced: velocity gradients are sufficiently small to justify neglect of viscous terms, radiative heat transfer is unimportant, the pressure  $p$  is practically constant, the kinetic energy of the fluid mixture is negligibly small compared with the internal energy, thermal and pressure diffusion may be neglected, the ideal gas law is applicable, and all of the chemical species may be assumed to have constant average specific heats equal to  $\bar{c}_p$ .

A convenient expression for the equation of energy conservation in a fluid mixture containing  $N$  separate species is the following [4]:

$$\frac{\lambda}{m\bar{c}_p} \frac{dT}{dx} = (T - T_f) + \sum_{i=1}^N (\varepsilon_i - \varepsilon_{i,f}) (h_i^0 / \bar{c}_p). \quad (1)$$

Here  $\lambda$  represents the thermal conductivity of the fluid mixture,  $m$  is the constant mass flow rate per unit area and is an eigenvalue for a given system (see below),  $x$  identifies the position coordinate,  $T$  is the local temperature and  $T_f$  denotes the adiabatic flame temperature (attained at  $x = \infty$ ),  $\varepsilon_i = Y_i [1 + (V_i/v)]$  is the mass flux fraction carried by species  $i$  if  $Y_i$  denotes the mass fraction of species  $i$  whose diffusion velocity is  $V_i$  in a fluid mixture moving with the mass-weighted average velocity  $v = m/\rho$  ( $\rho$  = density of the fluid mixture),  $\varepsilon_{i,f}$  is the value of  $\varepsilon_i$  when  $T = T_f$ , and  $h_i^0$  equals the standard specific enthalpy of formation of species  $i$ . The species conservation equation has the form

$$m \frac{d\varepsilon_i}{dx} = w_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

if  $w_i$  represents the mass rate of production of species  $i$  per unit volume by chemical reactions. The overall conservation of mass equation is accounted for by the statement

$$m = \rho v = \text{constant}. \quad (3)$$

The integrated momentum equation has been replaced by the statement

$$p = \text{constant} \quad (4)$$

which is approximately valid for laminar flames.

The general equation for concentration diffusion in a multicomponent gas mixture has the form [4-6]

$$\frac{dX_i}{dx} = \frac{mR^0T}{p} \sum_{j=1}^N \frac{1}{D_{ij}} \left( X_i \frac{\epsilon_j}{W_j} - X_j \frac{\epsilon_i}{W_i} \right), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (5)$$

where  $X_i$  is the mole fraction of species  $i$ ,  $R^0$  is the molar gas constant,  $D_{ij}$  is the binary diffusion coefficient for species  $i$  and  $j$ ,  $W_i$  and  $W_j$  denote the molecular weights of species  $i$  and  $j$ , respectively.

For a complex chemical reaction involving  $p'$  distinct chemical reaction steps, the chemical source function  $w_i$  is given by the expression [4, 5]

$$w_i = W_i \sum_{r=1}^{p'} (v_{i,r}'' - v_{i,r}') k_r \prod_{j=1}^N (c_j)^{v_{j,r}'} \quad (6)$$

where the  $r$ th process corresponds to the chemical change

$$\sum_{i=1}^N v_{i,r}' M_i \rightarrow \sum_{i=1}^N v_{i,r}'' M_i, \quad (r = 1, 2, \dots, p'),$$

i.e.,  $v_{i,r}'$  and  $v_{i,r}''$  denote, respectively, the stoichiometric coefficients for the reactant  $M_i$  and for the reaction product  $M_i$ ,  $k_r$  is the specific reaction rate constant for the  $r$ th reaction step, and  $c_i$  identifies the molar concentration of species  $i$ . We shall assume that  $k_r$  has the following functional form:

$$k_r = B_r T^{a_r} \left[ \exp \left( \frac{-E_r}{R^0 T} \right) \right] \quad (7)$$

where  $B_r$ ,  $a_r$ , and  $E_r$  are empirically determined constants.

Following conventional procedures for the solution of one-dimensional combustion problems [4, 5, 7-19], we replace the distance as independent variable by the normalized dimensionless temperature

$$\tau = (T - T_0)/(T_f - T_0), \quad (8)$$

where the subscript 0 is used to identify conditions at the upstream boundary ( $x = -\infty$ ). This objective may be accomplished by dividing Eqs. (2) and (5) by Eq. (1). In this manner we find the following set of  $2N$  basic equations:

$$\frac{d\epsilon_i}{d\tau} = \frac{\lambda}{m^2 \bar{c}_p} \frac{w_i}{(\tau - 1) + \sum_{j=1}^N (\epsilon_j - \epsilon_{j,f}) h_{j,0} / [\bar{c}_p (T_f - T_0)]}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (9)$$

$$\frac{dX_i}{d\tau} = \frac{\lambda R^0 T}{\bar{c}_p p} \frac{\sum_{j=1}^N (1/D_{ij}) [X_i (\epsilon_j/W_j) - X_j (\epsilon_i/W_i)]}{(\tau - 1) + \sum_{j=1}^N (\epsilon_j - \epsilon_{j,f}) h_{j,0} / [\bar{c}_p (T_f - T_0)]}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (10)$$

We have, in general, a problem involving  $2N$  equations and  $2N$  dependent variables ( $N$  flux fractions  $\varepsilon_i$  and  $N$  mole fractions  $X_i$ ). At constant pressure, the quantities  $w_i$ ,  $\rho$ , etc., are known functions of the  $2N+1$  quantities  $\varepsilon_i$ ,  $X_i$ , and  $\tau$ . A solution of the  $2N$  first-order differential equations for the  $2N$  unknowns and a specified set of boundary conditions (e.g.,  $Y_i = \varepsilon_i$  at  $\tau = 0$  and at  $\tau = 1$  where the  $\varepsilon_i$  at  $\tau = 0$  are specified for a given chemical system and the  $\varepsilon_i$  at  $\tau = 1$  are determined by the equilibrium conditions  $w_i = 0$ ) exists, in general, only for a particular mass flow rate  $m$  if  $w_i = 0$  for  $0 \leq \tau \leq \tau_i$  and  $w_i$  is given by Eqs. (6) and (7) for  $\tau > \tau_i$ . Here  $\tau_i$  is a dimensionless ignition temperature (see Section II B) and the characteristic value of  $m$  determines the eigenvalue  $v_0 = m/\rho_0$  for the laminar flame propagation velocity.

## II. The Unimolecular Decomposition Flame with Lewis Number Unity

### A. Formulation of the Problem

For the unimolecular process  $R \rightarrow P$  with the subscripts 1 and 2 identifying the properties of species  $R$  and  $P$ ,  $W_1 = W_2 \equiv W$ ,  $X_i = Y_i$ ,  $Y_1 = (1 - Y_2)$ , and  $\varepsilon_1 = (1 - \varepsilon_2)$ . The equation of state is evidently

$$\rho T = pW/R^0 = \text{constant} = \rho_f T_f, \quad (11)$$

and Eqs. (6) and (7) lead to the result

$$w_1 = -w_2 = -\rho B_1 T^{a_1} (1 - Y_2) \exp(-E_1/R^0 T). \quad (12)$$

If the standard heat of reaction is defined as  $q = h_1^0 - h_2^0$ , then Eq. (1) becomes

$$\frac{\lambda}{m \bar{c}_p} \frac{d\tau}{dx} = \tau - 1 - \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_{2,f}) q}{\bar{c}_p (T_f - T_0)}. \quad (13)$$

At the cold boundary ( $x = -\infty$ ,  $\tau = 0$ ,  $d\tau/dx = 0$ ) Eq. (13) reduces to the familiar expression for the adiabatic flame temperature

$$T_f = T_0 + (\varepsilon_{2,f} - \varepsilon_{2,0}) q / \bar{c}_p. \quad (14)$$

Since we have assumed that the reaction  $R \rightarrow P$  goes to completion as  $x \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon_{2,f} = 1$  and  $\varepsilon_{1,f} = 0$ . Using Eq. (14), the normalized flux fraction

$$\varepsilon \equiv (\varepsilon_2 - \varepsilon_{2,0}) / (\varepsilon_{2,f} - \varepsilon_{2,0}) = (\varepsilon_2 - \varepsilon_{2,0}) / (1 - \varepsilon_{2,0}), \quad (15)$$

and the dimensionless distance

$$\xi \equiv \int_0^x (m \bar{c}_p / \lambda) dx, \quad (16)$$

it may be seen that Eq. (13) becomes

$$d\tau/d\xi = \tau - \varepsilon. \quad (17)$$

For the present two-component mixture, Eq. (5) reduces to

$$\frac{\rho D_{12}}{m} \frac{dY_2}{dx} = Y_2 - \varepsilon_2. \quad (18)$$

The fact that  $dY_2/dx = 0$  at  $x = \pm\infty$  implies that  $Y_{2,0} = \varepsilon_{2,0}$  and  $Y_{2,f} = \varepsilon_{2,f} (= 1)$ . It is now convenient to define a normalized mass fraction as

$$Y \equiv (Y_2 - Y_{2,0}) / (Y_{2,f} - Y_{2,0}). \quad (19)$$

Hence Eq. (18) becomes

$$(1/Le) dY/d\xi = Y - \varepsilon, \quad (20)$$

where use has been made of Eq. (16) and the LEWIS Number has been defined as

$$Le = \lambda/(\rho D_{12} \bar{c}_p). \quad (21)$$

Substituting Eqs. (12), (15), (16) and (19) into Eq. (2) yields

$$\frac{d\varepsilon}{d\xi} = \left[ \frac{\lambda \rho B_1 T^{a_1}}{m^2 \bar{c}_p} \right] (1 - Y) \exp(-E_1/R^0 T). \quad (22)$$

In order that the quantity in the square brackets in Eq. (22) may be treated as a constant, it will be assumed that the temperature dependence of  $\lambda$  is given by

$$\lambda T^{a_1-1} = \text{constant};$$

two gas models for which this relation is valid have  $a_1=0$ ,  $\lambda \sim T$  and  $a_1=1/2$ ,  $\lambda \sim \sqrt{T}$ . Eqs. (17), (20), and (22) constitute a dimensionless set of governing differential equations for the present simple case.

From Eqs. (17) and (20) it can be seen that the reasonable approximation  $Le=1$  enables us to solve for  $Y$  in terms of  $\tau$ . The difference of Eqs. (17) and (20) is

$$\frac{d\tau}{d\xi} - \frac{1}{Le} \frac{dY}{d\xi} = \tau - Y.$$

For  $Le=1$ , this expression has the general solution

$$(\tau - Y) = A e^\xi,$$

where  $A$  is an arbitrary constant. Since  $\tau - Y$  must remain bounded as  $x \rightarrow \infty$ , the only acceptable value of  $A$  is  $A=0$ , implying

$$Y = \tau, \quad (23)$$

which also satisfies the correct boundary conditions at  $x = \pm \infty$  [compare Eqs. (8) and (19)].

The distance variable  $\xi$  may now be eliminated by dividing Eq. (22) by Eq. (17). Thus, using Eqs. (8) and (23),

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} = \frac{A(1-\tau) \exp[-\beta(1-\tau)/(\gamma+\tau)]}{\tau-\varepsilon} \equiv \frac{A\omega}{\tau-\varepsilon}. \quad (24)$$

Here  $\omega = \omega(\tau)$  is a dimensionless reaction rate; the dimensionless activation energy is

$$\beta \equiv E_1/(R^0 T_f); \quad (25)$$

a dimensionless measure of the initial temperature is

$$\gamma \equiv T_0/(T_f - T_0); \quad (26)$$

the dimensionless (constant) burning rate eigenvalue is defined by the expression

$$A \equiv \frac{\lambda \rho B_1 T^{a_1}}{m^2 \bar{c}_p} e^{-\beta}. \quad (27)$$

The two-point boundary conditions for Eq. (24) are  $\varepsilon=0$  at  $\tau=0$  and  $\varepsilon=1$  at  $\tau=1$  [see Eqs. (8) and (15)]. Since Eq. (24) is a first-order equation with two boundary conditions, it is expected that solutions will exist only for particular values of the eigenvalue  $A$ . After solving Eq. (24) for  $\varepsilon(\tau)$  and  $A$ , the profiles in the physical coordinate are obtained by integrating Eq. (17), viz.,



$$\xi = \int_{\tau_1}^{\tau} d\tau / (\tau - \varepsilon),$$

where  $\tau_1$  is the value of  $\tau$  at  $x=0$ .

### B. The Cold Boundary Difficulty [7], [8], [9]

Multiplying Eq. (24) by  $[1 - (\varepsilon/\tau)]$  and passing to the limit  $\tau \rightarrow 0$  where  $\varepsilon \rightarrow 0$  and  $\varepsilon/\tau \rightarrow d\varepsilon/d\tau$ , we obtain a quadratic equation for  $(d\varepsilon/d\tau)_0$ , the solution of which is

$$(d\varepsilon/d\tau)_0 = \left[ 1 \pm \sqrt{1 - 4\Lambda \lim_{\tau \rightarrow 0} (\omega/\tau)} \right] / 2.$$

Since  $\omega$  remains finite as  $\tau \rightarrow 0$ , the right-hand side of this equation is complex for  $\Lambda > 0$ , implying that Eq. (24) does not possess solutions with acceptable

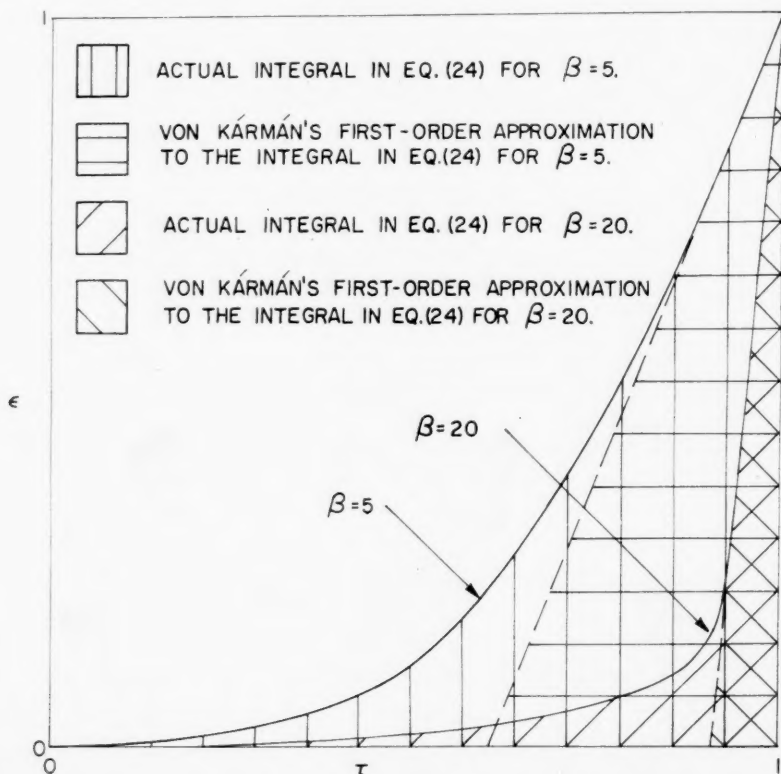


Fig. 1. Schematic representation of the solution  $\varepsilon(\tau)$  of Eq. (24) for large and small dimensionless activation energies  $\beta$ , illustrating the error in VON KÁRMÁN's first-order approximation for the burning rate eigenvalue  $\Lambda$ .

(real)  $d\varepsilon/d\tau$  at  $\tau=0$  for acceptable values of  $\Lambda$ . The cold-boundary problem may also be exemplified by utilizing the result that solutions starting from the hot boundary show that  $\varepsilon$  approaches zero much more rapidly than  $\tau$  as the cold boundary is approached (see Fig. 1). In the vicinity of the cold boundary

it is therefore reasonable to neglect  $\varepsilon$  in comparison to  $\tau$  in the denominator of Eq. (24), whence Eq. (24) becomes

$$\Lambda = \int_0^{\varepsilon'} d\varepsilon \int_0^{\tau'} (\omega/\tau) d\tau,$$

where  $\varepsilon'$  is the value of  $\varepsilon$  at  $\tau = \tau'$  and  $\tau'$  is close to zero. The fact that the integral in the denominator of this equation diverges at  $\tau = 0$  implies that  $\Lambda$  vanishes and both  $m$  and  $v_0$  are infinite.

The cold-boundary difficulty is a consequence of the fact that the mathematical model does not represent the physical situation precisely: the combustible mixture has not been prepared for the infinitely long time required for it to flow from  $x = -\infty$  to  $x = 0$  at finite speed. The reaction rate  $\omega$  becomes so small as  $\tau \rightarrow 0$  that, for all practical purposes,  $\lim_{\tau \rightarrow 0} (\omega/\tau)$  should not be infinite.

In order to avoid the "cold boundary difficulty", VON KÁRMÁN and MILLÁN [8] replaced the reduced temperature  $\tau = 0$  by  $\tau = \tau_i$  (where  $0 < \tau_i < 1$ ) at  $\varepsilon = 0$ . Introduction of this artifice is equivalent to the physical concept of an ignition temperature  $T_i$  below which the chemical reaction rate vanishes [compare Eqs. (6), (7) and (22)]. An alternative procedure for determining a finite, non-zero value for  $\Lambda$  involves the assumption that the flame holder serves as a weak heat sink [9] that removes  $[\lambda (dT/dx)]_i = m \bar{c}_p (T_f - T_o) (d\tau/d\xi)_i$  cal/cm<sup>2</sup>-sec. Since  $\varepsilon = 0$  at the flame holder if there is no reaction upstream, Eq. (17) implies  $(d\tau/d\xi)_i = \tau_i$ , whence it follows that the heat sink concept is mathematically equivalent to the ignition-temperature concept at the cold boundary.

It is easily shown that  $\Lambda$  assumes a pseudo-stationary value as  $\tau_i$  (or the heat loss to the flame holder) is allowed to vary between reasonable limits. This conclusion depends directly on the exponential form of the reaction rate function: for  $\beta$  appreciably greater than unity, the eigenvalue  $\Lambda$  is determined by the behavior of the differential equation in the vicinity of the hot boundary where  $\varepsilon$  and  $\tau$  are close to unity. This fact allows the determination of approximate estimates for  $\Lambda$  by a great number of simplified methods. We shall now outline representative mathematical techniques that are known to yield a fair approximation to the eigenvalue  $\Lambda$ .

### C. Von Kármán's Zero-Order Approximation [5], [8], [10]

Multiplying Eq. (24) by  $(1 - \varepsilon) - (1 - \tau)$  and integrating from 0 to 1 yields

$$\Lambda I = 1/2 - \int_0^1 (1 - \tau) d\varepsilon, \quad (28)$$

where

$$I \equiv \int_0^1 \omega d\tau = \int_0^1 (1 - \tau) \exp \left[ -\beta \left( \frac{1 - \tau}{\gamma + \tau} \right) \right] d\tau \quad (29)$$

and the identity  $\int_0^1 (1 - \varepsilon) d\varepsilon = 1/2$  has been used. Since the integral  $I$ , which

depends upon  $\beta$  and  $\gamma$ , may be evaluated in terms of exponential integrals [5], Eq. (28) will determine  $\Lambda$  if a reasonable approximation for  $\tau(\varepsilon)$  is substituted into the integral on the right-hand side of the equation.

In VON KÁRMÁN's zero-order approximation,  $(1 - \tau)$  is set equal to zero in the integral of Eq. (28), which is seen to provide an upper bound for  $A$ . This simplification<sup>1</sup> is equivalent to neglecting  $(1 - \tau)$  in comparison with  $(1 - \varepsilon)$  and is justified if the thermal enthalpy  $[m\bar{c}_p(T_f - T_0)(1 - \tau)]$  leaving the gas volume between the planes  $\tau$  and  $\tau = 1$  is much smaller than the chemical energy entering this gas volume  $[mq(\varepsilon_{2,f} - \varepsilon_{2,0})(1 - \varepsilon) = m\bar{c}_p(T_f - T_0)(1 - \varepsilon)]$ . Applicability of the specified inequality has been illustrated by VON KÁRMÁN and PENNER [5]. In this approximation the eigenvalue  $A$  becomes

$$1/\sqrt{A} = \sqrt{2}I. \quad (30)$$

#### D. The Zeldovich-Frank-Kamenetski Equation

The result given in Eq. (30) becomes identical with the classical formula obtained by ZELDOVICH and FRANK-KAMENETSKI [11] if  $I$  is evaluated by the use of a semi-convergent series of which only the first term is retained. Transforming from the variable  $\tau$  to  $z \equiv \beta(1 - \tau)/(\gamma + \tau)$  in Eq. (29), we find

$$I = \left(\frac{1 + \gamma}{\beta}\right)^2 \int_0^{\beta/\gamma} \frac{ze^{-z}}{[1 + (z/\beta)]^3} dz.$$

The activation energy and heat of reaction are usually sufficiently large that a negligible error in the evaluation of the preceding integral is produced by extending the upper limit to infinity ( $\gamma/\beta \approx 0$ ). The factor  $[1 + (z/\beta)]^{-3}$  in the integrand of the resulting expression for  $I$  may be expanded in powers of  $z/\beta$  in order to obtain an asymptotic expression for  $I$  that is useful for large values of  $\beta$ . Keeping only the first term in the expansion gives

$$I \approx \left(\frac{1 + \gamma}{\beta}\right)^2 \int_0^{\infty} ze^{-z} dz + O\left(\frac{1}{\beta^3}\right) = \left(\frac{1 + \gamma}{\beta}\right)^2 + O\left(\frac{1}{\beta^3}\right).$$

Introduction of this result into Eq. (30) yields the ZELDOVICH-FRANK-KAMENETSKI equation

$$1/\sqrt{A} \approx \sqrt{2}(1 + \gamma)/\beta. \quad (31)$$

#### E. Von Kármán's First-Order Approximation [5], [8], [10]

The approximation  $(1 - \tau) = 0$  in Eq. (28) may be improved upon by setting  $(1 - \tau)$  equal to a linear function of  $(1 - \varepsilon)$  with slope equal to that of the actual curve at  $\tau = 1$ . It may be seen from Fig. 1 that this approximation should be valid to somewhat smaller values of  $\beta$  than VON KÁRMÁN's zero-order approximation. Letting

$$1 - \tau = c(1 - \varepsilon), \quad (32)$$

the constant  $c$  may be determined by requiring that  $d\tau/d\varepsilon = c$  at the hot boundary. Evaluating Eq. (24) at the hot boundary yields

$$\frac{1}{c} = A \lim_{\tau \rightarrow 1} \left\{ \frac{(1 - \tau) \exp \left[ -\beta \left( \frac{1 - \tau}{\gamma + \tau} \right) \right]}{(1 - \varepsilon) \left[ 1 - \left( \frac{1 - \tau}{1 - \varepsilon} \right) \right]} \right\} = A \left( \frac{c}{1 - c} \right)$$

<sup>1</sup> With this approximation, the "cold boundary difficulty" disappears altogether from Eq. (24).

whence

$$c = (-1 + \sqrt{1 + 4A})/(2A). \quad (33)$$

Substituting Eq. (32) into the integrand in Eq. (28) and evaluating the integral then gives

$$AI = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4A}\right) (-1 + \sqrt{1 + 4A}), \quad (34)$$

which may be solved for the square root term and then squared, showing that

$$A^2(4I^2A^2 - 4IA - 2I + 1) = 0. \quad (35)$$

Since  $A \neq 0$ , the solution to this equation is

$$A = (1 - \sqrt{2I})/2I, \quad (36)$$

where the negative square root has been chosen to agree with Eq. (34). Therefore the result of VON KÁRMÁN's first approximation is

$$1/\sqrt{A} = \sqrt{2I/(1 - \sqrt{2I})}. \quad (37)$$

#### F. Other Approximate Methods of Solution

The second-order approximation in the iterative scheme proposed by VON KÁRMÁN involves numerical integrations, which have been completed for some cases. BOYS and CORNER [12] using a linear approximation in a somewhat different manner than VON KÁRMÁN, obtain an analytical expression for the burning rate which is improved upon by a subsequent (numerical) iteration. ADAMS [13] proposed a method, yielding analytical results, which involves a power-law approximation for  $\tau(\epsilon)$  instead of the linear relation. WILDE [14] modified ADAMS's result empirically in order to obtain closer agreement with exact numerical solutions. A new power approximation, similar to VON KÁRMÁN's first approximation and yielding a cubic equation for  $A$ , has also been developed<sup>1</sup>. FRIEDMAN and BURKE [15] set  $\gamma = 0$  in Eq. (24) in order to remedy the cold-boundary difficulty but still found it necessary to solve the equation numerically.

In Fig. 2 we have reproduced a plot that is similar to a curve given by VON KÁRMÁN [10] in which the parameter  $A^{-1/2}/A_{\text{exact}}^{-1/2}$  is shown as a function of  $\beta$  for most of the approximation procedures described above; here  $A_{\text{exact}}^{-1/2}$  was obtained by an exact numerical (machine) computation and corresponds to the plateau value observed for the dimensionless ignition temperature  $\tau_i$  ( $0 < \tau_i < 1$ ). Reference to Fig. 2 shows, for example, that the zero-order approximation of VON KÁRMÁN is comparable in accuracy with the second iteration of BOYS and CORNER; of the two approximation procedures which require a numerical integration, VON KÁRMÁN's second approximation is much more accurate than the BOYS-CORNER iteration method. Depending on the value of  $\beta$ , the most accurate analytical results are VON KÁRMÁN's first approximation, the new power approximation, and WILDE's empirical result. VON KÁRMÁN's first approximation agrees with the exact result within 5% for  $\beta \gtrsim 10$ . The accuracy of these analytical approximation methods illustrates that a numerical integration of Eq. (24) is seldom justified.

<sup>1</sup> Unpublished work of TH. VON KÁRMÁN, S. S. PENNER, and F. A. WILLIAMS.

*G. Iterative Procedures*

A number of iterative methods for solving Eq. (24) for  $\Lambda$  has been proposed: those of VON KÁRMÁN and of BOYS and CORNER have been mentioned previously. An elegant procedure is due to KLEIN [16] and will now be described briefly.

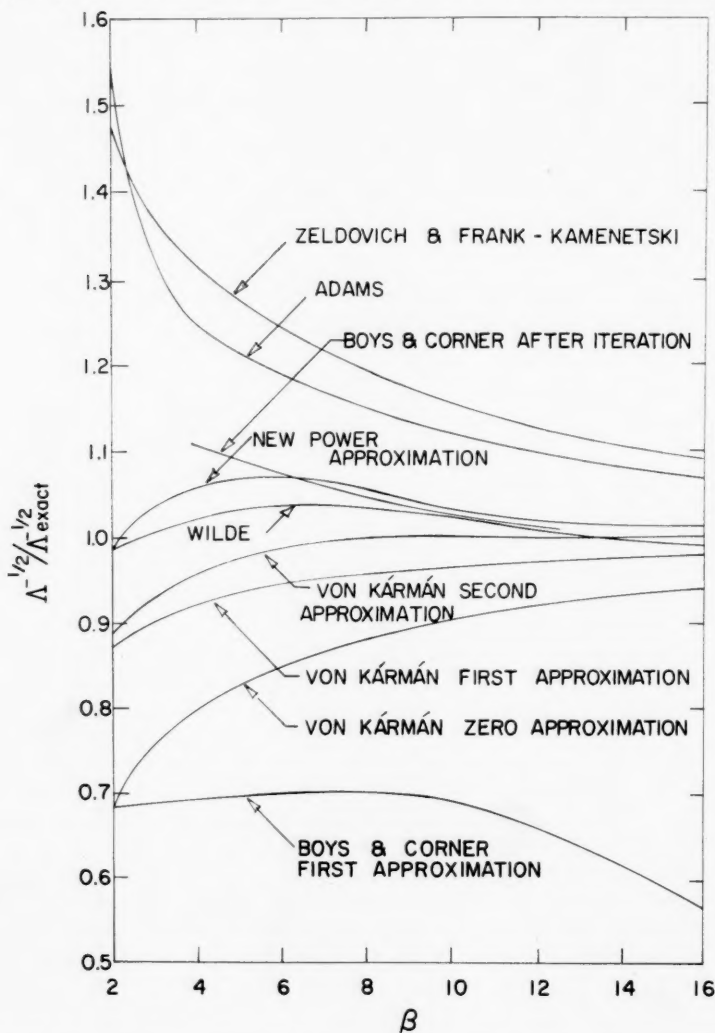


Fig. 2. Comparison of some approximate methods for computing the burning rate eigenvalue  $\Lambda$

The most thorough iterative approach is that of NACHBAR and JOHNSON [17, 18] which is discussed in Section II L.

Differentiating Eq. (17) and using Eq. (24) we find that

$$d^2 \tau / d \xi^2 - d \tau / d \xi = -\Lambda \omega. \quad (38)$$

Utilizing the ignition temperature concept (or the equivalent heat-sink procedure), the cold boundary condition becomes  $\tau = \tau_i > 0$  at  $\xi = 0$  where the previously

unspecified origin of the  $\xi$  coordinate has now been chosen to be the ignition plane. Since no reaction is assumed to occur upstream of the ignition plane,  $\varepsilon=0$  for  $-\infty \leq \xi \leq 0$  and Eq. (17) shows  $d\tau/d\xi = \tau = \tau_i$  at  $\xi=0$ . Also  $\tau=1$  and  $d\tau/d\xi=0$  at  $\xi=\infty$ . By letting  $\tau$  become the independent variable and defining  $g=d\tau/d\xi$  as the dependent variable, it is seen that Eq. (38) reduces to

$$g - g dg/d\tau = \Lambda \omega, \quad (39)$$

with the hot boundary condition  $g=0$  at  $\tau=1$  and the cold boundary condition  $g=\tau_i$  at  $\tau=\tau_i$ .

KLEIN [16] starts from Eq. (39) which he integrates from  $\tau$  to  $\tau=1$  with the result

$$g^2/2 = \Lambda \int_{\tau}^1 \omega d\tau - \int_{\tau}^1 g d\tau \quad (40)$$

or

$$\Lambda \left( \int_{\tau_i}^1 \omega d\tau \right) = \tau_i^2/2 + \int_{\tau_i}^1 g d\tau \quad (41)$$

when evaluated at  $\tau=\tau_i$ <sup>1</sup>. An iterative method is now used by assuming a reasonable zeroth approximation for  $g(\tau)$ , computing  $\Lambda$  from Eq. (41), finding a new approximation for  $g(\tau)$  from Eq. (40), and repeating this process until convergence is obtained. The  $n$ 'th approximation is given by

$$g_{[n]}^2/2 = \Lambda_{[n-1]} \int_{\tau}^1 \omega d\tau - \int_{\tau}^1 g_{[n-1]} d\tau \quad (42)$$

whence

$$\Lambda_{[n]} = \left[ \tau_i^2/2 + \int_{\tau_i}^1 g_{[n]} d\tau \right] \bigg/ \int_{\tau_i}^1 \omega d\tau. \quad (43)$$

Since numerical integrations are generally required in the first and higher iterations, direct numerical solution of Eq. (24) may be simpler to perform than the evaluation of  $\Lambda_{[n]}$  for large  $n$ .

#### H. Rosen's Variational Method [19]

ROSEN has presented an analysis showing that, if the eigenvalue  $\Lambda$  is unique and the first variation of a certain functional of  $\tau$  vanishes, then Eq. (24) must be satisfied and the numerical value of the functional must be equal to  $\Lambda$ . In order to obtain approximations for  $\Lambda$ , it is therefore possible to use the RAYLEIGH-RITZ procedure of choosing trial functions  $\tau$  with adjustable parameters which are determined by the requirement that the functional assumes a stationary value. The essential features of ROSEN's analysis will now be outlined.

<sup>1</sup> Actually, KLEIN's procedure was developed only for rate functions which approach zero rapidly as  $\tau \rightarrow 0$ , in which case the cold boundary difficulty is absent, and the original boundary conditions may be used. Thus, in place of Eq. (41), KLEIN

has  $\Lambda I = \int_0^1 g d\tau$ , where  $I$  is defined in Eq. (29).

Transforming from the independent variable  $\xi$  to

$$\eta = e^{\xi} \quad (44)$$

in Eq. (38), it is found that

$$d^2 \tau / d \eta^2 = -A \omega / \eta^2. \quad (45)$$

Since  $\eta = 1$  at  $\xi = 0$ , the boundary conditions for Eq. (45) are  $\tau = \tau_i > 0$  at  $\eta = 1$  and  $\tau = 1$  at  $\eta = \infty$ . Although these boundary conditions are used in the present discussion, ROSEN actually employed the original boundary conditions  $\tau = 0$  at  $\eta = 0$  ( $\xi = -\infty$ ) and  $\tau = 1$  at  $\eta = \infty$ . He developed other ways of remedying the cold boundary difficulty for solution of the flame equations in the special case when the variational method is employed<sup>1</sup>.

The functional  $A_R$  may be defined as

$$A_R = \int_1^{\infty} \frac{1}{2} (d\tau/d\eta)^2 d\eta \int_1^{\infty} V d\eta \quad (46)$$

where

$$V \equiv \int_{\tau_i}^{\tau} \omega d\tau / \eta^2. \quad (47)$$

Since  $\omega \geq 0$  and  $\omega$  is bounded,  $V$  is non-negative and bounded in the range of integration in Eq. (46), whence it follows that  $A_R$  is a finite positive number. For a variation of  $\tau(\eta)$  to a neighbouring member of the class of functions  $\tau(\eta)$  satisfying the given boundary conditions, the variation in  $A_R$  is

$$\begin{aligned} \delta A_R &= \frac{\int_1^{\infty} V d\eta \int_1^{\infty} \dot{\tau} \delta \dot{\tau} d\eta - \int_1^{\infty} \frac{1}{2} (\dot{\tau})^2 d\eta \int_1^{\infty} \delta V d\eta}{\left( \int_1^{\infty} V d\eta \right)^2} \\ &= \left( \int_1^{\infty} V d\eta \right)^{-1} \left\{ \dot{\tau} \delta \tau \Big|_1^{\infty} - \int_1^{\infty} \ddot{\tau} \delta \tau d\eta - A_R \int_1^{\infty} \frac{\omega}{\eta^2} \delta \tau d\eta \right\} \\ &= - \int_1^{\infty} \left( \ddot{\tau} + \frac{A_R \omega}{\eta^2} \right) \delta \tau d\eta / \int_1^{\infty} V d\eta, \end{aligned} \quad (48)$$

where a dot indicates differentiation with respect to  $\eta$ . Since  $\delta \tau$  is arbitrary, this equation implies that

$$\delta A_R = 0 \quad (49)$$

if, and only if, Eq. (45) is satisfied and

$$A_R = A \quad (50)$$

is a unique eigenvalue.

ROSEN states without proof that the stationary value  $A_R = A$  is a minimum. If this is indeed the case, then the correct function  $\tau(\eta)$  is that particular

<sup>1</sup> If  $\tau_i$  is replaced by zero and the lower limit  $\eta = 1$  is replaced by  $\eta = 0$  in Eqs. (46) and (47), then the usual cold-boundary difficulty becomes apparent because the integral in the denominator of Eq. (46) diverges at  $\eta = 0$  unless  $\omega(\tau)$  goes to zero sufficiently rapidly as  $\tau \rightarrow 0$ .



function for which  $A_R$  assumes its smallest possible value and Eq. (50) may then be used to find the correct mass burning velocity  $m$ . In this case, the RAYLEIGH-RITZ method [20] may be employed to obtain successively better estimates for  $\tau(\eta)$  and  $A$ . This straightforward procedure does not appear to have been carried out beyond the first rough approximation given in [19].

### I. Spalding's "Centroid Rule" [21]

A procedure belonging in a different category from those considered above is the "centroid rule" developed by SPALDING. This author showed empirically that, for

$$\omega = \text{constant} (1 - \tau)^m \tau^n,$$

the eigenvalue  $A$  is given by the expression

$$AI = \frac{1}{2} - 0.6604(1 - \tau_c) - 0.4283(1 - \tau_c)^2 \quad (51)$$

where the "centroid of the reaction rate" is defined as

$$\tau_c \equiv \frac{\int_0^1 \omega \tau d\tau}{\int_0^1 \omega d\tau} \quad (52)$$

and  $I$  is given by Eq. (29). An estimate for the burning rate may then be obtained rapidly by plotting  $\omega$  as a function of  $\tau$ , determining the centroid  $\tau_c$ , and using Eq. (51) for the computation of  $A$ . Although the results of SPALDING's procedure agree well with those derived from more accurate calculations, a small discrepancy exists between the values of  $A$  obtained from the "centroid rule" and from an exact numerical integration for  $\omega$  determined by an ARRHENIUS-type rate function.

For some rate functions which go to zero rapidly as  $\tau \rightarrow 0$ , ROSEN [19] has presented a theoretical confirmation of SPALDING's "centroid rule". When  $\omega \rightarrow 0$  as  $\tau \rightarrow 0$ , the boundary condition  $\tau = 0$  at  $\eta = 0$  may be used for Eq. (45) and in Eqs. (46) and (47) the lower limits of the integrals may be taken as  $\eta = 0$  and  $\tau = 0$  (instead of  $\eta = 1$  and  $\tau = \tau_i$ ). Assuming that

$$\tau = \begin{cases} \eta/(1 + \alpha\eta), & 0 \leq \eta \leq 1/(1 - \alpha), \\ 1, & \eta > 1/(1 - \alpha), \end{cases}$$

where the shape parameter  $\alpha$  is to be varied in order to determine the extremum for  $A_R$ , it is found by the variational procedure discussed in the preceding Section II H [i.e., by evaluating  $A_R(\alpha)$ , solving the equation  $dA_R/d\alpha = 0$  for  $\alpha$ , and substituting the result into the expression for  $A_R(\alpha)$ ] that

$$\alpha = 1 + \hat{q} - (1 - \hat{q} + \hat{q}^2)^{1/2}$$

and

$$A = A_R = \left\{ \frac{1}{6} + \frac{1}{3} [(1 - \hat{q} + \hat{q}^2)^{1/2} - \hat{q}] \right\} / I \quad (53)$$

where  $I$  is defined in Eq. (29) and

$$\hat{q} \equiv \int_1^\infty \left( \int_0^{1/x} \omega d\tau \right) dx \int_0^1 \omega d\tau \quad (54)$$

<sup>1</sup> The fact that  $\hat{q} = \infty$ , yielding  $A = 0$  in Eq. (53), for ARRHENIUS rate functions illustrates the inapplicability of this procedure when  $\omega$  does not approach zero as  $\tau \rightarrow 0$ .

While Eq. (53), in general, need not be equivalent to the "centroid rule", for two of the rate functions considered by SPALDING [20], i.e.<sup>1</sup>,

$$\omega_1 = \text{constant} (1 - \tau)^n$$

and

$$\omega_2 = \text{constant} (1 - \tau)^2 \tau^n,$$

Eqs. (52) and (54) show that

$$\hat{q}_1 = 2/n = 2(1 - \tau_c)/(3\tau_c - 1)$$

and

$$\hat{q}_2 = 3/n = 3(1 - \tau_c)/(4\tau_c - 1),$$

respectively, whence a MACLAURIN expansion of Eq. (53) yields

$$IA_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - \tau_c) - \frac{13}{24}(1 - \tau_c)^2 + O[(1 - \tau_c)^3], \quad (55)$$

and

$$IA_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - \tau_c) - \frac{11}{24}(1 - \tau_c)^2 + O[(1 - \tau_c)^3], \quad (56)$$

respectively. Eqs. (55) and (56) agree with Eq. (51) within 1% for  $(1 - \tau_c)^3 < 0.005$ , corresponding to the range of values of  $\tau_c$  that is of interest in practically important problems. Although the preceding development implies that Eq. (53) is more accurate than Eqs. (55) and (56), it is actually impossible to determine whether Eq. (51) or Eq. (53) will be more accurate in any given case because of the rough approximation for  $\tau(\eta)$  used in obtaining Eq. (53). In practice it is usually easier to employ the "centroid rule" than to use Eq. (53).

#### *J. The Johnson and Nachbar Method of Upper and Lower Bounds [17]*

The method of JOHNSON and NACHBAR constitutes the most accurate technique for the solution of simple laminar flame problems since it permits the rigorous determination of upper and lower bounds for the eigenvalues. This procedure, which was originally developed for the deflagration of a solid propellant, may be applied to the case of a gaseous laminar flame without modification. It has recently been extended to include an iterative method (see Section II L) for narrowing the discrepancy between the bounds [18].

JOHNSON and NACHBAR [17] use Eq. (39) with the boundary conditions  $g = \tau_i$  at  $\tau = \tau_i$  ( $0 < \tau_i < 1$ ) and  $g = 0$  at  $\tau = 1$ . They state without proof [17] that there exists a unique solution  $g(\tau)$  and a unique positive eigenvalue  $\Lambda$ .

Dividing Eq. (39) by  $g$  and integrating from  $\tau = \tau_i$  to  $\tau$  yields

$$g = \tau - \Lambda \int_{\tau_i}^{\tau} (\omega/g) d\tau. \quad (57)$$

By substituting Eq. (57) into the integral on the right-hand side of Eq. (41) it is found that

$$\Lambda \int_{\tau_i}^1 \omega d\tau = \frac{1}{2} - \Lambda \int_{\tau_i}^1 \int_{\tau_i}^{\tau} [\omega(\tau')/g(\tau')] d\tau' d\tau,$$

<sup>1</sup> The close relationship (almost everywhere within 2%) between these functional forms for  $\omega(\tau)$  and the ARRHENIUS expression has been demonstrated by ROSEN [22] for typical values of  $n$  ( $n \sim 11$ ).

which becomes

$$2\Lambda \int_{\tau_i}^1 \omega \left[ 1 + \left( \frac{1-\tau}{g} \right) \right] d\tau = 1 \quad (58)$$

when the double integral is reduced to a single integral through integration by parts. Eq. (58) may be used to determine an upper bound for  $\Lambda$  (see below).

Eq. (39) may also be written in the form

$$d(g^2)/d\tau = 2(g^2)/g - 2\Lambda\omega, \quad (59)$$

which resembles a linear equation for  $g^2$  for which a solution may be effected by means of an integrating factor. NACHBAR noted that multiplication of Eq.

(59) by  $\exp \left[ -2 \int_{\tau_i}^{\tau} (1/g) d\tau \right]$  leads to the result

$$\frac{d}{d\tau} \left\{ g^2 \exp \left[ -2 \int_{\tau_i}^{\tau} \left( \frac{1}{g} \right) d\tau \right] \right\} = -2\Lambda\omega \exp \left[ -2 \int_{\tau_i}^{\tau} \left( \frac{1}{g} \right) d\tau \right], \quad (60)$$

as may be verified by expanding the derivative on the left-hand side of Eq. (60) by parts. Integrating Eq. (60) from  $\tau = \tau_i$  to  $\tau = 1$  and utilizing the boundary conditions on  $g$  yields

$$2\Lambda \left( \frac{1}{\tau_i^2} \right) \int_{\tau_i}^1 \omega \exp \left[ -2 \int_{\tau_i}^{\tau} \left( \frac{1}{g} \right) d\tau \right] d\tau = 1 \quad (61)$$

after division by  $\tau_i^2$ . Eq. (61) may be used to determine a lower bound for  $\Lambda$  (see below).

Since  $\omega$ ,  $(1-\tau)$ , and  $g$  are all non-negative, it is apparent that substitution of an upper bound for  $g(\tau)$  in Eq. (58) will lead to a lower bound for the integral and the resulting value of  $\Lambda$  is therefore an upper bound. On the other hand, substituting this same upper bound for  $g(\tau)$  into Eq. (61) yields a lower bound for  $\Lambda$  because the inner integral is a lower bound; hence the exponential and therefore the outer integral are upper bounds. Eqs. (58) and (61) can therefore be used to provide limits between which the eigenvalue must lie.

Since  $\Lambda \int_{\tau_i}^{\tau} (\omega/g) d\tau \geq 0$ , it follows from Eq. (57) that

$$g \leq \tau. \quad (62)$$

Hence  $\tau$  may be used for the upper bound of  $g$  in Eqs. (58) and (61). Eq. (58) then implies that

$$\Lambda \leq \left[ 2 \int_{\tau_i}^1 (\omega/\tau) d\tau \right]^{-1} \quad (63)$$

and Eq. (61) shows that

$$\Lambda \geq \left[ 2 \int_{\tau_i}^1 (\omega/\tau^2) d\tau \right]^{-1} \quad (64)$$

after the inner integration over  $\tau$  is performed. Eqs. (63) and (64) constitute explicit rigorous bounds for the burning rate eigenvalue  $\Lambda$ .

### K. Comparison of the Method of Johnson and Nachbar with Other Procedures

It is of interest to compare the preceding bounds with various approximate formulae. Since  $\tau \leq 1$ , it is apparent that

$$\int_{\tau_i}^1 (\omega/\tau) d\tau \geq \int_{\tau_i}^1 \omega d\tau \approx I, \quad (65)$$

where  $I$  is defined in Eq. (29) and it is assumed that  $\tau_i$  is nearly zero. Hence it follows from Eq. (63) that

$$\Lambda \lesssim 1/(2I). \quad (66)$$

Comparison of Eq. (66) with Eq. (30) shows that VON KÁRMÁN's zeroth approximation yields an upper bound for  $\Lambda$ , a result which is also apparent from Eq. (28) or from Fig. 2. Eq. (65) further implies that the bound in Eq. (63) is closer to the correct value of  $\Lambda$  than is VON KÁRMÁN's zeroth approximation.

Expanding the identity  $(1-\tau)^2/\tau \geq 0$  yields  $1/\tau \geq 2-\tau$ , from which it follows that

$$\int_{\tau_i}^1 (\omega/\tau) d\tau \geq 2 \int_{\tau_i}^1 \omega d\tau - \int_{\tau_i}^1 \tau \omega d\tau \approx I(2-\tau_c) \quad (67)$$

where use has been made of Eqs. (29) and (52). From Eqs. (67) and (63) it may now be seen that

$$\Lambda \lesssim \frac{1}{2(2-\tau_c)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-\tau_c) + \frac{1}{2}(1-\tau_c)^2 + O[(1-\tau_c)^3] \quad (68)$$

where the denominator has been expanded in powers of  $(1-\tau_c)$  in order to obtain the last equality. Comparison of Eqs. (51) and (68) shows that SPALDING's "centroid rule" lies very near but below the upper bound given in Eq. (68) for practical values of  $\tau_c$ . It has been noted by NACHBAR and SPALDING that the mean value of the upper and lower bounds given by Eqs. (63) and (64) is in close agreement with the results obtained from SPALDING's "centroid rule" for many rate functions.

The upper and lower bounds predicted by Eqs. (63) and (64) are usually very close together [17]. Since the integrals in Eqs. (63) and (64) are not difficult to evaluate, these bounds may therefore be used to obtain very accurate approximations to the mass burning rate  $m$  with much less labor than is required by iterative procedures or numerical integrations.

### L. The Iterative Procedure of Johnson and Nachbar [18]

An iterative technique for obtaining successively narrower upper and lower bounds for the eigenvalue  $\Lambda$  and successively lower upper bounds for the function  $g(\tau)$  has been developed recently by JOHNSON and NACHBAR [18]. Since they have proven that this procedure converges and that  $g(\tau)$  approaches the solution of Eq. (39) monotonically, the oscillating divergence sometimes observed by KLEIN [16] in his iterative scheme cannot appear here, and the present method constitutes a truly rigorous procedure for obtaining solutions to any desired degree of accuracy.

Integrating Eq. (57) from  $\tau = \tau_i$  to  $\tau$  yields

$$\begin{aligned} \int_{\tau_i}^{\tau} g d\tau &= \frac{1}{2} (\tau^2 - \tau_i^2) - A \int_{\tau_i}^{\tau} \int_{\tau_i}^{\tau'} \frac{\omega(\tau'')}{g(\tau'')} d\tau'' d\tau' \\ &= \frac{1}{2} (\tau^2 - \tau_i^2) - A \int_{\tau_i}^{\tau} (\tau - \tau') \frac{\omega(\tau')}{g(\tau')} d\tau', \end{aligned} \quad (69)$$

where the last equality is obtained by integrating the last term by parts. Integrating Eq. (39) from  $\tau = \tau_i$  to  $\tau$  gives

$$g^2/2 = \tau_i^2/2 - A \int_{\tau_i}^{\tau} \omega d\tau + \int_{\tau_i}^{\tau} g d\tau \quad (70)$$

which becomes

$$g^2 = \tau^2 - 2A \int_{\tau_i}^{\tau} \omega(\tau') \{[(\tau - \tau')/g(\tau')] + 1\} d\tau' \quad (71)$$

when Eq. (69) is substituted into the last term. Eqs. (61) and (71) provide the basis for an iterative procedure.

An upper bound for  $g(\tau)$  is substituted into Eq. (61) in order to obtain a lower bound for  $A$ . If this value of  $A$  and the upper bound for  $g(\tau)$  are substituted into the right-hand side of Eq. (71), then, since the integral in Eq. (71) will clearly assume a lower bound, the right-hand side of Eq. (71) will assume an upper bound, and hence a new upper bound for  $g^2(\tau)$  will be given by Eq. (71). The fact that the resulting new upper bound for  $g(\tau)$  is lower than the previous upper bound requires proof by mathematical induction<sup>1</sup>.

The  $n$ 'th approximation for  $g$  is finally given by [see Eqs. (71) and (61)]

$$g_{[n]}^2 = \tau^2 - 2A_{[n-1]} \int_{\tau_i}^{\tau} \omega(\tau') \{[(\tau - \tau')/g_{[n-1]}(\tau')] + 1\} d\tau', \quad (72)$$

where

$$A_{[n-1]} = \left\{ \frac{2}{\tau_i^2} \int_{\tau_i}^{\tau} \omega(\tau) \exp \left[ -2 \int_{\tau_i}^{\tau} \left( \frac{1}{g_{[n-1]}(\tau')} \right) d\tau' \right] d\tau \right\}^{-1}. \quad (73)$$

In accordance with the preceding discussion, as  $n \rightarrow \infty$  the quantity  $g_{[n]}(\tau)$  approaches the correct solution from above and  $A_{[n]}$  approaches the correct eigenvalue from below. From the discussion in Section II J it is seen that for

<sup>1</sup> It is obvious that if  $g = \tau$  is used as the first approximation, then the second approximation obtained from Eq. (71) will be a lower upper bound. The induction proof is then completed by using the assumption that the  $n$ 'th approximation for  $g$  is a lower upper bound than is the  $(n-1)$ 'th approximation to prove that the  $(n+1)$ 'th approximation is a lower upper bound than the  $n$ 'th approximation. This last proof is obtained quite simply from Eqs. (61) and (71) since the fact that the  $n$ 'th approximation for  $g$  is lower than the  $(n-1)$ 'th approximation immediately shows (in view of Eqs. (61) and (71)) that the right-hand side of Eq. (71) used in obtaining the  $(n+1)$ 'th approximation is smaller than the right-hand side of Eq. (71) used in obtaining the  $n$ 'th approximation, whence Eq. (71) implies that the  $(n+1)$ 'th approximation is smaller than the  $n$ 'th approximation.

each  $g_{[n]}(\tau)$  a value of  $A$  may also be computed from Eq. (58) and the resulting sequence of values will approach the correct eigenvalue from above. Thus successively narrower bounds for the burning rate and successively smaller upper bounds for  $g = d\tau/d\xi$  are obtained.

Since the first estimates for the bounds of  $A$  given in Eqs. (63) and (64) are so close together, it appears that only a few iterations will be required in order to obtain very precise results. From Eqs. (72) and (73) it is seen that the integrations which must be performed in carrying out the present techniques are only slightly more complicated than those of other iterative procedures [e.g., Eqs. (42) and (43)]. However, for most practical applications, either Eqs. (63) and (64) or one of the other approximate formulae given in the previous sections will be sufficiently accurate.

### III. Distribution of Radicals in Flames

#### *The Extended Steady-State Approximation*

The distribution of radicals (atoms and chain carriers) in flames is closely related to the details of the chemical reaction rates in flames. For this reason, it is difficult to obtain reasonable approximations for radical concentrations without complete (numerical) solutions of the flame equations, such as those obtained by KLEIN through an extension of his iterative procedure [16]. Analytical approximations for the radical concentrations in flames were obtained by VON KÁRMÁN and PENNER [5] who first introduced an extended steady-state approximation for the reaction intermediates. They assumed that the net mass rate of production of any radical  $r$  is negligibly small, i.e.,

$$w_r \approx 0. \quad (74)$$

The preceding equation may be solved for the mole fraction  $X_r$  in terms of the dimensionless temperature  $\tau$  and the remaining mole fractions  $X_i$  ( $i \neq r$ ). If Eq. (74) is valid for all radicals, the mole fractions of the reaction intermediates may be eliminated from the flame equations, and the flame equations may then be solved explicitly to give all of the mole fractions, including the  $X_r$ , in terms of  $\tau$ . This useful steady-state approximation has been well justified for the ozone decomposition flame [5], is of doubtful validity for the hydrazine decomposition flame [23], and yields a rather poor description for the bromine atom concentration in the  $H_2$ - $Br_2$  flame [24].

GIDDINGS and HIRSCHFELDER [25] first proposed an incomplete criterion for determining the applicability of the steady-state approximation. An alternative procedure, involving a demonstration that the steady-state approximation may be used as a first approximation in an iterative scheme for obtaining successively more exact solutions of the flame equations, has been given by MILLÁN and DA RIVA [26]. The critical parameter for applicability of the steady-state approximation has been found to be an appropriate version of DAMKÖHLER's first similarity group [27, 28]. Details of this work have been described elsewhere by the Spanish wing of VON KÁRMÁN's collaborators on combustion theory [26].

#### References

1. E. MALLARD and H. L. LECHATELIER, *Ann. Mines* **4**, 379 (1883).
2. M. TAFFANEL, C. R. **157**, 714, and **158**, 42 (1913).
3. P. J. DANIELL, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **126**, 393 (1930).
4. S. S. PENNER, *Chemistry Problems in Jet Propulsion*. London: Pergamon Press, 1957.

5. TH. VON KÁRMÁN and S. S. PENNER, Selected Combustion Problems, Fundamentals and Aeronautical Applications, AGARD, pp. 5-41. London: Butterworths, 1954.
6. C. F. CURTISS and J. O. HIRSCHFELDER, *J. Chem. Phys.* **17**, 550 (1949).
7. H. W. EMMONS, Harvard University Report, 1950.
8. TH. VON KÁRMÁN and G. MILLÁN, Anniversary Volume on Applied Mechanics Dedicated to C. B. Biezeno, pp. 55-69. Haarlem: Technische Uitgeverij H. Stam, 1953.
9. J. O. HIRSCHFELDER, C. F. CURTISS and D. E. CAMPBELL, Fourth International Symposium on Combustion, pp. 190-210. Baltimore: Williams and Wilkins, 1953.
10. TH. VON KÁRMÁN, Sixth International Symposium on Combustion, pp. 1-11. New York: Reinhold, 1957.
11. Y. B. ZELDOVICH and D. A. FRANK-KAMENETSKI, *J. Phys. Chem. (U.S.S.R.)* **12**, 100 (1938); Y. B. ZELDOVICH and N. N. SEMENOV, *J. Exper. Theor. Phys. (U.S.S.R.)* **10**, 1116 (1940); Y. B. ZELDOVICH, *J. Phys. Chem. (U.S.S.R.)* **22**, 27 (1948). English translation NACA Techn. Memo No. 1282 (1951).
12. S. F. BOYS and J. CORNER, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **197**, 90 (1949); J. CORNER, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **198**, 388 (1949).
13. E. N. ADAMS, University of Wisconsin Naval Research Lab. Report CF-957 (1948), quoted by M. J. HENKEL, W. P. SPALDING and J. O. HIRSCHFELDER, Third International Symposium on Combustion, pp. 127-135. Baltimore: Williams and Wilkins, 1949.
14. K. A. WILDE, *J. Chem. Phys.* **22**, 1788 (1954).
15. R. FRIEDMAN and E. BURKE, *J. Chem. Phys.* **21**, 710 (1953).
16. G. KLEIN, University of Wisconsin Naval Research Lab. Reports, Sept. 1954, Feb. 1955, and April 1955; *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* **249**, 389 (1957).
17. W. E. JOHNSON and W. NACHBAR, Eighth International Symposium on Combustion. Baltimore: Williams and Wilkins, 1961 (in press).
18. W. E. JOHNSON and W. NACHBAR, unpublished work.
19. G. ROSEN, Seventh International Symposium on Combustion, pp. 339-341. London: Butterworths, 1959; *J. Chem. Phys.* **32**, 311 (1960).
20. R. COURANT and D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. I, pp. 175-176. New York: Interscience, 1953.
21. D. B. SPALDING, *Combust. Flame* **1**, 287, 296 (1957).
22. G. ROSEN, *Jet Propulsion* **28**, 839 (1958).
23. G. MILLÁN and S. SANZ, Report 734 C, Contract No. AF-61 (514), University of Madrid, Madrid, Spain, 1956; G. K. ADAMS and G. B. COOK, *Combust. Flame* **4**, 9 (1960).
24. TH. VON KÁRMÁN, S. S. PENNER and G. MILLÁN, Techn. Rep. No. 16, Contract No. DA-04-495-Ord-446, California Institute of Technology, Pasadena, 1956; M. GILBERT and D. ALTMAN, Sixth International Symposium on Combustion, pp. 222-236. New York: Reinhold, 1957.
25. J. C. GIDDINGS and J. O. HIRSCHFELDER, Sixth International Symposium on Combustion, pp. 199-212. New York: Reinhold, 1957.
26. G. MILLÁN and I. DARIVA, Eighth International Symposium on Combustion. Baltimore: Williams and Wilkins, 1961 (in press).
27. G. DAMKÖHLER, *Z. Elektrochem.* **42**, 846 (1936).
28. S. S. PENNER, *Combustion Researches and Reviews* 1955, pp. 140-162. London: Butterworths, 1956.



# Optimum Staging of Solid-propellant Rocket Vehicles

By

H. L. Thackwell, Jr.<sup>1</sup>, and J. A. Vandenkerekhove<sup>2</sup>

(With 10 Figures)

(Received January 16, 1961)

## Abstract — Zusammenfassung — Résumé

**Optimum Staging of Solid-propellant Rocket Vehicles.** After having established optimum staging principles for determining the relative weights of the stages of a solid propellant rocket vehicle, the relative influence of specific impulse and propellant mass fraction of the various stages on the performance of the optimized multistage system is investigated.

It is shown:

- that the use of more efficient upper stages must result in the selection of relatively smaller boosters.
- that this trends towards lighter first stages is more pronounced for high performance systems for which the gross weight to payload ratio is well below 100.

A comparison between truly optimized and "normal" staging assuming equal velocity increments for the stages, as well as between two and three-stage vehicles, is also carried out.

**Optimale Mehrstufenraketen mit festem Treibstoff.** Nach Aufstellung des optimalen Stufenprinzips wird der Einfluß des spezifischen Impulses und des Massenverhältnisses des Treibstoffs der verschiedenen Stufen auf die Wirkungsweise des optimierten Systems untersucht. Es wird gezeigt, daß die Verwendung von wirkungsvolleren oberen Stufen die Auswahl relativ kleinerer Booster verlangt und daß dies vor allem für Hochleistungssysteme zutrifft. Ein Vergleich zwischen einem optimierten und einem gewöhnlichen System mit gleichem Geschwindigkeitszuwachs je Stufe wird für zwei- und dreistufige Systeme gebracht.

**Sur l'étagement optimum des fusées à propergol solide.** A partir du principe d'optimisation de VERTRECHT les auteurs évaluent l'effet de l'impulsion spécifique et du rapport de masse de chaque étage sur la performance globale. Ils montrent que l'allègement relatif du premier étage par accroissement des performances spécifiques des étages suivants est particulièrement prononcé pour les ensembles à haute performance, dont le rapport de la masse totale à la masse utile est inférieur à 100. Ils comparent l'étagement optimum à celui établi en divisant également le gain de vitesse entre étages.

<sup>1</sup> Senior Vice President, Grand Central Rocket Co., Redlands, California, U.S.A.

<sup>2</sup> Ingénieur A. I. Br., M. S. Cal. Tech., Lecturer at the Institute of Aeronautics, University of Brussels; Consultant to Poudreries Réunies de Belgique and to Manufacture Belge de Lampes et de Matériels Electroniques; Brussels, Belgium.

## I. Introduction

The ultimate aim of the ballistic missile and space vehicle designer is to conceive the most efficient multistage rocket-system practicable for the desired mission.

Very often the most efficient vehicle is the one which has the lowest ratio of gross weight to payload weight, although this must not necessarily be always the case when reliability and cost are taken into account.

It is generally recognized that three of the most effective ways to reduce gross weight are:

1. To increase the specific impulse of the various stages.
2. To increase the propellant mass fraction of the various stages.
3. To employ optimum staging principles in determining the relative weight of the various stages.

The purpose of this paper is to:

1. Establish optimum staging principles.
2. Determine the relative influence of specific impulse and propellant mass fraction of the various stages on the performance of the optimized multistage system.

As an example of what can be gained, the gross weight to payload ratio of a three-stage satellite launch vehicle discussed below (see Fig. 9) can be reduced from 52 to 44 if optimum staging principles are used instead of the normal staging theory which assumes equal velocity increments for the various stages. In this particular case, the first stage to gross weight ratio drops from 70.5% to 29.5%, thus showing the definite interest, in high performance systems, to decrease the relative importance of the booster as illustrated by Fig. 1.

For simplicity the discussion is carried out in the case of two or three-stage vehicles. It could, however, be generalized very easily to  $N$ -staged systems.

Nevertheless it is believed that the analysis is applicable only, in the present form, to solid propellant rockets for which the propellant mass fraction is relatively insensitive to such factors as burning time and acceleration, at least in the range of practical interest (for liquid propellant motors, distinction must be made between powerplant and tank weight which are respectively proportional to thrust and impulse; very large thrusts can much more conveniently be obtained with small solid boosters than with liquid ones).

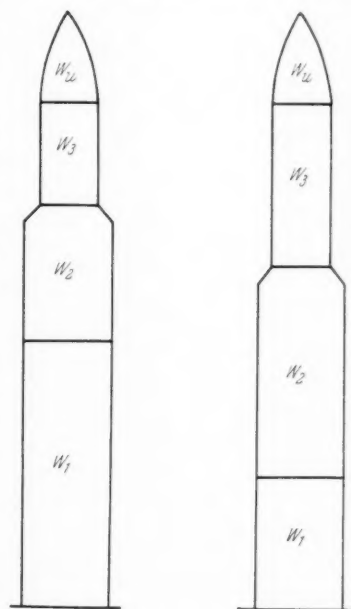


Fig. 1.  $w_1 = w_1 + w_2 + w_3 + w_4$ . Left: "normal" staging; right: optimum staging

## II. Theory of Optimum Staging

The importance of optimum staging has been recognized by F. MALINA and M. SUMMERFIELD in their famous article "The Problem of Escape from the Earth by Rocket" in which they concluded that the velocity increments

of the various stages must be equal when all specific impulses and propellant mass fractions are assumed to be the same [1].

The following works have been directed towards the generalization of this criterium for varying specific impulses and propellant mass fractions from one stage to another [2 to 8].

Although the principles for optimum staging are well established in these references, their practical implications are barely discussed. This is probably due to the fact that most of these analysis have been dealing with liquid propellant systems for which the number of independent parameters is rather large [3 to 8].

The three-stage vehicle under consideration is represented on Fig. 1. The stage weights are  $W_1$ ,  $W_2$  and  $W_3$  while  $W_u$  is the payload weight and  $W_t$  is the vehicle gross weight;

$$W_t = W_1 + W_2 + W_3 + W_u \quad (1)$$

Neglecting gravity and drag, the characteristic velocity  $V_{\max}$  of the vehicle is given by the well known logarithmic law:

$$V_{\max} = g_0 \left[ I_{s1} \ln \frac{W_u + W_1 + W_2 + W_3}{W_u + W_1 + W_2 + W_3 - W_{p1}} + I_{s2} \ln \frac{W_u + W_2 + W_3}{W_u + W_2 + W_3 - W_{p2}} + I_{s3} \ln \frac{W_u + W_3}{W_u + W_3 - W_{p3}} \right] \quad (2)$$

$I_s$  and  $W_p$  being respectively the specific impulse and the propellant weight of the stage under consideration and  $g_0$  the standard gravitational acceleration.

For clarity, let us introduce the following dimensionless parameters:

$$\begin{aligned} \text{first stage } \mu_1 &= \frac{W_1}{W_t}, A_1 = \frac{W_{p1}}{W_1} \\ \text{second stage } \mu_2 &= \frac{W_2}{W_t}, A_2 = \frac{W_{p2}}{W_2} \\ \text{third stage } \mu_3 &= \frac{W_3}{W_t}, A_3 = \frac{W_{p3}}{W_3} \\ \text{payload } \mu_u &= \frac{W_u}{W_t} \end{aligned}$$

It is believed that this choice of dimensionless parameters provides a clearer physical representation of the relative importance of the various stages than the more often used "stage ratio" which is the ratio of the total mass of any stage to the "payload" mass of that stage which takes into account the following stages:

$$\alpha_i = \frac{W_i + W_{i+1} + \dots + W_n + W_u}{W_{i+1} + \dots + W_n + W_u}$$

Over and above, it is mathematically more tractable since eq. (1) can be written as a sum:

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_u = 1 \quad (3)$$

instead of a product:

$$\frac{W_t}{W_u} = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$$

thus permitting to avoid the use of a Lagrangian multiplier [8].

Having introduced the dimensionless parameters  $\mu$  and  $A$ , and eliminated  $\mu_3$  by using eq. (3), the expression for the characteristic velocity becomes, after rearrangement:

$$\frac{V_{\max}}{g_0 I_{s1}} = \ln \frac{1}{1 - \mu_1 A_1} + \frac{I_{s2}}{I_{s1}} \ln \frac{1 - \mu_1}{1 - \mu_1 - \mu_2 A_2} + \frac{I_{s3}}{I_{s1}} \ln \frac{1 - \mu_1 - \mu_2}{\mu_u A_3 + (1 - \mu_1 - \mu_2)(1 - A_3)} \quad (4)$$

For given values of the specific impulses and propellant mass fractions, the optimum staging is obtained by satisfying the following two conditions:

1. For each couple of values  $(\mu_1, \mu_u)$  we must have the optimum division between the second and the third stages: this condition gives:

$$\left( \frac{\partial V_{\max}}{\partial \mu_2} \right)_{\mu_1, \mu_u} = 0 \quad (5)$$

or, after transformation:

$$\frac{A_2}{1 - \mu_1 - \mu_2 A_2} = \frac{I_{s3}}{I_{s2}} \frac{\mu_u A_3}{(1 - \mu_1 - \mu_2) [\mu_u A_3 + (1 - \mu_1 - \mu_2)(1 - A_3)]} \quad (5')$$

When explicit for  $\mu_u$ , this expression can also be written:

$$\mu_u = \frac{(1 - \mu_1 - \mu_2)(1 - A_3)}{\frac{I_{s3}}{I_{s2}} \frac{A_3}{A_2} \frac{1 - \mu_1 - \mu_2 A_2}{1 - \mu_1 - \mu_2} - A_3} \quad (5'')$$

2. For each couple of values  $(\mu_2, \mu_u)$ , we must have the optimum division between the first and the third stages: this condition gives:

$$\left( \frac{\partial V_{\max}}{\partial \mu_1} \right)_{\mu_2, \mu_u} = 0 \quad (6)$$

or, after transformation:

$$\begin{aligned} \frac{I_{s1}}{I_{s2}} \frac{A_1}{1 - \mu_1 A_1} - \frac{1}{1 - \mu_1} + \frac{1}{1 - \mu_1 - \mu_2 A_2} &= \\ &= \frac{I_{s3}}{I_{s2}} \frac{\mu_u A_3}{(1 - \mu_1 - \mu_2) [\mu_u A_3 + (1 - \mu_1 - \mu_2)(1 - A_3)]} \end{aligned} \quad (6')$$

The right hand terms of eqs. (5') and (6') are identical and the equality of the left hand terms thus gives, after rearrangement, a condition which is independent of  $\mu_u$ :

$$\mu_2 = \frac{(1 - \mu_1) \left[ 1 - \frac{I_{s1}}{I_{s2}} \frac{A_1}{A_2} \frac{1 - \mu_1}{1 - \mu_1 A_1} \right]}{1 - \frac{I_{s1}}{I_{s2}} \frac{A_1}{A_2} \frac{1 - \mu_1}{1 - \mu_1 A_1}} \quad (7)$$

It is normal to have a relationship between  $\mu_1$  and  $\mu_2$  only since the two first stages ignore the division of the remaining weight between the third stage and the payload.

In facts condition (7), which defines the optimum staging of the two-stage rocket, could be readily established by maximizing the velocity at burnout of the second stage. We should get:

$$\begin{aligned} \left\{ I_{s1} \frac{A_1}{1 - \mu_1 A_1} + I_{s2} \left[ -\frac{1}{1 - \mu_1} + \frac{1}{1 - \mu_1 - \mu_2 A_2} \right] \right\} d\mu_1 \\ + I_{s2} \frac{A_2}{1 - \mu_1 - \mu_2 A_2} d\mu_2 = 0 \end{aligned}$$

with  $d\mu_1 = -d\mu_2$  since  $\mu_3 + \mu_u$  is fixed, which would give eq. (7) after rearrangement.

Similarly the optimum staging of a three-stage vehicle remains valid if a fourth stage is added.

### III. Numerical Examples

Let us now study the influence of specific impulse and propellant mass fraction of the various stages, optimum staging being assumed throughout the analysis.

The complete discussion is impossible in the scope of an article since it would involve the systematic variation of six independent parameter  $I_{s1}$ ,  $I_{s2}$ ,  $I_{s3}$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  and  $A_3$ .

The number of variables can be reduced, however, by assuming representative values of certain parameters.

This discussion is thus restricted to cases for which  $A_2 = A_3$  and  $I_{s3}/I_{s2} = 1.02$  (similar inert part technology and propellants, the specific impulse increase being due to the higher altitude at which the third stage burns).

All results are presented as functions of the gross weight to payload weight ratio  $W_t/W_u = 1/\mu_u$  which is representative of the efficiency of the system to perform the desired mission.

#### 1. Influence of Propellant Mass Fraction $A_2$

Figs. 2 and 3 represent  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  and  $V_{\max}/g_0$   $I_{s1}$  as functions of  $1/\mu_u$  for five values of  $A_2$  ranging from 0.88 to 0.96.

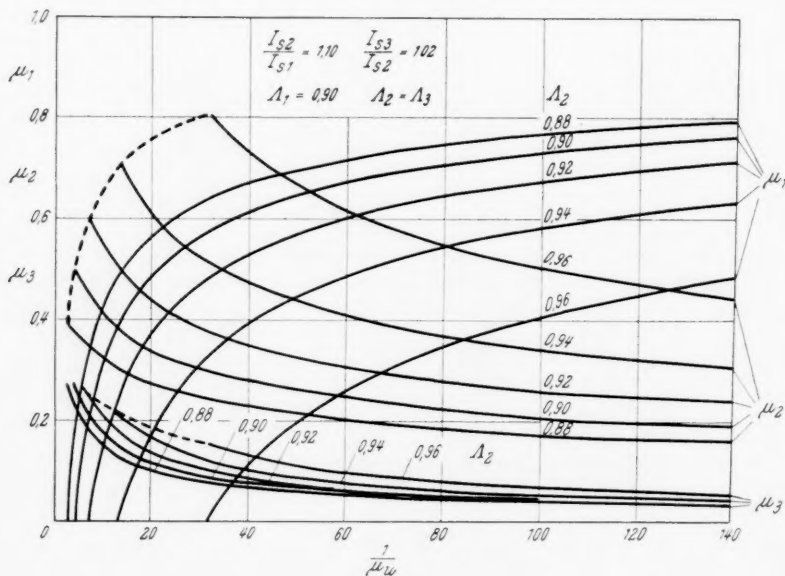


Fig. 2

These curves have been computed for  $A_1 = 0.90$  which is representative of today's first stage technology and for  $I_{s2}/I_{s1} = 1.10$  which accounts for the fact that the thrust coefficient of the second stage is approximately 10% higher than that of the first one because it is fired above the densest atmospheric layers.

It is seen on Fig. 2 that an improvement in the propellant mass fraction of the upper stages results in a significant decrease in the relative importance of the first stage, the lower the overall ratio  $1/\mu_u$ , the smaller the booster.

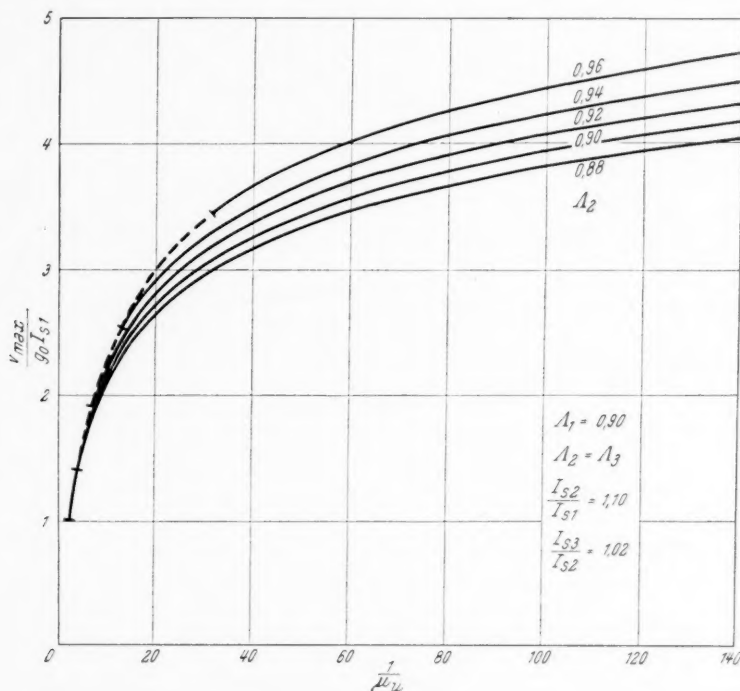


Fig. 3

This property has already been demonstrated by THACKWELL which stated that "when using solid propellant rocket motor upper stages designed to operate at relatively low pressure (which enable the achievement of higher propellant mass fractions than can be attained for the higher pressure booster stage), these more efficient upper stages must be made appreciably larger and the less effective boost stage be made relatively smaller..." [2].

Moreover, below a certain overall ratio,  $\mu_1 = 0$  and a three-stage system is not needed anymore. Just above that limit, however, these conclusions must be very cautiously interpreted since the use of a smaller first stage will, in facts, result in lowering the altitude at which the second stage is ignited, thus decreasing somewhat the values of  $I_{s2}/I_{s1}$  (our computation assumes that  $I_{s2}/I_{s1}$  is independent of  $\mu_1$ )<sup>1</sup>.

Fig. 3, on the other hand, shows that an improvement in the propellant mass fraction of the upper stages significantly increases the characteristic velocity of the vehicle.

<sup>1</sup> It must be emphasized, for clarity, that when the booster size goes to zero, the resulting two-stage vehicle performance is only correct if the rocket is launched at altitude, a situation which is not considered in this note (see also: comparison between two and three-stage vehicles).

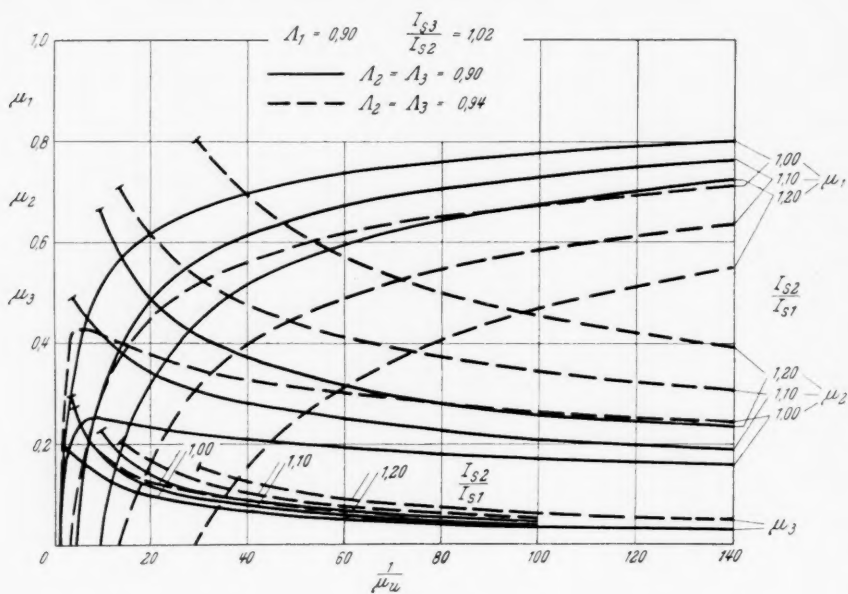


Fig. 4

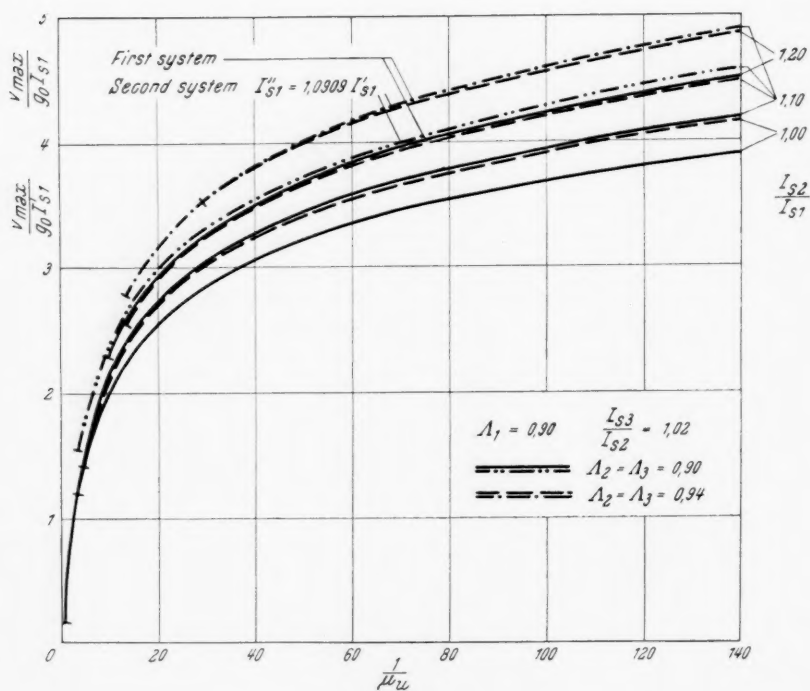


Fig. 5



### 2. Influence of Specific Impulse Ratio $I_{s2}/I_{s1}$

Figs. 4 and 5 represent  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  and  $V_{\max}/g_0 I_{s1}$  as functions of  $1/\mu_u$  for  $\Lambda_2=0.90$  (a relatively current design) and 0.94 (an advanced design).

These curves have been computed for  $I_{s2}/I_{s1}=1.00$ , 1.10 and 1.20 (1.10 is for all three stages using similar propellants, 1.20 for the upper stages made of high energy propellants, and 1.00 for the upper stages made of low energy propellants, an improbable design).

It is seen on Fig. 4 that an improvement in the specific impulse of the upper stages results in a significant decrease in the relative importance of the first stage, the lower the overall ratio  $1/\mu_u$ , the smaller the booster. As stated before, this tendency is more pronounced for high values of the propellant mass fraction of the upper stages.

Fig. 5 also shows that an improvement in the specific impulse of the upper stages significantly increases the characteristic velocity of the vehicle. In fact an 8% increase in specific impulse  $I_{s2}$  has approximately the same effect on characteristic velocity that an improvement from 0.09 to 0.94 in propellant mass ratio of the upper stages.

### 3. Influence of Specific Impulse $I_{s1}$

In order to evaluate the influence of the first stage, we shall compare the characteristic velocity reached by the following two vehicles:

— a system whose upper stages only are made of high energy propellants and for which, therefore,  $I_{s2}/I_{s1}=1.20$ ,

— a system using high energy propellants in all three stages and for which, therefore,  $I_{s2}/I_{s1}=1.10$ , the effect of altitude being taken into account.

For comparison purposes we assumed identical propellants for the upper stages of both systems.

The first stage specific impulse of the second system must therefore be  $1.20/1.10=1.0909$  times higher than that of the first system:

$$I'_{s1}=1.0909 I_{s1}$$

The  $V_{\max}$  — versus —  $1/\mu_u$  curves of the first system are thus obtained by multiplying the  $V_{\max}/g_0 I_{s1}$  — versus —  $1/\mu_u$  curves corresponding to  $I_{s2}/I_{s1}=1.20$  by the factor  $g_0 I'_{s1}$  while those of the second system are computed through multiplication of the curves for  $I_{s2}/I_{s1}=1.10$  by the factor  $1.0909 g_0 I'_{s1}$ .

The comparison has been carried out on Fig. 5 whose vertical axis is graduated in  $V_{\max}/g I'_{s1}$  for this purpose.

It is seen that the velocity increase due to the use of a high energy propellant in the first stage is rather slight and decreases when the propellant mass fraction of the upper stages improves.

### 4. Influence of Propellant Mass Fraction $\Lambda_1$

Figs. 6 and 7 represent  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  and  $V_{\max}/g_0 I_{s1}$  as functions of  $1/\mu_u$  for  $\Lambda_2=0.90$  and 0.94 and for  $\Lambda_1=0.88$ , 0.90 and 0.92.

These curves have been computed for  $I_{s2}/I_{s1}=1.10$ .

It is seen on Fig. 6 that an improvement in propellant mass fraction of the first stage results in a slight increase in its optimum relative importance.

Nevertheless  $\mu_1$  is still "weighted down" by a decrease in overall mass ratio  $1/\mu_u$  or by an increase in propellant mass fraction of the upper stages.

Fig. 7 also shows that the characteristic velocity of the optimum three-stage system is relatively insensitive to the propellant mass fraction of booster, the

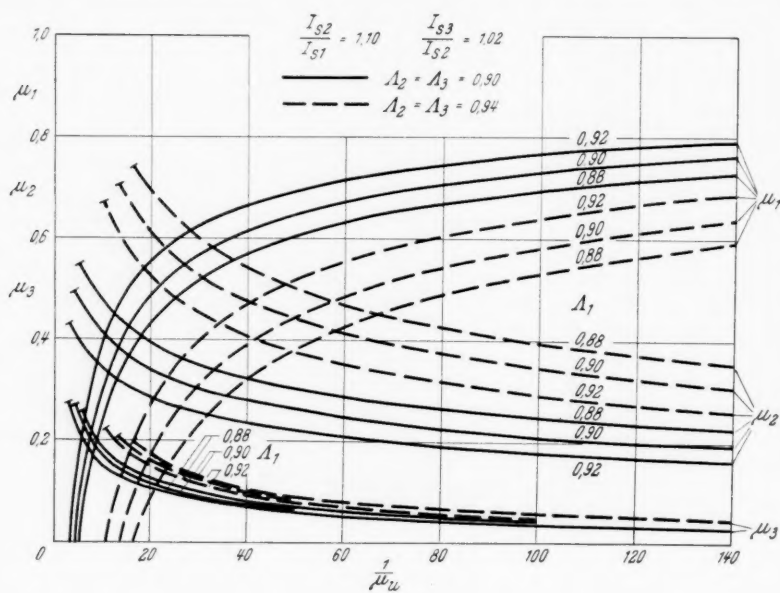


Fig. 6

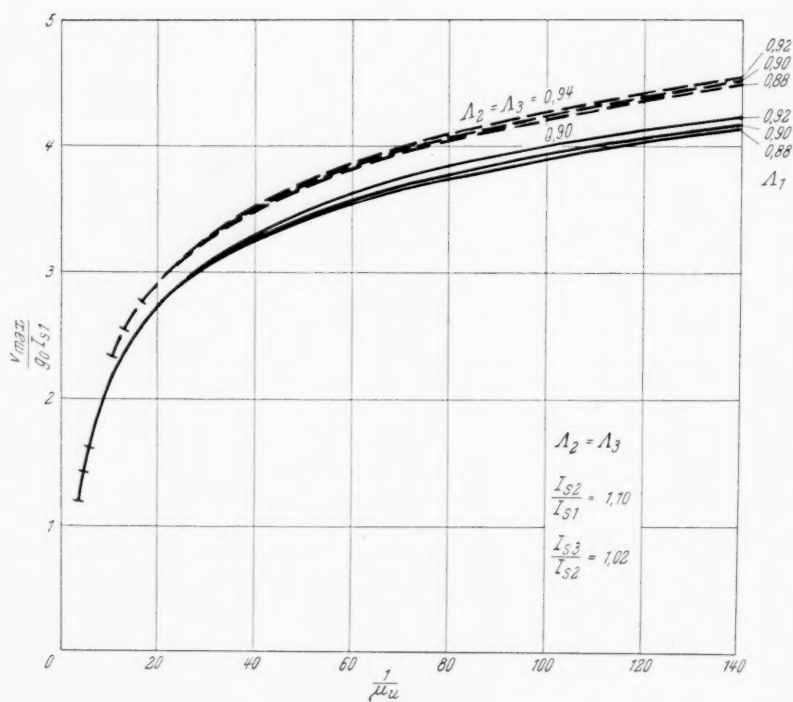


Fig. 7

better  $A_2$ , the smaller the influence of  $A_1$  (the use of high energy propellants for the upper stages is expected to accentuate this trend).

To conclude this part of the analysis, for optimized systems, the characteristics of the upper stages are of upmost importance while those of the first stage are relatively unimportant.

In facts it is believed that the development of improved upper stages is the most promizing way to increase the overall performance of solid-propellant rocket vehicles.

This conclusion, based on technical considerations only, is even more substantiated when the cost and delay aspects are taken into account.

#### IV. Non Optimum System

The study of non optimum systems is outside the scope of this paper and we shall just make a few remarks.

Some systems are more sensitive than others to optimization. It can for instance be shown that the characteristic velocity of a system is less influenced

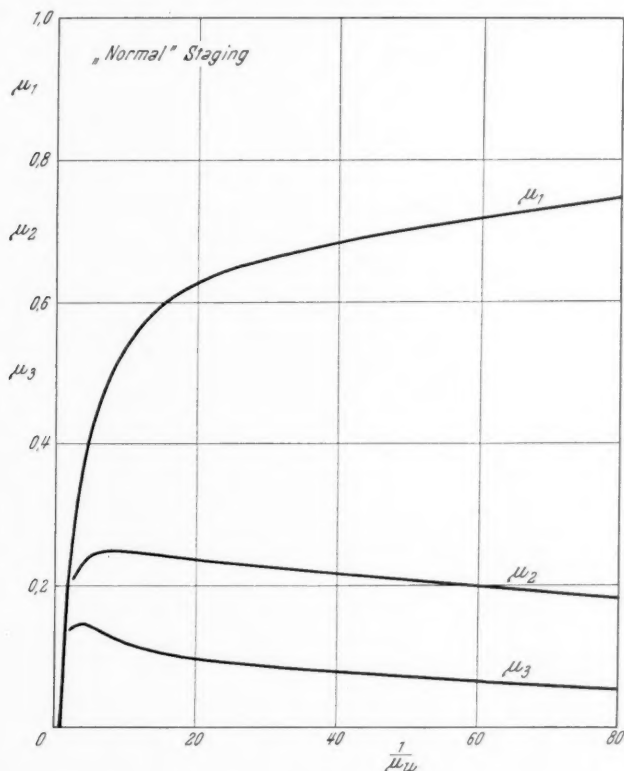


Fig. 8

by the relative importance of the booster when the performance of the upper stages is improved [2]. We shall refer the reader to the equations established by GECKLER for the purpose of evaluating the relative importance of the various possibilities for improving a given system [9].

For illustrative purpose, we shall compare, hereunder, the performance of truly optimized systems with those of vehicles using the well known "normal" staging [1].

If we assume:

$$I_{s1} = I_{s2} = I_{s3}$$

and

$$A_1 = A_2 = A_3$$

the conditions (5), (6) and (7) defining optimum staging can be reduced to:

$$\mu_2 = \mu_1 (1 - \mu_1) \quad (8)$$

$$\mu_3 = \mu_1 (1 - \mu_1)^2 \quad (9)$$

and

$$\mu_u = (1 - \mu_1)^3 \quad (10)$$

Fig. 8 represents  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  and  $\mu_3$  as functions of  $1/\mu_u$  for "normal" staging. It is seen that the relative importance of the first stage is in most cases appreciably greater than for truly optimized systems (especially for high performance upper stages).

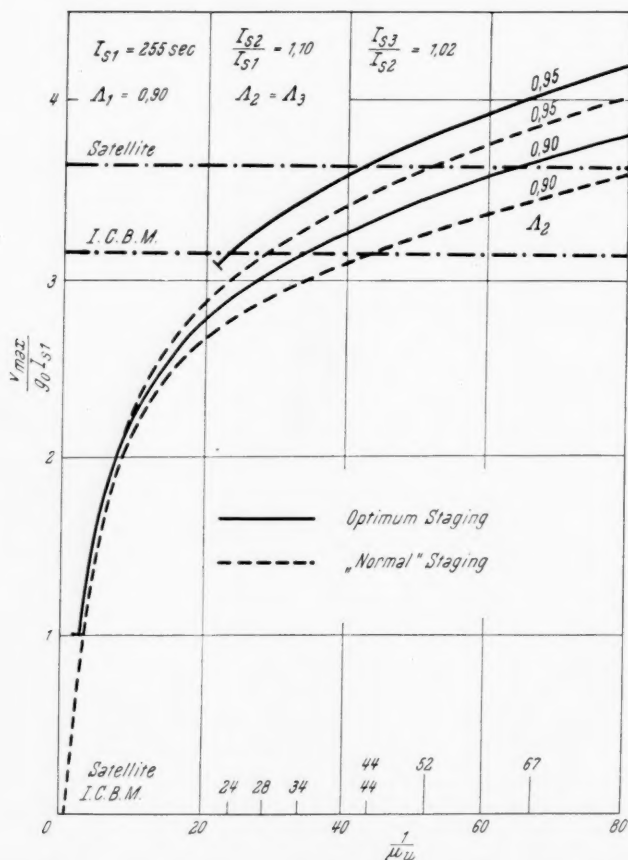


Fig. 9

When conditions (8), (9) and (10) are introduced in eq. (4) we get, after rearrangement:

$$\frac{V_{\max}}{g_0 I_{s1}} = \ln \frac{1}{1 - \mu_1 A_1} + \frac{I_{s2}}{I_{s1}} \ln \frac{1}{1 - \mu_1 A_2} + \frac{I_{s3}}{I_{s1}} \ln \frac{1}{1 - \mu_1 A_3} \quad (11)$$

which permits to compute the performance of a vehicle using "normal" staging.

Fig. 9 compares truly optimized and "normally" staged systems. It has been computed for the following values:

$$I_{s1} = 255 \text{ sec (corresponding to a sea level value of 245 sec).}$$

$$\frac{I_{s3}}{I_{s2}} = 1.02, \quad \frac{I_{s2}}{I_{s1}} = 1.10$$

$$A_1 = 0.90, \quad A_2 = A_3 = 0.90 \text{ and } 0.95.$$

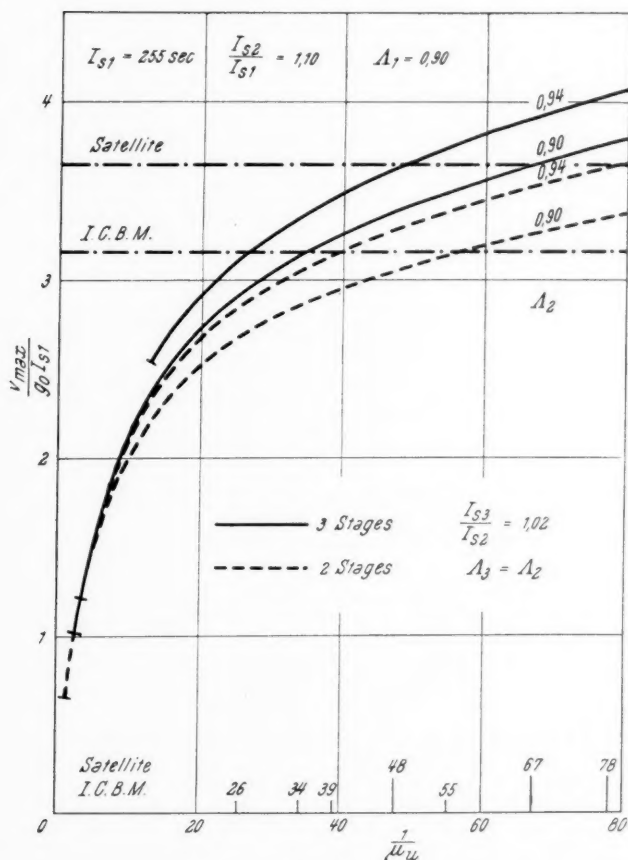


Fig. 10

Two typical missions have been considered [2]:

1. A ground launched I.C.B.M. (5,500 Mile range) for which the characteristic velocity must be equal to 25,900 fps (7,894 m/sec) taking into account typical drag and gravity losses.

2. A ground launched Satellite Vehicle (300 Mile Orbit) for which the characteristic velocity must be equal to 30,000 fps (9,144 m/sec) including losses.

The overall mass ratios required for these missions are indicated just above the abscissa axis. It is seen that the gain incurred from using truly optimized, as compared to "normal" staging, is significant.

For instance the overall mass ratio of the Satellite Vehicle can be reduced from 52 to 42 for  $A_2 = 0.95$ .

### V. Comparison between Two and Three-stage Vehicles

Finally, after having demonstrated the advantage to weight down the booster, we shall evaluate the penalty incurred from the complete suppression of this stage.

Fig. 10 compares truly optimized two and three-stage vehicles. It has been computed for the following values:

$$\begin{aligned} I_{s1} &= 255 \text{ sec}, & \frac{I_{s2}}{I_{s1}} &= 1.10 \\ A_1 &= 0.90, & A_2 &= 0.90 \text{ and } 0.94 \end{aligned}$$

the two-stage vehicle being optimized by using condition (7).

The two typical missions are identical to those described above. It is seen that the suppression of the booster introduces a rather heavy penalty, since the importance of the relatively inefficient first stage is increased by the suppression of the third stage.

### References

1. F. MALINA and M. SUMMERFIELD, The Problem of Escape from the Earth by Rocket. *J. Aeronaut. Sci.* **14** (August 1947).
2. L. THACKWELL, Generalized Study of Solid Propellant Rockets for Upper Stages of Multistage Rocket Vehicles. Grand Central Rocket Report AC-12 presented at the 1960 JANAF Meeting.
3. M. SUMMERFIELD and H. SEIFERT, *Space Technology*, Chap. 3. New York: J. Wiley and Sons, 1959.
4. M. VERTRECHT, A Method of Calculating the Mass Ratios of Step Rockets. *J. Brit. Interplan. Soc.* **15** (March/April 1956).
5. M. GOLDSMITH, On the Optimization of Two-Stage Rockets. *Jet Propulsion* **27**, No. 4 (1957).
6. E. SCHURMAN, Optimum Staging Technique for Multistaged Rocket Vehicles. *Jet Propulsion* **27**, No. 8 (1957).
7. L. WEISBORN, A Generalized Optimisation Procedure for N-Staged Missiles. *Jet Propulsion* **28**, No. 3 (1958).
8. M. ARENS, On a Generalized Optimisation Procedure for N-Staged Missiles. *Jet Propulsion* **28**, No. 11 (1958).
9. R. GECKLER, Ideal Performance of Multistage Rockets. *ARS Journal* **30**, No. 6 (1960).

# Gravitational Speed and Unmanned Space Flight

By

J. M. J. Kooy<sup>1</sup>

(With 8 Figures)

(Received March 1, 1961)

## Abstract — Zusammenfassung — Résumé

**Gravitational Speed and Unmanned Space Flight.** It seems plausible that gravitation has a finite speed of propagation. Probably this speed is equal to the speed of light. In order to take into account a finite speed of the gravitational waves in problems of astrodynamics an iteration method is advanced. Consequently the question is discussed whether space flight can provide an experiment for measuring the gravitational speed.

**Gravitationsgeschwindigkeit und unbemannte Raumfahrt.** Es scheint plausibel, daß auch die Schwere eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit haben muß, wahrscheinlich gleich der Lichtgeschwindigkeit. Es wird ein Iterationsverfahren angegeben, um in der Astrodynamik den Folgen einer endlichen Geschwindigkeit der Gravitation Rechnung zu tragen. Weiter wird die Frage diskutiert, wie man in der Raumfahrt zu einem Experiment kommen kann, um die Geschwindigkeit der Gravitationswellen zu messen.

**Vitesse de la gravitation et l'astronautique.** Il est plausible que la gravitation a une vitesse de propagation limitée, probablement égale à la vitesse de la lumière. Un procédé de calcul d'itération est indiqué pour prendre en compte les effets dus à cette vitesse de propagation limitée en cas des problèmes de la mécanique céleste. Ensuite la question est discutée s'il est possible à arranger un expériment avec des véhicules d'espace pour mesurer la vitesse de gravitation.

## I. Introduction

In the general theory of relativity a solution is found only for the motion of a particle in a central field. In accordance with this solution the motion of a planet in the central solar field is slightly different from the NEWTONIAN solution. By the solution of the general theory of relativity, an advance of the perihelion of the KEPLER orbit must occur which is largest in case of the fastest planet, Mercury. According to the general theory of relativity this advance, in case of Mercury, amounts to 42.6" per age. Also by planetary perturbations an advance of the perihelion is generated so that we have to do here with an extra variation due to the difference between the general theory of relativity and the NEWTONIAN

<sup>1</sup> N. V. R.; Lector of the Royal Military Academy; St. Ignatiusstraat 99a, Breda, The Netherlands.



theory. Indeed the motion of Mercury shows such an extra perihelion advance. However, according to the measurements this extra precession is only about  $30''$ . Hence the accordance between theory and measurement is not quite satisfactory. For the other planets, the relativistic advance of the perihelion is too small for detection. On the other hand, if an earth satellite is describing an orbit around the earth with an eccentricity 0.2 (= eccentricity of the orbit of Mercury) the relativistic precession of the perigee is about 20 times as large as in case of Mercury. However, because an earth satellite has a large angular speed along the celestial sky, it will not be easy to detect this extra precession of the perigee. For the rest the deflection of a light ray of a star, passing the sun at short distance, predicted by the general theory of relativity, is not in accordance with measurement. Therefore, it is still an open question whether the very ingenious general theory of relativity is—in the sense of celestial mechanics—really confirmed. On the other hand the special theory of relativity may be considered as strongly confirmed by the facts. Further, no solution of EINSTEIN's equations has yet been found for a field with two singularities or particles. In case of two planets, disturbing one another, the conditions are still more complex. Is gravitational action instantaneous, or has it a finite speed of propagation? Can two bodies revolve round one another without radiation of gravitational energy? We still do not know.

Despite the general theory of relativity, the secret of the real nature of gravity still remains. It seems probable that gravitational action at a distance and electromagnetic action at a distance have something in common. In this connection, EINSTEIN spoke about gravitational waves and assumed that the velocity of propagation of these waves is equal to the speed of light. Considering the matter from a quantum mechanical point of view, EINSTEIN assumed particles of negative mass, *gravitons*, which can be compared with the photons in the quantum mechanical description of an electromagnetic field. In case of such a graviton the MINKOWSKI speed along the worldline of the particle points into the direction of the past. When colliding with an ordinary material particle, a momentum will then be transferred pointing in negative speed direction, hence resulting in an attraction. According to these conceptions, also a stationary gravitational field must be conceived as a continuous stream pattern of gravitons or gravitational waves. Similar to the character of a photon, also a graviton must then be assumed as having such an innate nature that it can appear as particle (with negative mass) or as wave in complementary sense.

Now it will be obvious that a finite speed of propagation of the gravitational waves will effect the motion of celestial bodies and space vehicles, although the deviation from "instantaneous action at a distance" will be very small. Further it seems plausible to assume that this speed of propagation will be equal to the speed of light.

Let us denote this speed of propagation by  $c$ .

## II. On the Motion of Two Planets Disturbing One Another, Assuming a Speed of Propagation of the Gravitational Waves Equal to the Speed of Light

In order to attack this problem let us first consider the differential equations of motion in ordinary NEWTONIAN form. Let us indicate the masses of the two planets by  $m_1$  and  $m_2$  and the heliocentric coordinates by  $x_1 y_1 z_1$  and  $x_2 y_2 z_2$ , whereas  $M$  denotes the solar mass and  $f$  the constant of gravitation. Then the equations of motion in NEWTONIAN form become:

$$\left. \begin{aligned}
 \ddot{x}_1 &= -fM \frac{x_1}{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{3/2}} - fm_1 \frac{x_1}{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{3/2}} + \\
 &\quad + fm_2 \frac{x_2 - x_1}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{3/2}} - fm_2 \frac{x_2}{(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)^{3/2}} \\
 \text{and similarly } \ddot{y}_1 \text{ and } \ddot{z}_1. \\
 \ddot{x}_2 &= -fM \frac{x_2}{(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)^{3/2}} - fm_2 \frac{x_2}{(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)^{3/2}} + \\
 &\quad + fm_1 \frac{x_1 - x_2}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{3/2}} - fm_1 \frac{x_1}{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{3/2}} \\
 \text{and similarly } \ddot{y}_2 \text{ and } \ddot{z}_2.
 \end{aligned} \right\} (1)$$

If we assume—as in classical celestial mechanics—that the velocity of propagation of the gravitational force is infinite, in system (1) in all terms the coordinates  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$  refer to the same time instant  $t$ .

Assuming an initial state:

$$t = 0 \rightarrow \begin{cases} x_{10}, y_{10}, z_{10}, \dot{x}_{10}, \dot{y}_{10}, \dot{z}_{10}, \\ x_{20}, y_{20}, z_{20}, \dot{x}_{20}, \dot{y}_{20}, \dot{z}_{20}, \end{cases}$$

the eqs. (1) can be solved by the method of successive approximations, using the undisturbed KEPLER motion as zero approximation, or by integration by steps applying the method of RUNGE and KUTTA. Let us indicate shortly this classic solution (hence the solution corresponding with instantaneous gravitational action throughout all distances coming into play) by:

$$x_1(t)_0, y_1(t)_0, z_1(t)_0, x_2(t)_0, y_2(t)_0, z_2(t)_0.$$

Let us now proceed to the supposition of a finite speed of gravitational propagation equal to the speed of light. Then it seems advisable also to account for the variation of mass with the speed according to the special theory of relativity. For it seems probable that this variation of mass will cause a deviation from the classic motion of the same order of magnitude as the variation which is only due to the finiteness of the speed of gravitational propagation if this speed be equal to  $c$  = speed of light.

Then we have to replace in (1) the left members by:

$$\frac{d}{dt} \frac{\dot{x}_1}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2}{c^2}}}, \text{ and similarly in the other equations.}$$

Now:

$$\begin{aligned}
 &\frac{d}{dt} \dot{x}_1 \left( 1 - \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2}{c^2} \right)^{-1/2} = \\
 &= \frac{\ddot{x}_1}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2}{c^2}}} + \frac{\dot{x}_1}{2} \left( 1 - \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2}{c^2} \right)^{-3/2} \frac{2(\dot{x}_1 \ddot{x}_1 + \dot{y}_1 \ddot{y}_1 + \dot{z}_1 \ddot{z}_1)}{c^2} = \\
 &= \frac{\ddot{x}_1}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2}{c^2}}} + \frac{\dot{x}_1^2 \ddot{x}_1 + \dot{x}_1 \dot{y}_1 \ddot{y}_1 + \dot{x}_1 \dot{z}_1 \ddot{z}_1}{c^2 \left( 1 - \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2}{c^2} \right)^{3/2}} = \\
 &= \frac{\ddot{x}_1 \left[ c^2 \left( 1 - \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2}{c^2} \right) + \dot{x}_1^2 \right] + \dot{x}_1 \dot{y}_1 \ddot{y}_1 + \dot{x}_1 \dot{z}_1 \ddot{z}_1}{c^2 \left( 1 - \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2}{c^2} \right)^{3/2}}.
 \end{aligned}$$

If we then further assume that the right members of (1) still represent the forces per unit of rest mass by which both planets are acted upon, we obtain as equations of motion:

$$\begin{aligned}
 & \frac{(c^2 - \dot{y}_1^2 - \dot{z}_1^2)\ddot{x}_1 + \dot{x}_1\dot{y}_1\ddot{y}_1 + \dot{x}_1\dot{z}_1\ddot{z}_1}{c^2\left(1 - \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \\
 & \quad = -fM \frac{x_1}{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{3/2}} - fm_1 \frac{x_1}{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{3/2}} + \\
 & \quad + fm_2 \frac{x_2 - x_1}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{3/2}} - fm_2 \frac{x_2}{(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)^{3/2}} \\
 & \frac{\dot{y}_1\dot{x}_1\ddot{x}_1 + (c^2 - \dot{x}_1^2 - \dot{z}_1^2)\ddot{y}_1 + \dot{y}_1\dot{z}_1\ddot{z}_1}{c^2\left(1 - \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \\
 & \quad = -fM \frac{y_1}{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{3/2}} - fm_1 \frac{y_1}{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{3/2}} + \\
 & \quad + fm_2 \frac{y_2 - y_1}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{3/2}} - fm_2 \frac{y_2}{(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)^{3/2}} \\
 & \frac{\dot{z}_1\dot{x}_1\ddot{x}_1 + \dot{z}_1\dot{y}_1\ddot{y}_1 + (c^2 - \dot{x}_1^2 - \dot{y}_1^2)\ddot{z}_1}{c^2\left(1 - \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \\
 & \quad = -fM \frac{z_1}{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{3/2}} - fm_1 \frac{z_1}{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{3/2}} + \\
 & \quad + fm_2 \frac{z_2 - z_1}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{3/2}} - fm_2 \frac{z_2}{(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)^{3/2}} \\
 & \frac{(c^2 - \dot{y}_2^2 - \dot{z}_2^2)\ddot{x}_2 + \dot{x}_2\dot{y}_2\ddot{y}_2 + \dot{x}_2\dot{z}_2\ddot{z}_2}{c^2\left(1 - \frac{\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \\
 & \quad = -fM \frac{x_2}{(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)^{3/2}} - fm_2 \frac{x_2}{(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)^{3/2}} + \\
 & \quad + fm_1 \frac{x_1 - x_2}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{3/2}} - fm_1 \frac{x_1}{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{3/2}} \\
 & \frac{\dot{y}_2\dot{x}_2\ddot{x}_2 + (c^2 - \dot{x}_2^2 - \dot{z}_2^2)\ddot{y}_2 + \dot{y}_2\dot{z}_2\ddot{z}_2}{c^2\left(1 - \frac{\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \\
 & \quad = -fM \frac{y_2}{(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)^{3/2}} - fm_2 \frac{y_2}{(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)^{3/2}} + \\
 & \quad + fm_1 \frac{y_1 - y_2}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{3/2}} - fm_1 \frac{y_1}{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{3/2}} \\
 & \frac{\dot{z}_2\dot{x}_2\ddot{x}_2 + \dot{z}_2\dot{y}_2\ddot{y}_2 + (c^2 - \dot{x}_2^2 - \dot{y}_2^2)\ddot{z}_2}{c^2\left(1 - \frac{\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \\
 & \quad = -fM \frac{z_2}{(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)^{3/2}} - fm_2 \frac{z_2}{(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)^{3/2}} + \\
 & \quad + fm_1 \frac{z_1 - z_2}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{3/2}} - fm_1 \frac{z_1}{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{3/2}}
 \end{aligned} \tag{2}$$

Now, further taking into account a finite speed of gravitational propagation equal to the speed of light  $c$ , in system (2) all members on the left of the equal sign refer to time instant  $t$  as well as the first term on the right of the equal sign in any of these equations. Further, in the first three eqs. (2), in the second term on the right of the equal sign,  $x_1, y_1$  and  $z_1$  refer to the time instant  $t_1$  following from:

$$t_1 + \frac{1}{c} \sqrt{[x_1(t_1)]^2 + [y_1(t_1)]^2 + [z_1(t_1)]^2} = t. \quad (3)$$

Next, in the first three eqs. (2), in the third term on the right of the equal sign,  $x_1, y_1$  and  $z_1$  refer to time  $t$ , and  $x_2, y_2$  and  $z_2$  refer to time  $t_2$  following from:

$$t_2 + \frac{1}{c} \sqrt{[x_2(t_2) - x_1(t)]^2 + [y_2(t_2) - y_1(t)]^2 + [z_2(t_2) - z_1(t)]^2} = t. \quad (4)$$

Ultimately, in the first three eqs. (2), in the fourth term on the right of the equal sign,  $x_2, y_2$  and  $z_2$  refer to time  $t_2'$  following from:

$$t_2' + \frac{1}{c} \sqrt{[x_2(t_2')]^2 + [y_2(t_2')]^2 + [z_2(t_2')]^2} = t. \quad (5)$$

Turning to the last three eqs. (2), in the second term on the right of the equal sign,  $x_2, y_2$  and  $z_2$  again refer to time instant  $t_2'$  following from (5).

Further, in the last three eqs. (2), in the third term on the right of the equal sign,  $x_2, y_2$  and  $z_2$  refer to time  $t$ , and  $x_1, y_1$  and  $z_1$  refer to time  $t_1'$  following from:

$$t_1' + \frac{1}{c} \sqrt{[x_1(t_1') - x_2(t)]^2 + [y_1(t_1') - y_2(t)]^2 + [z_1(t_1') - z_2(t)]^2} = t. \quad (6)$$

For the rest, in the last eqs. (2), in the fourth term on the right of the equal sign,  $x_1, y_1$  and  $z_1$  refer to time  $t_1$  following from (3).

Now in order to solve the system (2)—thereby accounting for a finite speed of gravitational propagation equal to the speed of light  $c$ —we can apply the following iteration procedure. Let us consider the solution of (1), hence:

$$x_1(t)_0, y_1(t)_0, z_1(t)_0, x_2(t)_0, y_2(t)_0, z_2(t)_0 \quad (7)$$

also as solution in zero approximation of (2). Then as to this solution in zero approximation we can find  $t_1, t_2, t_2'$  and  $t_1'$  corresponding with  $t$ , by (3), (4), (5), and (6), from:

$$t_1 + \frac{1}{c} \sqrt{[x_1(t_1)_0]^2 + [y_1(t_1)_0]^2 + [z_1(t_1)_0]^2} = t \quad (3_0)$$

$$t_2 + \frac{1}{c} \sqrt{[x_2(t_2)_0 - x_1(t)_0]^2 + [y_2(t_2)_0 - y_1(t)_0]^2 + [z_2(t_2)_0 - z_1(t)_0]^2} = t \quad (4_0)$$

$$t_2' + \frac{1}{c} \sqrt{[x_2(t_2')_0]^2 + [y_2(t_2')_0]^2 + [z_2(t_2')_0]^2} = t \quad (5_0)$$

$$t_1' + \frac{1}{c} \sqrt{[x_1(t_1')_0 - x_2(t)_0]^2 + [y_1(t_1')_0 - y_2(t)_0]^2 + [z_1(t_1')_0 - z_2(t)_0]^2} = t \quad (6_0)$$

and hence at the same time the quantities:

$$\left. \begin{aligned} &x_1(t_1)_0, y_1(t_1)_0, z_1(t_1)_0, x_2(t_2)_0, y_2(t_2)_0, z_2(t_2)_0 \\ &x_1(t_1')_0, y_1(t_1')_0, z_1(t_1')_0, x_2(t_2')_0, y_2(t_2')_0, z_2(t_2')_0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

which may be considered in this connection as functions of  $t$ . Now the first three eqs. (2) are linear in  $\ddot{x}_1, \ddot{y}_1$  and  $\ddot{z}_1$ , so that they can be solved with respect to  $\ddot{x}_1, \ddot{y}_1$  and  $\ddot{z}_1$ . The last three eqs. (2) are linear in  $\ddot{x}_2, \ddot{y}_2$  and  $\ddot{z}_2$ , so that they can be solved with respect to  $\ddot{x}_2, \ddot{y}_2$  and  $\ddot{z}_2$ .

Then substituting the solution in zero approximation (7) in the right members of the eqs. (2) in combination with the quantities (8) in the corresponding terms as indicated above, and also substituting this solution (7) in the coefficients

of the second derivatives  $\ddot{x}_1, \ddot{y}_1, \ddot{z}_1, \ddot{x}_2, \ddot{y}_2$  and  $\ddot{z}_2$  in the left members, and subsequently solving the system with respect to  $\ddot{x}_1, \ddot{y}_1, \ddot{z}_1, \ddot{x}_2, \ddot{y}_2$  and  $\ddot{z}_2$ , we obtain:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 &= F_1(t)_0, & \ddot{y}_1 &= F_2(t)_0, & \ddot{z}_1 &= F_3(t)_0 \\ \ddot{x}_2 &= F_4(t)_0, & \ddot{y}_2 &= F_5(t)_0, & \ddot{z}_2 &= F_6(t)_0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

In (9) the function values  $F_j(t)_0$  ( $j=1, 2, \dots, 6$ ) can then be determined for any value of  $t$ , so that, within a time lapse  $t=0 \rightarrow t$  these functions can be represented as polynomial expressions of the type:

$$\left. \begin{aligned} F_j(t)_0 &\cong \sum_{k=1}^n \frac{\prod_{i \neq k} (t-t_i)}{\prod_{i \neq k} (t_k-t_i)} F_{kj}(t_k) \\ \prod_{i \neq k} (t-t_i) &= (t-t_1)(t-t_2) \dots (t-t_{k-1})(t-t_{k+1}) \dots (t-t_{n-1})(t-t_n) \\ \prod_{i \neq k} (t_k-t_i) &= (t_k-t_1)(t_k-t_2) \dots (t_k-t_{k-1})(t_k-t_{k+1}) \dots (t_k-t_{n-1})(t_k-t_n) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Hence in (10) we obtain for the function  $F_j(t)_0$  expressions of the type:

$$F_j(t)_0 = \sum_{k=0}^{n-1} A_{kj} t^k. \text{ Introducing (10) in (9), and writing:}$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^t F_j(t)_0 dt &= G_j(t)_0, \text{ we obtain:} \\ \dot{x}_1(t)_1 &= G_1(t)_0 + \dot{x}_{10} & \dot{y}_1(t)_1 &= G_2(t)_0 + \dot{y}_{10} & \dot{z}_1(t)_1 &= G_3(t)_0 + \dot{z}_{10} \\ \dot{x}_2(t)_1 &= G_4(t)_0 + \dot{x}_{20} & \dot{y}_2(t)_1 &= G_5(t)_0 + \dot{y}_{20} & \dot{z}_2(t)_1 &= G_6(t)_0 + \dot{z}_{20} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

in which

$$\left. \begin{aligned} G_j(t)_0 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A_{kj}}{k+1} t^{k+1} \\ j &= 1, 2, \dots, 6 \end{aligned} \right\}$$

Then again integrating (11) with respect to time, we obtain:

$$\left. \begin{aligned} x_1(t)_1 &= H_1(t)_0 + \dot{x}_{10}t + x_{10}, & x_2(t)_1 &= H_4(t)_0 + \dot{x}_{20}t + x_{20} \\ y_1(t)_1 &= H_2(t)_0 + \dot{y}_{10}t + y_{10}, & y_2(t)_1 &= H_5(t)_0 + \dot{y}_{20}t + y_{20} \\ z_1(t)_1 &= H_3(t)_0 + \dot{z}_{10}t + z_{10}, & z_2(t)_1 &= H_6(t)_0 + \dot{z}_{20}t + z_{20} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

in which

$$H_j(t)_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A_{kj}}{(k+1)(k+2)} t^{k+2}$$

(11) and (12) are then the speed components and the spatial coordinates of the two planets in first approximation. Next let us again introduce this solution in first approximation (11), (12) in similar way as indicated above in the eqs. (2) and let us repeat the same procedure as carried out above with the solution in zero approximation. We then obtain the speed components and spatial coordinates of the two planets in second approximation, etc. This iteration process will converge when the integration time lapse  $t=0 \rightarrow t$  is not too large. Then for the time  $t$  we can compute the speed components and spatial coordinates of the two planets with any required degree of accuracy. This result can then be used as new initial state and the same iteration procedure can then be repeated for a following time lapse which is sufficiently small for convergence, etc.

### III. On the Motion of $n$ Planets Disturbing One Another Assuming a Speed of Propagation of the Gravitational Waves Equal to the Speed of Light

Let us next consider the case of  $n$  planets disturbing one another. In that case we obtain as classic differential equations of motion:

$$\ddot{x}_k = -fM \frac{x_k}{(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)^{3/2}} - f m_k \frac{x_k}{(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)^{3/2}} + \left. \begin{aligned} &+ \sum_{n \neq k} \left( f m_n \frac{x_n - x_k}{[(x_n - x_k)^2 + (y_n - y_k)^2 + (z_n - z_k)^2]^{3/2}} - f m_n \frac{x_n}{(x_n^2 + y_n^2 + z_n^2)^{3/2}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

and similarly  $\ddot{y}_k$  and  $\ddot{z}_k$

$k = 1, 2, \dots, n$

in which  $x_k, y_k, z_k$  and  $m_k$  denote the spatial coordinates and the mass (rest mass) of the planet  $k$ . Then (13) is a system of  $3n$  simultaneous differential equations of second order. Taking into account the relativistic variation of mass with speed we have to replace the left member in (13) by:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{x}_k}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2}{c^2}}} \right), \text{ yielding the system:}$$

$$\left. \begin{aligned} &\frac{c^2 - \dot{x}_k^2 - \dot{z}_k^2}{c^2 \left( 1 - \frac{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2}{c^2} \right)^{3/2}} \ddot{x}_k + \frac{\dot{x}_k \dot{y}_k}{c^2 \left( 1 - \frac{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2}{c^2} \right)^{3/2}} \ddot{y}_k + \\ &+ \frac{\dot{x}_k \dot{z}_k}{c^2 \left( 1 - \frac{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2}{c^2} \right)^{3/2}} \ddot{z}_k = -fM \frac{x_k}{(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)^{3/2}} + \\ &- f m_k \frac{x_k}{(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)^{3/2}} + \sum_{n \neq k} \left( f m_n \frac{x_n - x_k}{[(x_n - x_k)^2 + (y_n - y_k)^2 + (z_n - z_k)^2]^{3/2}} + \right. \\ &- f m_n \frac{x_n}{(x_n^2 + y_n^2 + z_n^2)^{3/2}} \left. \right) \\ &\frac{\dot{y}_k \dot{x}_k}{c^2 \left( 1 - \frac{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2}{c^2} \right)^{3/2}} \ddot{x}_k + \frac{c^2 - \dot{x}_k^2 - \dot{z}_k^2}{c^2 \left( 1 - \frac{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2}{c^2} \right)^{3/2}} \ddot{y}_k + \\ &+ \frac{\dot{y}_k \dot{z}_k}{c^2 \left( 1 - \frac{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2}{c^2} \right)^{3/2}} \ddot{z}_k = -fM \frac{y_k}{(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)^{3/2}} + \\ &- f m_k \frac{y_k}{(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)^{3/2}} + \sum_{n \neq k} \left( f m_n \frac{y_n - y_k}{[(x_n - x_k)^2 + (y_n - y_k)^2 + (z_n - z_k)^2]^{3/2}} + \right. \\ &- f m_n \frac{y_n}{(x_n^2 + y_n^2 + z_n^2)^{3/2}} \left. \right) \\ &\frac{\dot{z}_k \dot{x}_k}{c^2 \left( 1 - \frac{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2}{c^2} \right)^{3/2}} \ddot{x}_k + \frac{\dot{z}_k \dot{y}_k}{c^2 \left( 1 - \frac{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2}{c^2} \right)^{3/2}} \ddot{y}_k + \\ &+ \frac{c^2 - \dot{x}_k^2 - \dot{y}_k^2}{c^2 \left( 1 - \frac{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2}{c^2} \right)^{3/2}} \ddot{z}_k = -fM \frac{z_k}{(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)^{3/2}} + \\ &- f m_k \frac{z_k}{(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)^{3/2}} + \sum_{n \neq k} \left( f m_n \frac{z_n - z_k}{[(x_n - x_k)^2 + (y_n - y_k)^2 + (z_n - z_k)^2]^{3/2}} + \right. \\ &- f m_n \frac{z_n}{(x_n^2 + y_n^2 + z_n^2)^{3/2}} \left. \right). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$k = 1, 2, \dots, n$

Further, taking into account a finite speed of gravitational propagation equal to the speed of light  $c$ , in all eqs. (14), the left member refers to time  $t$  as well as the first member on the right of the equal sign. The second term on the right refers to time instant  $t_k$ , following from:

$$t_k + \frac{1}{c} \sqrt{[x_k(t_k)]^2 + [y_k(t_k)]^2 + [z_k(t_k)]^2} = t. \quad (15)$$

Further, in each eq. (14), in the right member, in the first term under  $\sum_{n \neq k}$ ,  $x_k$ ,  $y_k$  and  $z_k$  refer to time  $t$  and  $x_n$ ,  $y_n$  and  $z_n$  refer to time  $t_{n_k}$  following from:

$$t_{n_k} + \frac{1}{c} \sqrt{[x_n(t_{n_k}) - x_k(t)]^2 + [y_n(t_{n_k}) - y_k(t)]^2 + [z_n(t_{n_k}) - z_k(t)]^2} = t, \quad (16)$$

whereas the second term under  $\sum_{n \neq k}$  refers to time  $t_{n'}$  following from:

$$t_{n'} + \frac{1}{c} \sqrt{[x_n(t_{n'})]^2 + [y_n(t_{n'})]^2 + [z_n(t_{n'})]^2} = t. \quad (17)$$

Assuming as initial state:

$$t = 0 \rightarrow \left. \begin{array}{l} x_{k0} \ y_{k0} \ z_{k0} \\ \dot{x}_{k0} \ \dot{y}_{k0} \ \dot{z}_{k0} \end{array} \right\} \quad k = 1, 2 \dots n$$

we can find from the system (13) the motion of the  $n$  planets in case of infinite speed of propagation of the gravitational waves, applying the method of RUNGE and KUTTA or the method of successive approximations. (In case of the last method, we can choose the undisturbed KEPLER motion as zero approximation.)

Let us indicate this classic solution of (13) by:

$$\dot{x}_k(t)_0, \quad \dot{y}_k(t)_0, \quad \dot{z}_k(t)_0, \quad x_k(t)_0, \quad y_k(t)_0, \quad z_k(t)_0. \quad (18)$$

Then this solution (18) can again be considered as solution in zero approximation of the system (14), thereby taking into account the final speed  $c$  of travel of the gravitational waves. Then as to the solution in zero approximation (18) the time instants  $t_k$ ,  $t_n$  and  $t_{n'}$  follow from:

$$t_k + \frac{1}{c} \sqrt{[x_k(t_k)_0]^2 + [y_k(t_k)_0]^2 + [z_k(t_k)_0]^2} = t \quad (15_0)$$

$$t_{n_k} + \frac{1}{c} \sqrt{[x_n(t_{n_k})_0 - x_k(t)_0]^2 + [y_n(t_{n_k})_0 - y_k(t)_0]^2 + [z_n(t_{n_k})_0 - z_k(t)_0]^2} = t \quad (16_0)$$

$$t_{n'} + \frac{1}{c} \sqrt{[x_n(t_{n'})_0]^2 + [y_n(t_{n'})_0]^2 + [z_n(t_{n'})_0]^2} = t \quad (17_0)$$

as well as the quantities:

$$x_k(t_k)_0, \ y_k(t_k)_0, \ z_k(t_k)_0, \ x_n(t_{n_k})_0, \ y_n(t_{n_k})_0, \ z_n(t_{n_k})_0, \ x_n(t_{n'})_0, \ y_n(t_{n'})_0, \ z_n(t_{n'})_0 \quad (19)$$

which in this connection may be again considered as functions of  $t$  and which must be introduced in the corresponding terms on the right of the equal sign of the eqs. (14) as indicated above, whereas in the left members, in the coefficients of  $\ddot{x}_k$ ,  $\ddot{y}_k$  and  $\ddot{z}_k$ , the quantities  $\dot{x}_k(t)_0$ ,  $\dot{y}_k(t)_0$  and  $\dot{z}_k(t)_0$  must be introduced. Then again solving the eqs. (14) as to the second derivatives  $\ddot{x}_k$ ,  $\ddot{y}_k$  and  $\ddot{z}_k$ , we obtain:

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{x}_k = F_k(t), \quad \ddot{y}_k = G_k(t), \quad \ddot{z}_k = H_k(t) \\ k = 1, 2 \dots n \end{array} \right\} \quad (20)$$



The function values of the  $3n$  functions  $F_k(t)$ ,  $G_k(t)$  and  $H_k(t)$  can again be represented by polynomial expressions:

$$\left. \begin{aligned} F_k(t) &= \sum_{q=1}^n \frac{\prod_{i \neq k} (t - t_i)}{\prod_{i \neq k} (t_q - t_i)} F_k(t_q) = \sum_{s=0}^{n-1} \alpha_{s_k} t^s \\ G_k(t) &= \sum_{q=1}^n \frac{\prod_{i \neq k} (t - t_i)}{\prod_{i \neq k} (t_q - t_i)} G_k(t_q) = \sum_{s=0}^{n-1} \beta_{s_k} t^s \\ H_k(t) &= \sum_{q=1}^n \frac{\prod_{i \neq k} (t - t_i)}{\prod_{i \neq k} (t_q - t_i)} H_k(t_q) = \sum_{s=0}^{n-1} \gamma_{s_k} t^s \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Then integrating (20) we obtain:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_k(t)_1 &= \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\alpha_{s_k}}{s+1} t^{s+1} + \dot{x}_{k0}, x_k(t)_1 = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\alpha_{s_k}}{(s+1)(s+2)} t^{s+2} + \dot{x}_{k0} t + x_{k0} \\ \dot{y}_k(t)_1 &= \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\beta_{s_k}}{s+1} t^{s+1} + \dot{y}_{k0}, y_k(t)_1 = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\beta_{s_k}}{(s+1)(s+2)} t^{s+2} + \dot{y}_{k0} t + y_{k0} \\ \dot{z}_k(t)_1 &= \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\gamma_{s_k}}{s+1} t^{s+1} + \dot{z}_{k0}, z_k(t)_1 = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\gamma_{s_k}}{(s+1)(s+2)} t^{s+2} + \dot{z}_{k0} t + z_{k0} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

(22) is then the solution in first approximation of the system (14), taking into account the final speed of gravitational propagation  $c$ . Next we can again introduce this solution in first approximation (22) in similar way as indicated above in the eqs. (14) and we can repeat the same procedure as sketched in the foregoing starting from the solution in first approximation. In this way, we can further proceed to higher solutions. For a time lapse  $t=0 \rightarrow t$  which is not too large for convergence we can then determine the speed components and the spatial coordinates of the  $n$  planets with any required degree of accuracy. Using again these results as initial conditions, we can repeat the whole iteration procedure for a following not too large time lapse, etc.

#### IV. On the Motion of an Artificial Planetoid, Disturbed by $n$ Planets, Assuming a Speed of Propagation of the Gravitational Waves Equal to the Speed of Light

Let us indicate the heliocentric coordinates of the artificial planetoid by  $x$ ,  $y$ , and  $z$ , and let us assume its mass as infinitesimal in comparison with the masses of the planets coming into play. The classic differential equations of motion of our planetoid then become:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -fM \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \\ &+ \sum_{k=1}^n \left\{ f m_k \frac{x_k - x}{[(x_k - x)^2 + (y_k - y)^2 + (z_k - z)^2]^{3/2}} - f m_k \frac{x_k}{(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)^{3/2}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

and similar expressions for  $\ddot{y}$  and  $\ddot{z}$ .

In these eqs. (23), let us consider  $x_k$ ,  $y_k$  and  $z_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) as known functions of  $t$ , determined by the iteration process described above, including the assumption of a speed of gravitational propagation equal to the speed of light. Then, conceiving the eqs. (23) in this way and assuming an initial state:  $t = 0 \rightarrow \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, x_0, y_0, z_0$ , we can solve the system (23), either by integration by steps according to the method of RUNGE and KUTTA, or by using the method of successive approximations. (Applying the last method, we can start from the undisturbed KEPLER motion of the artificial planetoid as solution in zero approximation.) Let us indicate the solution of (23) conceived in this way, by:

$$\dot{x}(t)_0, \dot{y}(t)_0, \dot{z}(t)_0, x(t)_0, y(t)_0, z(t)_0. \quad (24)$$

Further, taking into account the relativistic variation of mass with speed we obtain, instead of system (23), the system:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{c^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2}{c^2 \left( 1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2} \right)^{3/2}} \ddot{x} + \frac{\dot{x} \dot{y}}{c^2 \left( 1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2} \right)^{3/2}} \ddot{y} + \\ & + \frac{\dot{x} \dot{z}}{c^2 \left( 1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2} \right)^{3/2}} \ddot{z} = -fM \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \\ & + \sum_{k=1}^n \left\{ fm_k \frac{x_k - x}{[(x_k - x)^2 + (y_k - y)^2 + (z_k - z)^2]^{3/2}} - fm_k \frac{x_k}{(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)^{3/2}} \right\} \\ & \frac{\dot{y} \dot{x}}{c^2 \left( 1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2} \right)^{3/2}} \ddot{x} + \frac{c^2 - \dot{x}^2 - \dot{z}^2}{c^2 \left( 1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2} \right)^{3/2}} \ddot{y} + \\ & + \frac{\dot{y} \dot{z}}{c^2 \left( 1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2} \right)^{3/2}} \ddot{z} = -fM \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \\ & + \sum_{k=1}^n \left\{ fm_k \frac{y_k - y}{[(x_k - x)^2 + (y_k - y)^2 + (z_k - z)^2]^{3/2}} - fm_k \frac{y_k}{(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)^{3/2}} \right\} \\ & \frac{\dot{z} \dot{x}}{c^2 \left( 1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2} \right)^{3/2}} \ddot{x} + \frac{\dot{z} \dot{y}}{c^2 \left( 1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2} \right)^{3/2}} \ddot{y} + \\ & + \frac{c^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2}{c^2 \left( 1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2} \right)^{3/2}} \ddot{z} = -fM \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \\ & + \sum_{k=1}^n \left\{ fm_k \frac{z_k - z}{[(x_k - x)^2 + (y_k - y)^2 + (z_k - z)^2]^{3/2}} - fm_k \frac{z_k}{(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)^{3/2}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

In these eqs. (25), let us consider  $x_k$ ,  $y_k$  and  $z_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) as known functions of  $t$  as solution of the system (14) assuming the travel speed of the gravitational waves equal to the speed of light. Then, again accounting for the final gravitational speed  $c$ , the left members of the eq. (25) refer to the time  $t$  as well as—in each equation—the first term on the right of the equal sign. Further, in each eq. (25)

in the right member in the first term under  $\sum_{k=1}^n$ ,  $x$ ,  $y$  and  $z$  refer to time  $t$ , and  $x_k$ ,  $y_k$  and  $z_k$  to time  $t_k$  following from:

$$t_k - \frac{1}{c} \sqrt{[x_k(t_k) - x(t)]^2 + [y_k(t_k) - y(t)]^2 + [z_k(t_k) - z(t)]^2} = t. \quad (26)$$

For the rest, in each eq. (25) in the right member, in the second term under  $\sum_{k=1}^n$ ,  $x_k$ ,  $y_k$  and  $z_k$  refer to time  $t_k'$  following from:

$$t_k' - \frac{1}{c} \sqrt{[x_k(t_k') - x(t)]^2 + [y_k(t_k') - y(t)]^2 + [z_k(t_k') - z(t)]^2} = t. \quad (27)$$

Now consider the solution (24) of (23) as solution in zero approximation of (25). Then  $t_k$  and  $t_k'$  corresponding with this solution in zero approximation follow from:

$$t_k - \frac{1}{c} \sqrt{[x_k(t_k) - x(t)_0]^2 + [y_k(t_k) - y(t)_0]^2 + [z_k(t_k) - z(t)_0]^2} = t \quad (26_0)$$

and (27), as well as the quantities:

$$x_k(t_k), \quad y_k(t_k), \quad z_k(t_k), \quad x_k(t_k'), \quad y_k(t_k'), \quad z_k(t_k') \quad (28)$$

which in this connection can again be considered as functions of  $t$ . Substituting this solution in zero approximation (24) in the right members of the eqs. (25) with the quantities (28) in the corresponding terms as indicated above, and also substituting this solution in zero approximation (24) in the coefficients of  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{y}$ , and  $\ddot{z}$  in the left members, we obtain after subsequent solution of  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{y}$ , and  $\ddot{z}$  from the equations:

$$\ddot{x} = F(t)_0, \quad \ddot{y} = G(t)_0, \quad \ddot{z} = H(t)_0. \quad (29)$$

Then the function values of  $F(t)_0$ ,  $G(t)_0$ , and  $H(t)_0$  can again be determined for any  $t$ , so that within a time lapse  $t = 0 \rightarrow t$  we can again represent these functions by polynomial expressions:

$$\left. \begin{aligned} F(t)_0 &= \sum_{q=1}^n \frac{\prod_{i \neq q} (t - t_i)}{\prod_{i \neq q} (t_q - t_i)} F(t_q) = \sum_{s=0}^{n-1} \xi_s t^s \\ \text{and similarly} \quad G(t)_0 &= \sum_{s=0}^{n-1} \eta_s t^s, \quad H(t)_0 = \sum_{s=0}^{n-1} \zeta_s t^s \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

By integrating (29) we find:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t)_1 &= \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\xi_s}{s+1} t^{s+1} + \dot{x}_0, \quad x(t)_1 = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\xi_s}{(s+1)(s+2)} t^{s+2} + \dot{x}_0 t + x_0 \\ \dot{y}(t)_1 &= \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\eta_s}{s+1} t^{s+1} + \dot{y}_0, \quad y(t)_1 = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\eta_s}{(s+1)(s+2)} t^{s+2} + \dot{y}_0 t + y_0 \\ \dot{z}(t)_1 &= \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\zeta_s}{s+1} t^{s+1} + \dot{z}_0, \quad z(t)_1 = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\zeta_s}{(s+1)(s+2)} t^{s+2} + \dot{z}_0 t + z_0 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

(31) is then the solution of (25) in first approximation, corresponding with a speed of gravitational propagation equal to the speed of light. This solution (31) can then again be substituted in the right members of (25) in similar way as indicated above (accounting for the finite speed of propagation of the gravitational waves) and also in the coefficients of  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{y}$  and  $\ddot{z}$  in the left members, after which the same procedure as described in the foregoing can be repeated, providing the solution of (25) in second approximation. Going on in this way, we can proceed to higher approximations. The integration time lapse  $t=0 \rightarrow t$  must again be taken sufficiently small for obtaining a good convergence of the iteration process. Then for time  $t$ , the speed components and spatial coordinates can be computed with any required degree of accuracy and can be used as initial conditions for a following sufficiently small time lapse, for which the whole iteration process must again be carried out, etc.

In the foregoing considerations we have still supposed that the velocity of propagation of the gravitational waves is equal to the speed of light  $c$ . This hypothesis seems plausible, but may not be in accordance with truth. If this speed of gravitational propagation  $c_1 \neq c$ , we have simply in the eqs. (3), (4), (5), (6), (3<sub>0</sub>), (4<sub>0</sub>), (5<sub>0</sub>), (6<sub>0</sub>), (15), (16), (17), (26), (26<sub>0</sub>), and (27) to replace  $c$  by  $c_1$ .

For the rest, in the mathematical developments above, for sake of simplicity we have still used polynomial expressions of LAGRANGE. It will be obvious that also other representations, as the polynomial expressions of TSCHEBYSCHIEFF can be applied.

## V. On the Order of Magnitude of the Effects Due to Gravitational Retardation

It will be obvious that the influence of the finiteness of the travel speed of the gravitational waves must be very small. In every case, this travel speed must be very large, for no effect has yet been observed corresponding with a gravitational retardation. If this travel speed is equal to the speed of light—an assumption which seems very probable—it will be evident that the effect due to gravitational retardation will be too small for detection by the available optical means on the earth. For in case of a speed of 30 km/sec perpendicular to the direction of the disturbing object, the corresponding aberration angle becomes  $\text{arc. tg } 30/300,000 = \text{arc. tg } 0.0001$ . Hence, speaking roughly we may expect that, as to the motion of the planets, the order of magnitude of the effects due to gravitational retardation will be about 0.0001 of the order of magnitude of the classic planetary disturbances. Therefore we have not to wonder that this deviation cannot be observed by the available optical instruments on earth.

## VI. On the Future Possibility to Investigate the Effects Due to Gravitational Retardation by Means of Unmanned Space Vehicles

However, by the future development of unmanned space flight it will become possible to imagine an experiment in order to measure the speed of gravitation. For this purpose two artificial planetoids can be launched, in free gravitational flight describing orbits around the sun in such a way that both vehicles will approach one another at some time at very short distance, thereby assuming as first approximation an infinite travel speed of the gravitational waves. Then it will be necessary after launching to determine—with the best means we will then have at our disposal—the free motion (hence to measure spatial coordinates and speed components) as accurate as possible, and again to compute the subsequent motion, firstly assuming  $c_1 = \infty$ , thereby taking into account

all planetary disturbances, of which of course, shortly after launching, the disturbing influence of the earth will be preponderant. Then it will be possible to compute the shortest distance of mutual approach and the corresponding time instant. This shortest distance may be chosen in the order of magnitude of some 150 km and the launching measures must then be taken in accordance, corresponding with the projected precalculated orbital motions. If it appears by calculation that the realized motion yields a shortest approach, which deviates too much from the planned value, the free motion must be corrected by radio guidance from the terrestrial commanding station. This correction must then occur a long time before the short encounter.

The whole calculation procedure, now based on the assumption that the speed of propagation  $c_1$  of the gravitational waves is equal to the speed of light  $c$ , must be carried out including the motion (with the mutual disturbances)

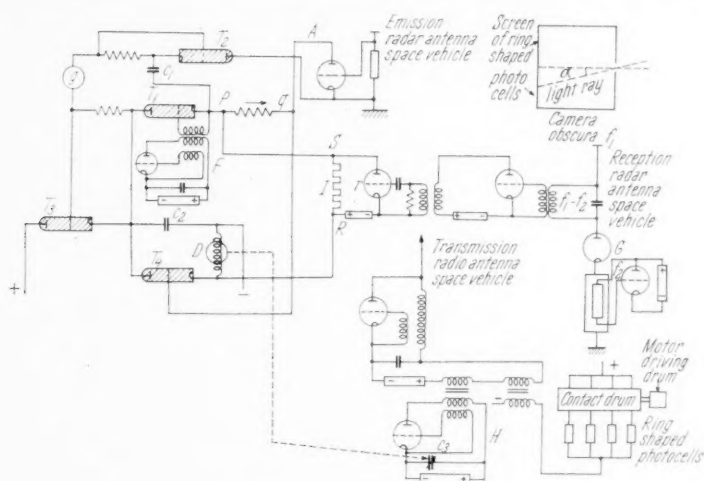


Fig. 1

of the disturbing planetary bodies. Thereby the lines can be followed as indicated above. It will then appear that the distance corresponding with the time of short encounter as computed for the case  $c_1 = \infty$  will be slightly different. This difference will then indicate the order of magnitude of the effect to be measured. Of course, by extending the computations throughout a larger time range, also the differences to be expected for consecutive short encounters can be determined. Therefore, the KEPLER orbits of both vehicles must be arranged in such a way that the major axes are of same value, so that the periods of revolution are the same. Then a cumulative effect due to the finite travel speed of gravitation can eventually be detected.

In order to measure the mutual distance of the vehicles at the short encounter, a suitable radar equipment can be mounted in one of the vehicles, measuring the time interval between the emission of the radar pulse and the reception of the reflected signal. This measurement must be transmitted in some code to the terrestrial station. A principal scheme for such an arrangement is indicated in Fig. 1. In this scheme  $g$  denotes a continuous current source by which the condenser  $C_1$  can be charged via the thyatron  $T_1$  as soon as the potential of the grid with regard to the glow wire is sufficiently positive. This potential

between grid and glow wire varies periodically with time and is impressed by the frequency generator  $F$ . When the charge current of  $C_1$  diminishes at the end of the charging, the negative potential between grid and glow wire in thyatron  $T_2$  diminishes, so that, when this potential is reduced to a certain amount, discharge of  $C_1$  through thyatron  $T_2$  and vacuum tube  $A$  occurs and an electromagnetic pulse will be emitted. Further, by the charging of  $C_1$  a positive grid potential with regard to the glow wire will be excited in thyatron  $T_3$ , so that also  $C_2$  will be charged. By the currents flowing in the sense  $R \rightarrow S$  and  $P \rightarrow Q$ , the grid of thyatron  $T_4$  will have a negative potential with regard to the glow wire. By the potential drop between  $P$  and  $Q$  the grid potential in  $T_4$  will remain sufficiently negative in order to prevent discharge of  $C_2$  through  $T_4$ . Hence by the direct influence of the outgoing signal on the reception radar antenna, no discharge of  $C_2$  will be initiated.

The frequency  $f_1$  of the reflected signal is much too high for amplification. Therefore it must be mixed with another frequency  $f_2$ . Then in the circuit tuned to  $f_1 - f_2$  a current will be excited by the incoming signal which can be amplified. This current will flow as long as the echo signal is received. (In the scheme, the function of the vacuum tube  $G$  is the following. The relation between clamping tension  $E$  and current  $J$  of this tube must be of the type:  $AE + BE^2 = J$ , in which  $A$  and  $B$  denote constants. If then the valve is acted upon by the two tensions  $E' = E_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$  and  $E'' = E_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$ , we obtain,

$$E = E' + E'',$$

so that:

$$\begin{aligned} J &= A[E_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + E_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)] + B[E_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + E_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)]^2 = \\ &= A[\dots] + B[E_1^2 \sin^2(\omega_1 t + \varphi_1) + E_2^2 \sin^2(\omega_2 t + \varphi_2) + 2E_1 E_2 \sin(\omega_1 t + \\ &\quad + \varphi_1) \sin(\omega_2 t + \varphi_2)] = A[\dots] + B \left[ \frac{E_1^2}{2} [1 - \cos(2\omega_1 t + 2\varphi_1)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{E_2^2}{2} [1 - \cos(2\omega_2 t + 2\varphi_2)] + E_1 E_2 \{ \cos[\omega_1 - \omega_2)t + (\varphi_1 - \varphi_2)] - \right. \\ &\quad \left. - \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + (\varphi_1 + \varphi_2)] \} \right]. \end{aligned}$$

Hence  $J$  contains components with circular frequencies  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $2\omega_1$ ,  $2\omega_2$ ,  $\omega_1 - \omega_2$ , and  $\omega_1 + \omega_2$ . We have then to tune a resonance circuit to the circular frequency  $\omega_1 - \omega_2$ . The current in this circuit can be used for further amplification. During receiving of the echo signal, the negative charge of the grid  $r$  increases, so that the current through resistance  $I$  decreases by which the negative grid potential in  $T_4$  also decreases, while by absence of the discharge current of  $C_1$ , there is no potential drop between  $P$  and  $Q$ . Hence by the reception of the reflected signal the charging of  $C_2$  will be broken off by discharge through  $T_4$  and the rotary coil instrument  $D$ . The time between two emission pulses, defined by  $F$ , is large in comparison with the time of charging and discharge of  $C_1$  and  $C_2$ , so that disturbing echo effects are avoided. Assuming the distance between the artificial planetoid and the other planetoid about 150 km, the travel time of the signal from emission to reception is about  $\frac{1}{1000}$  second. Hence the frequency of  $F$  must be much lower than 1000 Cycle/sec.

Hence through  $T_4$  and the rotary coil instrument  $D$  a periodically variable current will flow of which the effective value will depend on the time lapse between the emission of the electromagnetic pulse and the reception of the reflected signal. The effective electromagnetic torque by which the rotary coil of  $D$  will

be acted upon, is then a function of the distance between the two space vehicles at the time of short encounter. The rotary coil of  $D$ , counteracted by a spring, turns the rotary condenser  $C_3$  of the lamp generator  $H$ , which impresses a modulation frequency on the ground wave of the transmission radio set of the space vehicle. Hence this impressed modulation frequency is a measure of the distance between the two space vehicles. At the receiving station this modulation frequency can be measured from which the distance between the space vehicles follows. It is also possible to translate this incoming modulation frequency into a direct indication of this distance by a pointer moving along a dial, applying a scheme as indicated in Fig. 2. In this figure the incoming modulation is indicated by  $\nu$ , whereas  $A$  and  $B$  are resonance circuits tuned to frequencies  $\nu_1$  and  $\nu_2$ . If  $\nu_1 > \nu > \nu_2$  the motor  $M$ , displacing the pointer along the dial remains at rest. If  $\nu$  increases

the circuit  $A$  will be activated; the thyatron  $T_1$  will close and winding  $W_1$  will be energized. The motor  $M$  will start to run

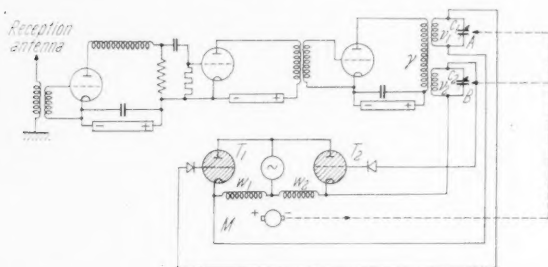


Fig. 2.  $w_1$ ,  $w_2$ : windings for clockwise and anticlockwise rotation. ( $\sim$ ) = alternating current source

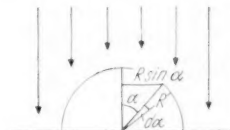


Fig. 3

clockwise, driving a transmission system moving the pointer along the dial. Simultaneously by the same transmission system the rotary condensers  $C_1$  and  $C_2$  are turned in such a way that again  $\nu$  becomes intermediate between  $\nu_1$  and  $\nu_2$  so that then the motor  $M$  stops. If the frequency  $\nu$  decreases,  $B$  will be actuated, the motor starts in anticlockwise sense and a similar sequence of operations will occur. In this way, any special value of  $\nu$  will correspond with a special position of the pointer along the dial.

Further, it will be necessary to direct the emission radar antenna into the direction of the other space vehicle, before emission of the radar pulse. Assuming that this radar antenna is rigidly mounted on the space vehicle, with the central radiation axis coinciding with the longitudinal axis of the vehicle, it will be necessary to turn the longitudinal axis into the direction of the other space vehicle.

Now let us assume that the other vehicle is shaped in such a way that, at a distance of about 150 km, it is a sufficient brilliant object in the sky as seen from the first vehicle. If this second vehicle is carried out as plastic echo ball of large reflectivity with a diameter of 30 m, it will even be a very brilliant object. In that case, however, it will be necessary in the calculations also to take into account the total light pressure of the solar radiation, by which the echo ball is acted upon.

If  $E$  be the local energy density of the solar radiation, the light pressure per  $\text{cm}^2$  on a reflective surface perpendicular to the radiation becomes:  $2 \frac{E}{c} c = 2E$ , in which  $c$  denotes the speed of light. If the rays include an angle  $\alpha$  with the surface normal (see Fig. 3), the component of the light pressure force per unit of surface area in the direction of the rays becomes:

$$(2E \cos \alpha) \cos \alpha = 2E \cos^2 \alpha.$$



Hence in case of our echo ball the contribution of the total radiation pressure force of a spherical ring  $2\pi R \sin \alpha \cdot R d\alpha$  of the surface of our echo ball becomes:

$$(2\pi R \sin \alpha) R d\alpha \cdot 2 E \cos^2 \alpha \cdot \cos \alpha = 4\pi R^2 E \cos^3 \alpha \sin \alpha d\alpha.$$

The total light pressure force on the echo ball then becomes:

$$F = 4\pi R^2 E \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^3 \alpha d\cos \alpha = \pi R^2 E [\cos^4 \alpha]_{\frac{\pi}{2}}^0 = \pi R^2 E.$$

Now we may write:  $E = \frac{q}{r^2}$  in which  $q$  is a constant and  $r$  denotes the distance from the echo ball to the solar center. The radiation pressure force  $F = \frac{\pi R^2 q}{r^2}$  is directed from the solar center. The resultant of the solar attraction and this repulsive force, taken per unit of mass, then amounts to:

$$\frac{fM}{r^2} - \frac{\pi R^2 q}{m r^2} = \frac{f}{r^2} \left[ M - \frac{\pi R^2 q}{fm} \right].$$

The components of this resultant specific force in  $x$ ,  $y$ , and  $z$  direction of the heliocentric system of reference then become if  $m$  denotes the mass of the echo ball:

$$F_x = - \frac{fx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \left[ M - \frac{\pi R^2 q}{fm} \right] \Bigg\}$$

and similarly  $F_y$  and  $F_z$

We then obtain as equations of motion of the echo ball, instead of the eqs. (23):

$$\ddot{x} = - \frac{fx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \left[ M - \frac{\pi R^2 q}{fm} \right] + \left. \begin{aligned} &+ \sum_{k=1}^n \left\{ fm_k \frac{x_k - x}{[(x_k - x)^2 + (y_k - y)^2 + (z_k - z)^2]^{3/2}} - fm_k \frac{x_k}{(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)^{3/2}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (23')$$

and similar equations for  $\ddot{y}$  and  $\ddot{z}$ .

Then also in the eqs. (25) in the first terms on the right of the equal sign,  $M$  must be replaced by  $M - \frac{\pi R^2 q}{fm}$ , in which  $m$  denotes the rest mass of the echo ball.

Now returning to the problem of directing the radar antenna, i. e. of turning the longitudinal axis of the first space vehicle into the direction of the second one, we must be first informed about the angle included by the longitudinal axis and the line of sight to the second vehicle. This information can be obtained by the following arrangement.

An electronic optic system, which for sake of simplicity will be conceived here as a camera obscura, is mounted in the vehicle, with the camera axis coinciding with the longitudinal axis of the vehicle. The wall of the camera in opposite of the camera orifice, is covered with a screen of ring-shaped concentric photocells with the common center on the camera axis, as well as the orifice. A ray of light coming from the celestial light source (the other space vehicle) passes through the orifice and strikes the screen somewhere, activating one of the ring-shaped photocells. Then, if we can be informed *which* photocell is activated, the angle  $\alpha$  between ray and camera axis (=longitudinal axis of the vehicle) becomes known. Now any of these photocells can be taken up in a continuous

current circuit, passing a contact arranged on a revolving contact drum, driven by an electric motor which may be switched in by a special radio signal from the earth (see Fig. 1). The contacts of the different circuits corresponding with the different ring-shaped photocells are axially arranged on the revolving drum. When the photocell is activated, the corresponding circuit is closed, and is then opened and reclosed in a certain sequence by the contact on the revolving drum, characteristic for any photocell. In this way any ring-shaped photocell, when activated, gives a special Morse sign, which is impressed on the basic wave of the radio transmission set of the vehicle. Hence receiving this Morse sign at the terrestrial station, the angle  $\alpha$  becomes known.

Then measures must be taken in order to reduce  $\alpha$  to zero. Therefore, rotations of the vehicle about the yaw axis and pitch axis must be carried out, for which moments of force are required about these axes. These moments can be obtained by auxiliary jet tubes, which can be best arranged in couples, directly giving the required moments without additional force. Then, for general control of the rotations of the vehicle about any of the three axes of inertia of the vehicle (roll, yaw and pitch axis), as to any axis, two such couples (one for clockwise and one for anti-clockwise rotation) can be arranged. For feeding these auxiliary jet tubes, a suitable gas mixture can be applied stored up in a pressure tank. Any pair of auxiliary jet tube couples can then be handled by a servo motor, carried out as electric motor. The tele-commanding of the servo motor can then be done by means of a variable modulation frequency from the terrestrial station according to the scheme of Fig. 2. The servo motor can handle, via a suitable transmission system, a three-way valve by which either one or the other jet tube couple of the pair is energized. Any special value of the modulation frequency then corresponds with a special position of the three-way valve, so that the active jet tube couple gives a torque of the required value. In this way a suitable regulation of the required torque can be obtained. For the total control of the rotary motions three of such servo motor sets are required, each one corresponding with a special range of the corresponding commanding variable modulation frequency.

For tele-command of the rotations of the vehicle about its center of gravity, also the three-flywheel method can be applied, arranging three electric motors in the vehicle with the axes along roll, pitch and yaw axis, the "flywheels" being the three rotors. In order to obtain a suitable regulation of any of the three motors the corresponding reversible controller can then be handled by a servo motor, carried out as electric motor and telecommanded by a variable modulation frequency. Then we need again three modulation frequencies for telecommand of the rotational movements. In case of this three-flywheel method we have still to arrange auxiliary jets in order to reduce the moment of momentum of the vehicle as to its center of gravity to zero, so that the attitude of the vehicle with regard to the celestial sky remains the same when the three "flywheel" motors are at rest.

Returning to the directing of the roll axis of the first vehicle into the direction of the second one—as soon as the Morse sign is received corresponding with  $\alpha = 0$ , the radar antenna has come in the right position. Further specification of the attitude of the vehicle about the roll axis is not required for emission of the radar signal.

Another simple arrangement for measuring the mutual distance of the vehicles, which I am indebted to Ir. A. L. M. VAN LOOVEREN (Lector Royal Military Academy, Breda, department radio engineering) is indicated in the block scheme Fig. 4. In this scheme  $T$  be the radar transmitter and  $R$  the radar receiver. Further

$M$  be the modulator, determining the number of pulses  $\square$  emitted by  $T$ , whereas  $RT$  is the radio-transmitter of the space vehicle. The impulse  $\square$  of  $M$  is also impressed on  $RT$  as well as  $\Omega$  caused by the reflected signal. Hence the basic wave of  $RT$  is impressed by  $\square$  and  $\Omega$ , which at the receiving station can be made visible on the screen of an oscillograph (Fig. 5). The distance  $q$  between the two pulses is then a measure for the distance between the two space vehicles.

This quantity  $q$  can of course also be transformed in a digital computing device into a number, expressing directly the distance between the two vehicles.

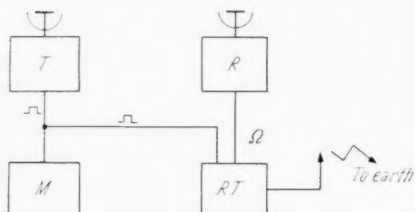


Fig. 4



Fig. 5

For the rest, it may be observed that, if the other vehicle is not carried out as echo ball, also secondary radar can be applied, arranging in the second vehicle a relai radar instalment, re-emitting the received signal. In that case, the intensity of the signal returning to the first vehicle is only inversely proportional with the square of the distance between the vehicles, whereas in case of simple radar the intensity of the reflected signal is inversely proportional with the fourth power of the distance. Hence in case of secondary radar, it will not be necessary to direct the radar antenna of the first vehicle.

Returning to the solution with primary radar, if we further arrange some device in order to specify also the attitude of the vehicle with regard to the directed roll axis, the possibility arises to determine the spatial position of the vehicle by measuring the celestial position of two planets as seen from the vehicle. Therefore,

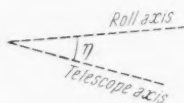


Fig. 6

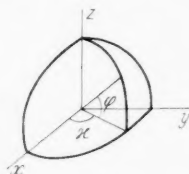


Fig. 7

let us mount in the vehicle a telescope, with the telescopic axis in one plane with the roll axis. The angle between the roll axis and the telescopic axis may be adjustable by means of a servo motor, carried out as electric motor and telecommanded by a variable modulation frequency as indicated above. Any value of the emitted modulation frequency then corresponds with a special value of  $\eta$  (Fig. 6). Further, the telescope is balanced in such a way that for any value of  $\eta$  the attitude of the principal system of inertia of the vehicle as to the vehicle frame remains the same. Now, if in general  $\varphi$  be the declination and  $\chi$  the right ascension of a celestial object, the direction cosines of the line of sight of the object become:

$\lambda = \cos \varphi \cos \chi$ ,  $\mu = \cos \varphi \sin \chi$ ,  $\nu = \sin \varphi$  (see Fig. 7). Hence, if we have two reference stars  $S_1$  and  $S_2$  with celestial positions  $\varphi_1, \chi_1$  and  $\varphi_2, \chi_2$ , the corresponding direction cosines  $\lambda_1, \mu_1, \nu_1$  and  $\lambda_2, \mu_2, \nu_2$  are known. As the distance of these stars is very large in comparison to the dimensions of the orbit of our artificial planet, the direction cosines of  $S_1$  and  $S_2$  as seen from the space vehicle

are the same as seen from the earth. (The heliocentric system is thereby chosen in accordance with Fig. 7.) The two reference stars  $S_1$  and  $S_2$  must be conspicuous stars. Now assume that the roll axis of the vehicle is firstly turned into the direction of the reference star  $S_1$  ( $\lambda_1 \mu_1 v_1$ ). Then, when the vehicle revolves about the roll axis (after being turned into the direction of  $S_1$ ), the telescope will describe a circular cone with respect to the celestial sky, as seen from the vehicle. Now let  $P$  denote one of the reference planets. Then, if we adjust  $\eta$  in such a way that  $\eta = \angle S_1 P$  as seen from the vehicle, the planet will come into the optical field of the telescope. A similar operation can be carried out with  $S_2$  as reference star, to which the roll axis must be directed, whereas we have to adjust  $\eta$  in such a way that  $\eta = \angle S_2 P$ , as seen from the vehicle. As soon as the light of  $P$  falls along the telescope axis a photocell may be activated by which a suitable radio signal is emitted to the terrestrial station. The direction cosines  $\lambda, \mu, v$  of the planet  $P$ , as seen from the space vehicle, then follow from the equations:

$$\lambda \lambda_1 + \mu \mu_1 + v v_1 = \cos(S_1 P) \quad (a)$$

$$\lambda \lambda_2 + \mu \mu_2 + v v_2 = \cos(S_2 P) \quad (b)$$

$$\lambda^2 + \mu^2 + v^2 = 1. \quad (c)$$

Let us write (a) and (b):

$$\mu_1 \mu + v_1 v = \cos(S_1 P) - \lambda \lambda_1$$

$$\mu_2 \mu + v_2 v = \cos(S_2 P) - \lambda \lambda_2.$$

Then:

$$\mu = \frac{1}{\mu_1 v_2 - \mu_2 v_1} \begin{vmatrix} \cos(S_1 P) - \lambda \lambda_1 & v_1 \\ \cos(S_2 P) - \lambda \lambda_2 & v_2 \end{vmatrix}.$$

Or:

$$\mu = \frac{[\cos(S_1 P) - \lambda \lambda_1] v_2 - [\cos(S_2 P) - \lambda \lambda_2] v_1}{\mu_1 v_2 - \mu_2 v_1} \quad (A)$$

and similarly:

$$v = \frac{\mu_1 [\cos(S_2 P) - \lambda \lambda_2] - \mu_2 [\cos(S_1 P) - \lambda \lambda_1]}{\mu_1 v_2 - \mu_2 v_1}. \quad (B)$$

By substitution of (A) and (B) in (c), we obtain a quadratic equation in  $\lambda$ . The two roots correspond with the two possible positions of  $P$  on both sides of the celestial geodesic arc through  $S_1$  and  $S_2$ . This ambiguity can always be taken away by a subsequent rough measurement of  $\angle S_3 P$ , using a third reference star  $S_3$ .

If we have telemeasured in this way the positions  $P_1 (\lambda \mu v)$  and  $P_2 (\lambda' \mu' v')$  of two planets  $P_1$  and  $P_2$ , as seen from the space vehicle, and the corresponding spatial positions  $P_1 (x_1 y_1 z_1)$  and  $P_2 (x_2 y_2 z_2)$  of the two planets are known, the space vehicle must be at the point of intersection of the straight lines:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_1 - x}{\lambda} &= \frac{y_1 - y}{\mu} = \frac{z_1 - z}{v} \\ \frac{x_2 - x}{\lambda'} &= \frac{y_2 - y}{\mu'} = \frac{z_2 - z}{v'} \end{aligned} \right\} \quad (C)$$

By solving  $x, y$ , and  $z$  from three of the four eqs. (C) we can find the spatial coordinates of the vehicle. For example we can use the equations:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_1}{\lambda} - \frac{y_1}{\mu} &= \frac{x}{\lambda} - \frac{y}{\mu} \\ \frac{x_2}{\lambda'} - \frac{y_2}{\mu'} &= \frac{x}{\lambda'} - \frac{y}{\mu'} \end{aligned} \right\}.$$

We can solve  $x$  and  $y$  from these equations and substitute  $x$  in:  $\frac{x_1 - x}{\lambda} = \frac{z_1 - z}{v}$  from which  $z$  follows. The so found values for  $x$ ,  $y$ , and  $z$  must then also satisfy the fourth equation

$$\frac{x_2 - x}{\lambda'} = \frac{z_2 - z}{v'} \left( \text{or } \frac{y_2 - y}{\mu'} = \frac{z_2 - z}{v'} \right).$$

This tele-astro-navigation can be applied in general in case of a vehicle with a planetary mission, which is too distant in order to be optically observed.

The drawback of this tele-astro-navigation as indicated above is, that the different manipulations of telemeasuring the arcs  $S_1 P_1$ ,  $S_2 P_1$ ,  $S_1 P_2$  and  $S_2 P_2$  cannot be carried out simultaneously, so that the whole operation will take a longer time lapse. Then it has no sense to take into account accurately the signal travel times. In case of our vehicle, to be used in combination with another vehicle for investigating the speed of the gravitational waves, it can only be used for roughly supervising the motion of the one vehicle.

Further it must be emphasized that the tele-astro-navigation as roughly sketched above can only be applied if we start from a known initial attitude of the vehicle. For otherwise it will be a "searching in the blind". This initial attitude can be attained by firstly directing the roll axis along the rays of a preponderant light source, hence along the solar rays, and to use a conspicuous star, as Sirius, for further specifying the attitude about the roll axis. Then after adjustment of the vehicle in this initial attitude, a gyro table in the vehicle can be engaged and the subsequent rotations (angles of EULER) from this initial attitude can be translated into modulation frequencies and transmitted to the terrestrial control station. For the rest, it is not impossible to increase the accuracy of the tele-astro-navigation as described by using a cluster of vehicles, the cluster moving as one compact group along the orbit. In that case, the different telemeasurements of the celestial arcs  $S_1 P_1$ ,  $S_2 P_1$ ,  $S_1 P_2$  and  $S_2 P_2$  can be carried out simultaneously.

Further, in the telecommanded space vehicle as required, it is obvious that in the electric equipment it will be necessary to engage and disengage a large number of circuits by telecommand from the terrestrial control station. Then, for reducing the number of modulation frequencies, a kind of robot can be mounted in the vehicle, composed of an artificial "finger" of variable length  $l$ , which can be adjusted in cylinder polar coordinate fashion, as indicated in Fig. 8. In this figure the system  $xyz$  is a vehicle-rigid system of reference. The spatial position of the finger end (as to the frame of vehicle) is then determined by the quantities  $z$ ,  $\varphi$ , and  $l$ , so that  $x = l \cos \varphi$  and  $z = l \sin \varphi$ . Then around  $Oz$  a co-axial circular cylindrical surface with buttons (electric switches) can be arranged, which can be actuated by the finger. Then by three modulation frequencies, determining  $\varphi$ ,  $z$ , and  $l$ , by servo motors as indicated in Fig. 2, the motion of the finger can be telecommanded for engaging and disengaging any required number of circuits.

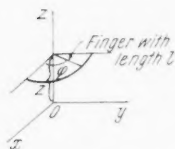


Fig. 8

# On a Boundary-Layer Phenomenon in Magneto-Fluid Dynamics

By

W. R. Sears<sup>1</sup>

(With 1 Figure)

(Received March 1, 1961)

## Abstract — Zusammenfassung — Résumé

**On a Boundary-Layer Phenomenon in Magneto-Fluid Dynamics.** The class of steady plane and axisymmetric magnetohydrodynamic flows known as "aligned-fields flows" is defined. For such flow of an ideal inviscid conductor about a closed solid body of finite conductivity there appears a vortex-and-current sheet at the fluid-solid interface. In this paper this phenomenon is studied under the hypotheses of large magnetic REYNOLDS number  $Rm$  and very small magneto-hydrodynamic PRANDTL number  $Pr_m$ . It is pointed out that this fluid property has, indeed, very small values for real conducting fluids.

It is shown that the vortex-and-current sheet is actually a boundary layer. This in turn is made up of two recognizable layers: an inviscid boundary layer of thickness  $O(Rm^{-1/2})$  and a viscous sublayer of thickness  $O(Pr_m^{1/2}Rm^{-1/2})$ . The approximate differential equations appropriate to these two layers are deduced. Because the orders of magnitude of the magnetic-field components within the body are not known a priori, the processes of reaching these conclusions, of deducing the equations, and of determining the orders of magnitude of these boundary values are inseparable.

Finally, it is shown that, in spite of obvious contrasts with conventional boundary-layer theory, some of the well-known methods of that theory are applicable to the problem of the inviscid boundary layer. These include (1) MANGLER's transformation, and (2) "similar" solutions for symmetrical stagnation-point flows past wedges.

**Über eine magneto-hydrodynamische Grenzschichterscheinung.** Eine Klasse stationärer, ebener und rotationssymmetrischer, magneto-hydrodynamischer Strömungen, die sogenannte „Strömung bei ausgerichteten Feldern“, wird definiert. Für eine solche Strömung einer reibungslosen und ideal leitenden Flüssigkeit, die einen geschlossenen festen Körper umströmt, tritt eine Wirbel- und Stromschicht längs der Berührungsfläche von Flüssigkeit und Körper auf. Diese Erscheinung wird unter der Annahme großer magnetischer REYNOLDSScher Zahl  $Rm$  und sehr kleiner magneto-hydrodynamischer PRANDTLscher Zahl  $Pr_m$  in der vorliegenden Arbeit untersucht. Es muß hervorgehoben werden, daß diese Eigenschaft der Flüssigkeit, für alle reellen leitenden Flüssigkeiten, in der Tat sehr geringe Werte aufweist.

Es wird bewiesen, daß die Wirbel- und Stromschicht eigentlich eine Grenzschicht ist. Diese besteht aus zwei getrennten Schichten: einer reibungslosen Grenzschicht, deren Dicke  $O(Rm^{-1/2})$  ist, und einer Reibungsschicht nahe der Körperoberfläche, deren Dicke  $O(Pr_m^{1/2}Rm^{-1/2})$  ist. Die entsprechenden angenäherten Differentialgleichungen für diese beiden Schichten werden abgeleitet. Da die Größenordnungen der Komponenten des magnetischen Feldes innerhalb des Körpers a priori nicht

<sup>1</sup> Director, Graduate School of Aeronautical Engineering, College of Engineering, Cornell University, Ithaca, New York, U.S.A.



bekannt sind, ist es nicht möglich, die Prozesse, die zu diesen Schlußfolgerungen führen, zu trennen von den Prozessen, die die Gleichungen ergeben und die die Größenordnungen dieser Grenzwerte bestimmen.

Schließlich wird gezeigt, daß trotz der offensichtlichen Kontraste von der herkömmlichen Grenzschichttheorie einige der bekannten Methoden dieser Theorie auf das vorliegende Problem der reibungslosen Grenzschicht angewandt werden können. Diese umfassen 1. die MANGLERsche Transformation und 2. die „ähnlichen“ Lösungen der Strömung in der Nähe des Staupunktes eines keilförmigen Körpers.

**Sur un phénomène de couche limite en magnétohydrodynamique.** La classe d'écoulements stationnaires plans et axisymétriques de la magnétohydrodynamique connus sous le nom d'écoulements à champs alignés, est définie. Pour un tel écoulement d'un fluide conducteur idéal et nonvisqueux sur un corps solide fermé de conduction finie, une couche de tourbillons et de courant apparaît à la surface de contact fluide-solide. Dans le présent travail ce phénomène est étudié dans les hypothèses de grand nombre de REYNOLDS magnétique  $Rm$  et très petit nombre de PRANDTL magnétohydrodynamique  $Pr_m$ . Il est indiqué que cette propriété de fluide a, en fait, de très petites valeurs pour des fluides conducteurs réels.

Il est démontré que la couche de tourbillons et de courant est en fait une couche limite. Celle-ci se compose de deux couches distinctes: une couche limite non-visqueuse d'épaisseur  $O(Rm^{-1/2})$  et une sous-couche visqueuse d'épaisseur  $O(Pr_m^{1/2} Rm^{-1/2})$ . Les équations différentielles approchées, appropriées à ces deux couches sont dérivées. Du fait que les ordres de grandeur des composantes du champ magnétique à l'intérieur du corps ne sont pas connues a priori, les procédures pour arriver à ces conclusions, pour dériver les équations et pour déterminer les ordres de grandeur de ces valeurs limites sont inséparables.

Finalement, il est démontré que, en dépit de contrastes évidents avec la théorie de la couche limite conventionnelle, quelques méthodes bien connues de cette théorie sont applicables au problème de la couche limite non-visqueuse. Celles-ci comprennent (1) la transformation de MANGLER et (2) les solutions affines pour les écoulements à point d'arrêt sur des dièdres.

### Notation

<b>B</b>	Magnetic-induction vector	<b>N</b>	Constant defined in Eq. (23)
<b>c</b>	Constant, coefficient of $x^m$ in $u_1$ in "similar" flow	<b>P</b>	Total pressure $p + H^2/8\pi$
<b>E</b>	Electric-field vector, magnitude $E$	$\bar{P}$	Dimensionless total pressure, $P/\rho U^2$
<b>f</b>	Magnetic-field stream function defined in Eq. (57)	<b>p</b>	Static pressure
<b>g</b>	Velocity-field stream function defined in Eq. (58)	$Pr_m$	Magnetohydrodynamic PRANDTL number, Eq. (1)
<b>H</b>	Magnetic-field vector, magnitude $H$	<b>q</b>	Velocity vector, magnitude $q$
$H_x, H_y$	Components of <b>H</b> along $x, y$	<b>r</b>	Body radius
$\bar{H}_x, \bar{H}_y$	Dimensionless components: $\bar{H}_x = H_x/H_\infty, \bar{H}_y = H_y/H_\infty$	$r_0$	Reference body radius
$H_\infty$	Magnetic-field strength in undisturbed stream	<b>Re</b>	REYNOLDS number $UL/v$
<b>j</b>	Electric-current-density vector, magnitude $j$	<b>Rm</b>	Magnetic REYNOLDS number $4\pi U \sigma L$
<b>k</b>	Constant in MANGLER transformation	<b>U</b>	Undisturbed-stream speed
<b>L</b>	Reference length	$u, v$	Components of <b>q</b> in $x, y$ directions
<b>M</b>	Constant defined in Eq. (22)	$\bar{u}, \bar{v}$	Dimensionless components: $\bar{u} = u/U, \bar{v} = v/U$
<b>m</b>	Constant, exponent of $x$ in "similar" flow	$u_1$	Value of $u$ at outer edge of inviscid boundary layer
		$u_0$	Value of $u$ at inner edge of inviscid boundary layer
		<b>X, Y</b>	Dimensionless coordinates: $X = x/L, Y = y/L\delta$



$x, y$	Boundary-layer coordinates	$\sigma$	Electrical conductivity
$\hat{x}, \hat{y}$	MANGLER coordinates defined in Eqs. (53)	$\varphi$	Stream function of magnetic field
$z$	$H_\infty/\sqrt{4\pi\varrho} U$	$\hat{\varphi}$	Function defined in Eqs. (54)
$\delta$	Typical boundary-layer thickness, dimensionless	$\psi$	Stream function of velocity field
$\alpha$	Expansion parameter defined in Eq. (22)	$\hat{\psi}$	Function defined in Eqs. (54)
$\nu$	Kinematic viscosity	<i>Superscripts</i>	
$\varrho$	Mass density	$(n)$	[See Eq. (21)].

## I. Introduction

Professor VON KÁRMÁN [1] has called attention to "the beautiful analogies to conventional fluid mechanics, which exist in the case of a conducting fluid as a result of the combination of a flow field and an electromagnetic field." In this note we point out one such analogy, namely an inviscid magnetohydrodynamic boundary layer.

One of several idealized geometries that have received the attention of theoreticians in the field of magneto-fluid dynamics is the one called *aligned-fields* flow. This is steady flow in which the basic or undisturbed situation consists of a uniform parallel stream and a uniform magnetic field parallel to it [2-9]. It is an idealization of real geometries of several kinds, such as flows through solenoid-wound ducts, but has been studied principally with the intent of disclosing interesting phenomena in the various ranges of the dimensionless parameters involved.

One such phenomenon, which appears in plane and axisymmetric aligned-fields flow of a perfect, inviscid conductor is a surface of discontinuity, namely a current-and-vortex sheet, which lies on the surface of a solid body. We wish to show here that for a real conducting fluid this sheet is actually a boundary layer of large vorticity and current density, even in the limit of vanishing viscosity. We shall determine the nature of this layer and deduce the differential equations that describe it.

It will be shown that the *inviscid boundary layer* bears interesting analogies to conventional viscous boundary layers, but also exhibits some remarkable contrasts, both physical and mathematical. One difficulty that must be overcome is the fact that the boundary values of the magnetic-field components at the surface of a solid body are not known a priori, but are actually among the results to be calculated by means of the boundary-layer equations. This constitutes an interesting contrast with conventional viscous-boundary-layer theory.

## II. The Magnetohydrodynamic Prandtl Number

In [9], HASIMOTO has already shown the boundary-layer character of the current-and-vortex sheet in the limiting case of infinite conductivity and non-vanishing viscosity. But this does not seem to be the limit of greatest practical interest, for real conducting fluids have finite conductivity and very small viscosity; in fact, nearly all are characterized by very *small* values of the dimensionless parameter  $4\pi\sigma\nu$ , the *magnetohydrodynamic Prandtl number*,  $Pr_m$ . The case studied by HASIMOTO represents infinite value of this parameter.

The parameter  $Pr_m$  is the ratio of the magnetic REYNOLDS number to the true REYNOLDS number:

$$Pr_m = 4\pi\sigma\nu = \frac{4\pi\sigma UL}{UL/\nu} = \frac{Rm}{Re}. \quad (1)$$

It is therefore the ratio of the squares of two characteristic diffusion speeds or lengths.

For the liquid metals one finds values of  $Pr_m$  equal to about  $10^{-6}$ ; for ionized gases, such as air at  $3000^\circ$  to  $5000^\circ$  K, the values computed by kinetic theory vary from about  $10^{-8}$  to  $10^{-6}$ ; and for air at  $3400^\circ$  K seeded with 0.1 % potassium we estimate again about  $3 \times 10^{-6}$ .<sup>1</sup>

It appears, therefore, that a suitable approximation for most real conducting fluids is to assume  $Pr_m$  to be very small. This is the approximation adopted in

the present study. And because we are trying to elucidate the current-and-vortex sheet, which is a large-conducting phenomenon, we shall assume the magnetic REYNOLDS number to be large.

The true nature of the sheet at large  $Rm$  and small  $Pr_m$  can be anticipated. There must be a layer whose thickness is determined by  $Rm$  in which the current density and vorticity are large but viscous effects are negligible. This is the inviscid magnetohydrodynamic boundary layer. This must be underlain by a much thinner sublayer similar to a conventional viscous boundary layer, whose thickness is determined by  $Re$ . So far as the inviscid layer is concerned, the sublayer is a vortex sheet; hence there is a slip velocity at the base of the

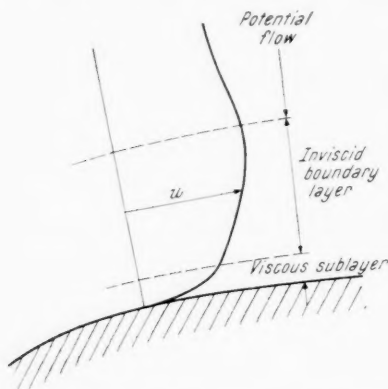


Fig. 1. Sketch showing inviscid magnetohydrodynamic boundary layer and viscous sublayer

inviscid layer. This situation is sketched in Fig. 1. It is analogous to the case of heat transfer at very small PRANDTL number, where the thermal layer is practically inviscid and is much thicker than the viscous boundary layer.

### III. Deduction of the Equation

We shall undertake now to write the equations describing aligned-fields flow and to simplify them in a manner appropriate to flows at large  $Rm$  and small  $Pr_m$ . This process will lead to the equations for the inviscid boundary layer and the viscous sublayer, respectively. For simplicity we shall consider here only incompressible flow.

We employ electromagnetic units and assume the fluid to be non-magnetic; thus  $\mu = 1$  and  $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ . We make the usual approximations of neglecting the convection and displacement currents. The equations of steady flow are then

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (2)$$

$$\mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{q} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \nu \Delta \mathbf{q} + \frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{H} \quad (3)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \{ \mathbf{E} + \mathbf{q} \times \mathbf{H} \} \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (6)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j}. \quad (7)$$

<sup>1</sup> For independent estimates of  $Pr_m$  for various conductors see HIDE and ROBERTS [10, Table 1, p. 800]. In their notation this parameter is  $r/\lambda$ .

For plane or axisymmetric flow, Eq. (6) requires that the electric field be constant. In the axisymmetric case this constant must be zero, and for plane flow we shall make the specific assumption that it is zero; i.e., that no differences of electric potential are applied in the direction perpendicular to the flow plane. The set is then considerably simplified, for not only does  $\mathbf{E}$  not appear, but the current density  $\mathbf{j}$  can easily be eliminated by substitution of OHM's Law, Eq. (4), in the momentum equation, Eq. (3).

$$\mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{q} + \frac{1}{\rho} \nabla P = \nu \Delta \mathbf{q} + \frac{1}{4\pi\rho} \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H} \quad (8)$$

(where  $P$  denotes the "total pressure"  $p + H^2/8\pi$ ) and in AMPÈRE's Law, Eq. (7),

$$\nabla \times \mathbf{H} = 4\pi\sigma \mathbf{q} \times \mathbf{H}. \quad (9)$$

Eqs. (2), (5), (8), and (9) are the governing equations of plane and axisymmetric, steady, aligned-fields flow of an incompressible fluid conductor.

Our plan now is to carry out an order-of-magnitude analysis of the terms in these equations, analogous to PRANDTL's analysis leading to the conventional boundary-layer equations. For this purpose we need certain results for the limiting case.

### 1. Infinite Magnetic Reynolds Number

In this limit Eq. (9) requires that

$$\mathbf{q} \times \mathbf{H} = 0 \quad (10)$$

i.e., that the vectors  $\mathbf{q}$  and  $\mathbf{H}$  be parallel everywhere. But then it follows from Eqs. (2) and (5) that  $\mathbf{q}$  and  $\mathbf{H}$  are in a constant ratio, which can be evaluated in the undisturbed region of the flow; viz.,

$$H_\infty \mathbf{q} = U \mathbf{H}. \quad (11)$$

An important deduction can be made directly from Eq. (10), namely that the magnetic-field strength within any closed solid body of finite conductivity must vanish, provided that our conclusions regarding  $\mathbf{E}$  pertain to the interior as well as the exterior of the body. For then the field within the body is both divergence- and curl-free, while Eq. (10) states that the contour is a magnetic line of force. The observation that  $\mathbf{H} = 0$  under these conditions is a well-known result of potential theory. It is interesting to notice that this conclusion applies to all steady plane and axisymmetric flows of a perfect conductor, regardless of its viscosity or compressibility.

With Eq. (11), the momentum equation, Eq. (8), becomes

$$(1 - \alpha^2) \mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{q} + \frac{1}{\rho} \nabla P = \nu \Delta \mathbf{q} = 0 \quad (12)$$

where  $\alpha^2$  denotes  $H_\infty^2/\sqrt{4\pi\rho}U$  and the right-hand term is put equal to zero because  $Pr_m$  is fixed and  $Rm = \infty$ .

Now Eq. (12) states that the relation between  $\sqrt{1 - \alpha^2} \mathbf{q}$  and  $P$  is the same as between  $\mathbf{q}$  and  $p$  in conventional perfect-fluid flow. In particular, the flow is irrotational and Eq. (12) can immediately be integrated to give a BERNOULLI-type equation,

$$\frac{1}{2} (1 - \alpha^2) q^2 + \frac{P}{\rho} = \text{constant} \quad (13)$$

or, in view of Eq. (11) and the definition of  $P$ ,

$$\frac{1}{2} q^2 + \frac{p}{\rho} = \text{constant} \quad (14)$$

which is just BERNOULLI's equation.

The conclusion is that this flow is irrotational and current-free; in fact, that it is exactly the same as non-conducting flow. But then, in view of Eq. (11), the magnetic-field strength jumps discontinuously from non-vanishing surface values to zero within the body. It is this jump that constitutes the above-mentioned current layer at the body surface. Clearly, if this inviscid flow is the limit of viscous flow as  $Re \rightarrow \infty$ , the discontinuity is also a vortex sheet.

## 2. Large Magnetic Reynolds Number

For flow at large  $Rm$  and small  $Pr_m$  the physical situation has been described above. In the inviscid boundary layer certain terms in  $\sigma^{-1}$  in our equations of motion become significant, even though  $\sigma$  is large, because they are multiplied by large quantities, namely derivatives with respect to the distance from the surface. Nevertheless, since  $Pr_m$  is very small, terms in  $v$  are still negligible. It is only in the viscous sublayer that the latter become significant.

Some observations can be made immediately about boundary conditions. To facilitate this discussion let us now adopt boundary-layer coordinates  $x$  and  $y$ , i.e., coordinates measured along the body surface (which must be smooth) and perpendicular to it. Components of  $\mathbf{q}$  and  $\mathbf{H}$  will be defined along these directions.

(i) At the outer edge of the inviscid boundary layer  $\sigma^{-1}$  terms become negligible and the conditions of infinite- $Rm$  flow are approached. Thus, the potential flow provides the outer boundary values of the components  $u$  and  $H_x$ .

(ii) At the body surface  $u$  and  $v$  must vanish. The surface values of  $H_x$  and  $H_y$  are not known a priori, but it is known that they vary with  $Rm$  in such a way that they vanish at  $Rm = \infty$ .

(iii) For the discussion of the inviscid boundary layer the thickness of the sublayer is negligible. Furthermore, the inner boundary values of  $v$  and  $H_y$  for this layer are the same as their values at the body surface. This follows from the divergence conditions, Eqs. (2) and (5), for these state that the  $y$ -derivatives of  $v$  and  $H_y$  are not large.

(iv) Since the inviscid and viscous boundary layers merge smoothly, the outer boundary values of  $u$  and  $H_x$  for the viscous layer are given by the values assumed by these quantities at  $y = 0$  in the inviscid boundary layer.

Thus the inviscid boundary layer provides the outer boundary values for the viscous sublayer, just as the potential flow provides the outer boundary values for the inviscid boundary layer. Similarly, the wall values of  $v$  and  $H_y$  should provide the inner boundary values of these quantities for both boundary layers and for the potential flow. But, as mentioned above, the wall values of  $H_y$  are unknown; the resolution of this apparent dilemma will appear below.

## 3. The Inviscid Boundary Layer

Let us now consider explicitly the inviscid boundary layer. We first introduce a transformation to dimensionless variables, in which a magnification is applied to the  $y$  coordinate. Let

$$X = x/L \quad Y = y/L\delta \quad (15)$$

where  $L\delta$  is a typical thickness of the boundary layer; i.e., the boundary-layer thickness is  $O(L\delta)$  as  $Rm \rightarrow \infty$ . Then, if  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{P}$ ,  $\bar{H}_x$ , and  $\bar{H}_y$  are dimensionless dependent variables, Eqs. (8) and (9) become

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial X} + \frac{\bar{v}}{\delta} \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial X} = \alpha^2 \left\{ \bar{H}_x \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial X} + \frac{\bar{H}_y}{\delta} \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial Y} \right\} \quad (16)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial X} + \frac{\bar{v}}{\delta} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} + \frac{1}{\delta} \frac{\partial \bar{P}}{\partial Y} = \alpha^2 \left\{ \bar{H}_x \frac{\partial \bar{H}_y}{\partial X} + \frac{\bar{H}_y}{\delta} \frac{\partial \bar{H}_y}{\partial Y} \right\} \quad (17)$$

$$\frac{\partial \bar{H}_y}{\partial X} - \frac{1}{\delta} \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial Y} = Rm \{ \bar{u} \bar{H}_y - \bar{v} \bar{H}_x \} \quad (18)$$

where  $Pr_m$  has been neglected in comparison with 1.

Eqs. (2) and (5) have different forms for plane and axisymmetric flow, and will be written out here only for the former. The correction for axisymmetric flow will appear later.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial X} + \frac{1}{\delta} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial \bar{H}_x}{\partial X} + \frac{1}{\delta} \frac{\partial \bar{H}_y}{\partial Y} = 0 \quad (20)$$

We now assume that all dependent variables are expressed in the form of power series in a small parameter that vanishes in the limit  $Rm = \infty$ ; i.e.,

$$(\bar{\phantom{u}}) = \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{\phantom{u}})^{(n)} \kappa^n \quad (21)$$

where

$$\kappa = Rm^{-M}, \quad M > 0 \quad (22)$$

We assume further that the dimensionless thickness  $\delta$  is of order  $Rm^{-N}$  where  $N > 0$ , as  $Rm \rightarrow \infty$ , since, as mentioned,  $\delta$  must vanish in the limit. Or, absorbing the constant of proportionality in the definition of  $\delta$ , we may write

$$\delta = Rm^{-N}, \quad N > 0 \quad (23)$$

It must be admitted that the forms assumed in writing Eqs. (21)–(23) are rather arbitrary; i.e., it is not evident that  $\delta$  must be a power of  $Rm$  nor that the dependent variables in Eq. (21) are necessarily analytic functions of a power of  $Rm$ , as assumed. However, it will be shown that these assumptions lead to a self-consistent set of results.

From what has already been said about boundary conditions in (i)–(iv) above, the following conditions may be stated:

At the outer edge, i.e., at  $Y = \infty$ ,

$$u^{(0)} = \bar{u}_1(X) \quad (24)$$

$$H_x^{(0)} = \bar{u}_1(X) \quad (25)$$

where  $U \bar{u}_1(X)$  is the surface velocity in potential flow.

At  $Y = 0$ ,

$$v^{(0)} = v^{(1)} = \dots = 0 \quad (26)$$

$$H_y^{(0)} = 0. \quad (27)$$

The last condition, Eq. (27), follows from conditions (ii) and (iii). Now, condition (ii) states that  $H_x$  is smaller than  $O(\kappa^0)$  at the body surface, but we cannot immediately conclude that  $H_x^{(0)}$  is zero in the inviscid boundary layer, because of the possibility that  $\partial H_x / \partial y$  is large in the viscous sublayer. The correct order of magnitude of this component must therefore be determined as we proceed farther.

The various series expansions, Eq. (21) are now to be substituted into Eqs. (16)–(20). Taking account of Eq. (23), we can then equate coefficients of successive powers of  $\kappa$ . There does not seem to be any particular value in writing out the resulting equations here, for the various coefficients can be identified term-by-term without difficulty.

We begin with Eqs. (19) and (20). The leading terms are proportional to  $\kappa^{-N/M}$ ; viz.,

$$\kappa^{-N/M} \frac{\partial v^{(0)}}{\partial Y} = 0 \quad \text{and} \quad \kappa^{-N/M} \frac{\partial H_y^{(0)}}{\partial Y} = 0 \quad (28)$$

from which, in view of Eqs. (26) and (27), we conclude

$$v^{(0)} = 0 \quad \text{and} \quad H_y^{(0)} = 0. \quad (29)$$

Proceeding to the next-order terms in Eqs. (19) and (20), we first note that  $\partial u^{(0)}/\partial X$  and  $\partial H_x^{(0)}/\partial X$  are clearly not equal to zero and therefore must be of the same order as some terms in the series for  $\partial \bar{v}/\partial Y$  and  $\partial \bar{H}_y/\partial Y$ . We assume without loss of generality that the appropriate terms are those involving  $v^{(1)}$  and  $H_y^{(1)}$ , for any other choice would amount to a redefinition of  $\kappa$ . In other words, any power of  $\kappa$  would be a suitable expansion parameter. A change of power changes  $N$  proportionally and does not affect our results. Thus, we write

$$1 - \frac{N}{M} = 0 \quad \text{or} \quad N = M \quad (30)$$

and accordingly

$$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial X} + \frac{\partial v^{(1)}}{\partial Y} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial X} + \frac{\partial \bar{H}_y}{\partial Y} = 0. \quad (31)$$

An important conclusion can also be derived immediately from Eq. (17) in the light of Eqs. (29). It is clear that the leading term is

$$\kappa^{-1} \frac{\partial P^{(0)}}{\partial Y} = 0 \quad (32)$$

hence  $P^{(0)}$  is a function of  $X$  only and can be evaluated at the outer edge; i.e.,  $P^{(0)}(X)$  is given by Eq. (13).

The orders of magnitude of the terms in Eq. (18) are not as easily determined. The leading left-hand term is clearly  $-\kappa^{-1} \partial H_x^{(0)}/\partial Y$ ; this must be non-zero since Eq. (18) is the same for both the inviscid and viscous layers, and while  $H_x^{(0)}$  vanishes at the wall it cannot vanish at the potential flow. Hence, one of the right-hand terms must be of order  $\kappa^{-1}$ . We can prove that it is the first right-hand term, but the proof will be omitted here for brevity. It consists of assuming the contrary, i.e.,  $M^{-1} - 1 > 1$ , and showing that the result leads to a momentum equation incompatible with our previous conclusions concerning  $P^{(0)}$ . Thus  $M^{-1} = 2$  or

$$M = N = \frac{1}{2}. \quad (33)$$

The equations describing the inviscid boundary layer can now be written out. To emphasize the different orders of magnitude of the several dependent variables, we write them out first in dimensionless form, using the notation of superscripts; they are

$$u^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial X} + v^{(1)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial Y} + \frac{dP^{(0)}}{dX} = \alpha^2 \left\{ H_x^{(0)} \frac{\partial H_x^{(0)}}{\partial X} + H_y^{(1)} \frac{\partial H_x^{(0)}}{\partial Y} \right\} \quad (34)$$

$$-\frac{\partial H_x^{(0)}}{\partial Y} = u^{(0)} H_y^{(1)} - v^{(1)} H_x^{(0)} \quad (35)$$

together with Eqs. (31).

These have been derived on the assumption that viscous terms in the momentum equations are insignificant to the order  $\kappa^0$ ; i.e., that  $Re \gg 1$ . It may be of interest to note that under the same hypothesis, from Eq. (17),

$$\frac{\partial P^{(1)}}{\partial Y} = O. \quad (36)$$

Inspection of Eqs. (24)–(27) reveals, however, that the boundary conditions are not complete, for our equations will require four conditions on  $u^{(0)}$ ,  $H_x^{(0)}$ ,  $v^{(1)}$ , and  $H_y^{(1)}$ , while only three are available at this point. The additional condition will be determined by study of the viscous sublayer.

#### 4. Equations of the Viscous Sublayer

The process of order-of-magnitude analysis and approximation for this layer is analogous to what has been carried out for the inviscid boundary layer above. It can be presented very briefly, however, for unlike the preceding case it is substantially the same as the conventional analysis of a viscous boundary layer. We find without difficulty that the thickness of this layer is of order  $Re^{-1/2}$  and therefore that  $v$  is of this same order throughout the sublayer, while  $\partial u / \partial y$  is  $O(Re^{1/2})$ .

Now,  $\partial H_y / \partial y$  is equal to  $-\partial H_x / \partial x$ , and while we have not determined the magnitude of  $H_x$  in the sublayer we know this derivative is not larger than  $O(1)$ . Thus  $H_y$  is not appreciably larger than its wall value, which is  $O(Rm^{-1/2})$ , as pointed out earlier, and the leading term on the left-hand side of Eq. (9) is  $-\partial H_x / \partial y$ , for the right-hand side is large, of order  $Rm^{1/2}$ . The approximate form of this equation is, therefore,

$$-\frac{\partial H_x}{\partial y} = 4\pi\sigma u H_y = O(Rm^{1/2}). \quad (37)$$

We can now arrive at the long-delayed conclusion regarding the order of magnitude of  $H_x$  in the sublayer and its inner boundary value in the inviscid boundary layer. Eq. (37) states that within the sublayer

$$\begin{aligned} H_x &= H_x(x, 0) + O(Rm^{1/2} Re^{-1/2}) \\ &= H_x(x, 0) + O(Pr_m^{1/2}) \\ &= O(Rm^{-1/2}) + O(Pr_m^{1/2}) \end{aligned} \quad (38)$$

Since  $Pr_m$  is fixed as  $Rm \rightarrow \infty$  it is not legitimate to compare these orders of magnitude; nevertheless the conclusion is that  $H_x$  is a small quantity at the outer edge of the sublayer. Returning to the dimensionless notation of the inviscid boundary layer, we have the important boundary condition

$$H_x^{(0)}(X, 0) = O. \quad (39)$$

Eq. (38) also permits us to complete the writing of the equations of the viscous sublayer. First, the equation of  $y$ -momentum, i.e., the second component of Eq. (8), becomes

$$\frac{\partial P}{\partial y} = O(Rm^{-1} + Pr_m^{1/2} Rm^{-1/2}) \quad (40)$$

Thus, in view of the conclusions reached earlier concerning  $P$ , viz. Eqs. (32) and (36), we see that  $P$  varies from its potential-flow value only by an amount of



order  $Rm^{-1}$  throughout both layers. But in the sublayer the magnetic contribution to  $P$  is small, so that  $P$  is substantially equal to  $p$  there, and one may write

$$p = P(x). \quad (41)$$

This conclusion has obvious importance in that it gives the wall value of the static pressure. Incidentally, this value is the same as the value obtained by adding to the potential-flow static pressure the body force per unit area on the current sheet in the case  $Rm = \infty$  (cf. [2]).

Finally, we can write the equation of  $x$ -momentum for this layer; in view of the conclusions drawn here, it is

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{4\pi\rho} H_y \frac{\partial H_x}{\partial y} \quad (42)$$

or, by Eq. (37) and what has been said earlier about  $H_y$ ,

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sigma}{\rho} [H_y(x, 0)]^2 u \quad (43)$$

where  $H_y(x, 0)$  denotes the value of  $H_y$  calculated for the inner edge of the inviscid boundary layer.

Thus the equations of the viscous sublayer are the continuity equation, Eq. (2), and Eq. (43). These are the same as the equation treated by Rossow [11, 12], LYKOUDES [13], and others, in studies of the boundary layer at low  $Rm$  with magnetic field directed normal to the body surface. It is clear that the inviscid boundary layer, by virtue of its large current density, serves to reduce the magnetic-field strength to such a small value that these weak-interaction equations apply in the sublayer.

#### IV. Discussion of the Equations

The equations of the viscous sublayer have been treated elsewhere, as mentioned, and need not be discussed further in this paper. They are to be solved after the inviscid-boundary-layer problem has been solved, so that the values  $H_y(x, 0)$  and  $u_0(x)$ , the "slip velocity" at the inner edge of the inviscid boundary layer, are known.

The equations of the inviscid boundary layer, written in terms of the original, dimensional, boundary-layer variables, are

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} = \frac{1}{4\pi\rho} \left\{ H_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + H_y \frac{\partial H_x}{\partial y} \right\} \quad (44)$$

$$-\frac{\partial H_x}{\partial y} = 4\pi\sigma \{ u H_y - v H_x \} \quad (45)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (46)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0 \quad (47)$$

with boundary conditions

$$\left. \begin{aligned} u &= u_1(x) \\ H_x &= \frac{H_\infty}{U} u_1(x) \end{aligned} \right\} \text{ at large } y. \quad (48)$$

$$\left. \begin{aligned} v &= 0 \\ H_x &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ at } y = 0. \quad (49)$$

These bear only slight resemblance to ordinary boundary-layer equations, the greatest similarity being perhaps that they apply within a thin layer of order of the  $-\frac{1}{2}$  power of the pertinent REYNOLDS number, that the outer boundary values are those of potential flow, and that the  $x$  components of the pertinent vectors are an order of magnitude greater than the  $y$  components. The equations themselves are (in terms of stream functions) two second-order nonlinear equations for two dependent functions, instead of a single third-order equation. Thus four boundary conditions are required instead of the usual three.

It might be pointed out that the dilemma of the missing boundary values resolved itself in a very fortunate way. The wall values of  $H_x$ , which are not known a priori, turned out to be not needed because they are of higher order than the order to which this component is to be calculated in the inviscid boundary layer. On the other hand, the boundary values of  $H_y$ , which are also unknown, are not needed simply because the differential equations are second-order and a full complement of boundary conditions is available.

The analogy between the inviscid boundary layer and a conventional viscous boundary layer is, nevertheless, sufficiently close as to suggest that many of the techniques used in boundary-layer theory should be carried over, and that some of the important phenomena of viscous boundary layers should be looked for. One asks, for example, whether an inviscid magnetohydrodynamic boundary layer grows in thickness with distance along the body surface. Does the phenomenon of reversed growth—i.e., growth of the layer thickness in the direction opposite to the flow direction—observed by HASIMOTO in the case of the viscous boundary layer with infinite conductivity, have any counterpart here? (There is some evidence that it does; see [14] and [15].) Is there such a phenomenon as *separation* of an inviscid boundary layer? These questions seem intriguing, in addition to the questions of the behavior of the viscous sublayer under the boundary conditions imposed on it by the inviscid boundary layer. We have a number of studies under way in an effort to answer some of these questions; the conclusions must be reported upon another occasion.

We shall close this paper with some remarks about the application of familiar boundary-layer methods to the solution of the inviscid-boundary-layer equations.

### 1. Mangler's Transformation

The transformation of variables introduced by MANGLER [16] to reduce conventional boundary-layer problems in axisymmetric flow to problems in plane flow is equally effective in its effect on the equations of the present problem.

For axisymmetric flow over a body of revolution whose radius is given by  $r(x)$ , the equations are Eq. (42) for the sublayer, and Eqs. (44) and (45) for the inviscid boundary layer, together with

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (50)$$

and

$$\frac{1}{r} \frac{\partial H_x r}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0 \quad (51)$$

where again  $x$  and  $y$  are the boundary-layer coordinates measured along and perpendicular to the surface.

Eqs. (50) and (51) are satisfied identically by introducing two stream functions:

$$\left. \begin{aligned} r u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} & r H_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ -r v &= \frac{\partial \psi}{\partial x} & -r H_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

MANGLER's transformation is

$$\hat{x} = k^2 \int_0^r \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 dx, \quad \hat{y} = k \frac{r}{r_0} y \quad (53)$$

where  $k$  and  $r_0$  are arbitrary constants. We now define

$$\hat{\psi}(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{k}{r_0} \psi(x, y) \quad \text{and} \quad \hat{\varphi}(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{k}{r_0} \varphi(x, y) \quad (54)$$

Substitution of these quantities into the above-mentioned differential equations leads to equations of the same form as for plane flow. Moreover, the boundary conditions, upon transformation, are appropriate conditions for plane flow.

Thus MANGLER's transformation reduces axisymmetric-flow problems to related plane-flow problems.

## 2. "Similar" Solutions

The conventional boundary-layer equations are reduced to ordinary differential equations if the potential-flow velocity is given by  $u_1(x) = c x^m$ , where  $c$  and  $m$  are constants. We now show that the same is true of the inviscid-boundary-layer equations.

Let the similarity variable be

$$\eta = \sqrt{c \sigma} x^{\frac{m+1}{2}} y. \quad (55)$$

Further, let the velocity- and magnetic-field stream functions, defined by Eqs. (52) with  $r=1$ , be written in the forms

$$\psi(x, y) = \sqrt{\frac{c}{\sigma}} x^{\frac{m+1}{2}} g(\eta) \quad (56)$$

and

$$\varphi(x, y) = \sqrt{\frac{4\pi \rho c}{\sigma}} \alpha x^{\frac{m+1}{2}} f(\eta). \quad (57)$$

We also note that in this case the total pressure  $P(x)$  is given by (Eq. (13))

$$P = \text{constant} - \frac{1}{2} \rho (1 - \alpha^2) c^2 x^{2m}. \quad (58)$$

With these substitutions, Eqs. (44) and (45) become

$$\alpha^2 f'^2 - g'^2 - \frac{m+1}{2m} \{ \alpha^2 f f'' - g g'' \} = \alpha^2 - 1 \quad (59)$$

and

$$(m+1) \{ f g' - g f' \} = 2\pi f''. \quad (60)$$

The boundary conditions for the inviscid boundary layer, Eqs. (48) and (49), are

$$g'(\infty) = f'(\infty) = 1, \quad g(0) = f'(0) = 0. \quad (61)$$

Now, the conditions for "similar" solutions of the equations of our viscous sublayer, Eqs. (43) and (46), have been determined by LYKOURDIS [13]. He concludes that  $H_y(x, 0)$  must be proportional to  $x^{\frac{m-1}{2}}$ . But this is exactly what follows from the analysis above, for

$$\begin{aligned} H_y(x, 0) &= - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{y=0} \\ &= - \sqrt{\frac{\pi \rho c}{\sigma}} \alpha (m+1) f(O) x^{\frac{m-1}{2}}. \end{aligned} \quad (62)$$

Thus, as must be expected by dimensional arguments, the conditions that lead to similarity in the inviscid boundary layer lead also to similarity in the viscous sublayer.

Before leaving the subject of "similar" flows let us consider briefly the question of the applicability of our theory to the cases  $u_1 = c x^m$ . It is well known that for  $m > 0$  these are cases of symmetrical stagnation-point flows past infinite wedges; the semi-vertex angle of the wedge is  $\theta = \pi m / (m+1)$ . It can be shown that our conclusions concerning the magnetic field within solid closed bodies, discussed earlier, apply as well to these infinite wedges, provided only that reasonable restrictions are put on the character of the field in the wedge at large distances from the vertex.

For the infinite flat plate ( $m=0$ ), however, and for the flows with  $m < 0$ , these conclusions are questionable, and the physical significance of our equations in these cases becomes unclear.

### 3. Extension to Compressible Flow

The extension of the present theories to compressible flow is straightforward; i.e., it is clear that the same phenomena arise in compressible flows. The equations of the inviscid boundary layer and viscous sublayer are again Eqs. (43)–(47), except for the change of the equations of continuity. The extension to flows with variable viscosity and variable conductivity is also carried out, in principle, without any difficulty. Nevertheless, the process of solution of the equations will be much more difficult with these generalizations. There does not appear to be an analogy to the STEWARTSON-ILLINGWORTH transformation to reduce compressible-flow problems to incompressible flow.

## V. Conclusions

It has been shown that the vortex-and-current sheet that lies on the surface of a solid body in steady plane or axisymmetric aligned-fields flow of an ideal inviscid conductor becomes, at large but finite  $Rm$ , a boundary layer of large vorticity and current density. If the magnetohydrodynamic PRANDTL number  $Pr_m$  is very small, this boundary layer consists of an inviscid boundary layer whose thickness is  $O(Rm^{-1/2})$ , underlain by a much thinner viscous sublayer within which the significant magnetic-field component  $H_y$  is essentially constant. The wall values of the magnetic-field components, and therefore their values everywhere inside the solid body, are  $O(Rm^{-1/2})$ .

The inviscid boundary layer is described by two simultaneous, second-order, nonlinear partial differential equations for the two stream functions. The wall values of the magnetic-field components are not required as boundary values of the problem. The viscous sublayer is described by the same equation as the viscous boundary layer at low  $Rm$ .

## References

1. TH. VON KÁRMÁN, Some Comments on Applications of Magnetofluidmechanics. Dynamics of Conducting Gases, A. B. CAMBEL and J. B. FENN, editors, pp. ix-xi. Evanston, Ill.: Northwestern University Press, 1960.
2. W. R. SEARS and E. L. RESLER, JR., Theory of Thin Airfoils in Fluids of High Electrical Conductivity. *J. Fluid Mech.* **5**, 257-273 (1959).
3. E. L. RESLER, JR., and J. E. McCUNE, Electromagnetic Interaction with Aerodynamic Flows. The Magnetodynamics of Conducting Fluids, D. BERSHADER, editor, pp. 120-135. Stanford, Calif.: Stanford University Press, 1959.
4. J. E. McCUNE and E. L. RESLER, JR., Compressibility Effects in Magnetoaerodynamic Flows Past Thin Bodies. *J. Aero/Space Sci.* **27**, 493-503 (1960).
5. E. C. LARY, A Theory of Thin Airfoils and Slender Bodies in Fluids of Arbitrary Electrical Conductivity. Ph. D. Thesis, Cornell University, Ithaca, N. Y., 1960. Available from University Microfilms, Inc., Ann Arbor, Mich.
6. M. C. GOURDINE, On the Role of Viscosity and Conductivity in Magnetohydrodynamics. Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, Calif., Techn. Rep. No. 32-3. Jan. 7, 1960.
7. H. P. GREESPAN and G. F. CARRIER, The Magnetohydrodynamic Flow Past a Flat Plate. *J. Fluid Mech.* **6**, 77-96 (1959).
8. Y. KATO and T. TANIUTI, Hydromagnetic Plane Steady Flow in Compressible Ionized Gases. *Progr. Theor. Physics* **21**, 606-612 (1959).
9. H. HASIMOTO, Viscous Flow of a Perfectly Conducting Fluid with a Frozen Magnetic Field. *Physics of Fluids* **2**, 338 (1959).
10. R. HIDE and P. H. ROBERTS, Hydromagnetic Flow due to an Oscillating Plane. *Rev. Mod. Physics* **32**, 799-806 (1960).
11. V. J. ROSSOW, On Flow of Electrically Conducting Fluids over a Flat Plate in the Presence of a Transverse Magnetic Field. Nat. Advis. Comm. for Aeronaut., Techn. Note No. 3971 (1957).
12. V. J. ROSSOW, On Magneto-Aerodynamic Boundary Layers. *Z. angew. Math. Phys.* **9b** (Sonderband), 519-527 (1958).
13. P. S. LYKOURDIS, On a Class of Compressible Laminar Boundary Layers with Pressure Gradient for an Electrically Conducting Fluid in the Presence of a Magnetic Field. Proceedings of the IXth International Astronautical Congress, Amsterdam 1958, pp. 168-180. Vienna: Springer, 1959.
14. W. R. SEARS, Some Solutions of the Macroscopic Equations of Magnetohydrodynamics. Dynamics of Conducting Gases, A. B. CAMBEL and J. B. FENN, editors, pp. 51-63. Evanston, Ill.: Northwestern University Press, 1960.
15. W. R. SEARS and E. L. RESLER, JR., Sub- and Super-Alfvénic Flows Past Bodies. 2nd International Congress of the Aeronautical Sciences, Zurich, 1960. (Proceedings to be published in 1961 by Pergamon Press Ltd., London.)
16. W. MANGLER, Zusammenhang zwischen ebenen und rotationssymmetrischen Grenzschichten in kompressiblen Flüssigkeiten. *Z. angew. Math. Mech.* **28**, 97-103 (1948).

# Etude de l'émission radioélectrique des satellites artificiels

Par

E. Vassy<sup>1</sup>

(Avec 8 Figures)

(Reçu le 21 février 1961)

## Résumé — Zusammenfassung — Abstract

**Etude de l'émission radioélectrique des satellites artificiels.** D'abord on décrit une méthode de mesure de l'effet DOPPLER-FIZEAU. Le dépouillement est long, mais les résultats sont précis. Elle est bien adaptée au tracking. Ensuite on décrit une méthode d'enregistrement simultané de l'effet DOPPLER-FIZEAU et de l'amplitude. Après avoir énuméré les différents phénomènes perturbateurs, on mentionne l'application possible à la détermination de l'absorption ionosphérique.

**Untersuchungen über die Radiosignale von künstlichen Satelliten.** Zunächst wird eine Methode zur Messung des DOPPLER-FIZEAU-Effekts beschrieben. Die Verarbeitung der Daten ist schwierig, aber die Ergebnisse sind präzise. Dieses Verfahren ist daher zur Bahnbestimmung sehr geeignet. Weiters wird eine Methode zur gleichzeitigen Aufzeichnung des DOPPLER-FIZEAU-Effekts und der Amplitude angegeben. Nach Besprechung der verschiedenen möglichen Störungen wird die Möglichkeit einer Anwendung dieses Verfahrens zur Bestimmung der Absorption der Ionosphäre erwähnt.

**Investigation of the Radio Transmission from Artificial Satellites.** First, the author describes a method of measurement of the DOPPLER-FIZEAU effect. The data processing is tedious but the results are precise. It is well suited to tracking. Next, he describes a method of simultaneous recording of the DOPPLER-FIZEAU effect and of the amplitude. After enumerating the various perturbing phenomena he mentions the possible application to the determination of the ionospheric absorption.

## I. Introduction

Depuis que des satellites artificiels gravitent autour de la Terre, leurs émissions radioélectriques ont été utilisées non seulement pour transmettre les indications des appareils scientifiques de bord à leurs responsables, mais la simple réception de l'onde porteuse a permis d'intéressantes études. Le concours de l'Electronics Research Directorate of the U.S. Air Force, Cambridge Research Center, nous a permis de monter à la Station de campagne de notre laboratoire un appareillage pour effectuer de telles recherches. Une partie des résultats a d'ailleurs été exposée lors de la réunion de la Commission Ionosphérique de l'A.G.A.R.D. à Athènes. Aussi est-ce pour nous un agréable devoir que de rassembler ici l'essentiel de

<sup>1</sup> Laboratoire de Physique de l'Atmosphère, Faculté des Sciences de Paris, 1, Quai Branly, Paris 7<sup>e</sup>, France.

notre travail en hommage au Président VON KÁRMÁN et de lui exprimer toute notre reconnaissance en cette heureuse circonstance. Nous y associons tous nos collaborateurs passés et actuels: G. BOUDOURIS, D. ILIAS, J. BOURNAZEL, J. MASS, P. BLOOM.

## II. Etude de l'effet Doppler-Fizeau

### 1. Intérêt de la mesure

Par suite de la grande vitesse des satellites (plusieurs km/sec) entraînant une valeur importante de sa composante radiale, on doit donc s'attendre à un effet DOPPLER-FIZEAU également important.

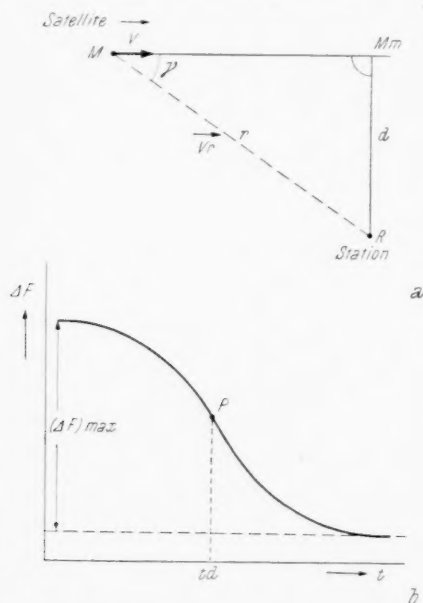


Fig. 1. Grandeurs géométriques (a) et forme d'une courbe DOPPLER (b)

Si  $f_0$  est la fréquence de l'émetteur de bord du satellite,

$v$  la vitesse du satellite,

$\gamma$  l'angle que fait la trajectoire du satellite avec la trajectoire de l'onde reçue par un récepteur terrestre (Fig. 1a),

$c$  la vitesse de propagation des ondes radioélectriques,

la fréquence  $f$  reçue par le récepteur terrestre sera donnée par la relation fondamentale:

$$f - f_0 = \frac{f_0}{c} v \cdot \cos \gamma \quad (1)$$

Dans cette relation,  $\cos \gamma$  peut s'exprimer par l'équation:

$$\cos \gamma = \frac{-v(t - t_d)}{\sqrt{v^2(t - t_d)^2 + d^2}} \quad (2)$$

où l'on a désigné par  $d$  la distance minima du satellite  $Mm$   $R$

$t_d$  le temps correspondant à la position  $Mm$  du satellite

$t$  le temps correspondant à la position  $M$ .

Il est possible de déterminer expérimentalement au cours du passage d'un satellite la variation de fréquence  $\Delta f = f - f_0$  en fonction du temps. Si on la représente par une courbe, celle-ci aura la forme reproduite sur la Fig. 1b, le point d'inflexion correspondant à l'instant du passage à la distance minima.

A partir des équations ci-dessus, on peut arriver au moyen d'un calcul assez simple (1) au système de 2 équations:

$$\begin{aligned} v &= \frac{(\Delta f)_{\text{Max}}}{2} \frac{c}{f_0} \\ d &= \frac{v^2 f_0}{c S} \end{aligned} \quad (3)$$

$(\Delta f)_{\text{Max}}$  étant la variation maximum de la fréquence,  $S$  la pente de la courbe DOPPLER en son point d'inflexion.



Le tracé d'une courbe DOPPLER complète permet donc de déterminer la vitesse du satellite et sa distance minimum à la station d'observation. Si l'on dispose de telles données pour plusieurs stations, on peut alors déterminer facilement la trajectoire. On a même donné des méthodes pour déterminer l'orbite à partir des observations effectuées d'un seul point d'observation [2], [3].

## 2. Dispositif expérimental

Le schéma d'ensemble du dispositif primitivement utilisé est représenté sur la Fig. 2. Ce dernier peut fonctionner pour la réception des émissions aussi bien des satellites soviétiques (20 et 40 Mhz) que des satellites américains (108 Mhz).

L'antenne que l'on peut voir sur la Fig. 3 est installée en haut de la station du Val-Joyeux (48° 49' lat. N, 2° 01' long. E) sur une tour de 3 m de hauteur.

Pour 20 Mhz, elle comporte 3 éléments Yagi, avec un gain de l'ordre de 8. En azimut une télécommande à l'aide de selsyns permet de l'orienter de l'intérieur, une rotation complète de 360° nécessitant environ 2 minutes. Il en est de même en site.

Pour 108 Mhz, une antenne Yagi à 5 éléments se trouve placée sous l'antenne 20 Mhz. Elle est immédiatement suivie d'un double convertisseur préamplificateur 40/14,4 et 108/14,4 Mhz pour ramener la fréquence porteuse dans la bande de fonctionnement du récepteur (1 à 40 Mhz).

Ce dernier, qui doit présenter une excellente stabilité et une bonne sensibilité associée avec un niveau de bruit de fond le plus bas possible, est un Collins type R — 390 A/URR. Le cadran d'accord du récepteur est étalonné avant chaque écoute à l'aide des harmoniques d'un petit émetteur local à cristal piézoélectrique vibrant sur 100 Khz. Une bande passante assez étroite (de l'ordre de 2000 Hz par exemple et même moins) est nécessaire pour réduire l'effet du bruit de fond. Après 2 changements de fréquence et un changement par battements (BFO) dans le récepteur, on prélève à sa sortie un signal B.F. dont la fréquence dérive suivant l'effet DOPPLER. Il s'agit ensuite de mesurer la fréquence de ce signal en fonction du temps.

Pour cela on l'enregistre sur un enregistreur magnétique à double piste; sur la seconde piste on enregistre simultanément les signaux de temps: horloge parlante de l'Observatoire de Paris transmise par téléphone ou W W V reçue sur un second récepteur. Les signaux de temps peuvent d'ailleurs n'être en-

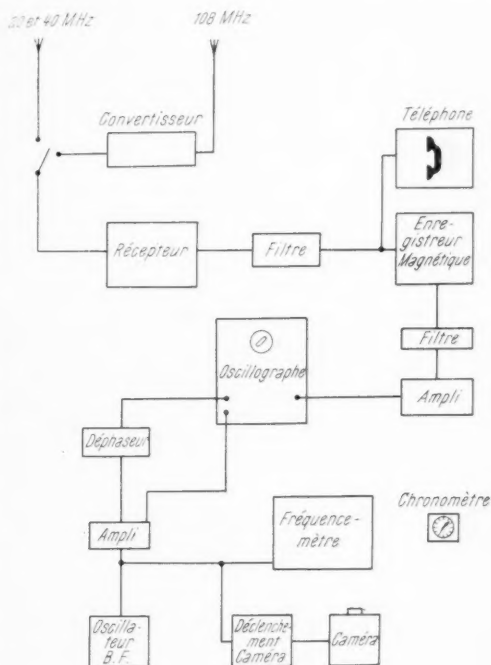


Fig. 2

registrés qu'un peu avant le début du passage du satellite et un peu après, étant donné que l'on peut limiter leur utilisation à la synchronisation d'un chronomètre qui sert ensuite pour la mesure du temps.

Dans le but de limiter le bruit de fond, on interpose entre le récepteur et l'enregistreur magnétique des filtres à bande passante disposant de plusieurs sous-bandes étroites (larges d'une à deux centaines de Hz).



Fig. 3

Pour construire la courbe DOPPLER, nous avons procédé de deux manières différentes, la première très précise mais longue (3 heures pour un dépouillement), la seconde dans laquelle on enregistre directement la courbe. Nous décrivons ici seulement la première: la fréquence enregistrée est mesurée par comparaison avec un oscillateur BF indépendant par le moyen d'une ellipse de LISSAJOUS qui apparaît sur l'écran d'un oscilloscope. Lorsque la fréquence à mesurer devient égale à un sous-multiple connu de celle de l'oscillateur BF, la fréquence de ce dernier est mesurée à l'aide d'un fréquencemètre. En réalité, on est amené à chercher à régler l'oscillateur de référence pour obtenir par moments l'égalité des 2 fréquences (figure de LISSAJOUS constituée par un seul

segment d'ellipse) ou bien à faire en sorte que la fréquence de référence soit la moitié de celle à mesurer (figure de LISSAJOUS à deux segments).

### 3. Utilisation des résultats

#### a) Tracking

Depuis la fin de 1958 jusqu'au courant de 1960, nos résultats ont été utilisés par l'Electronics Research Directorate of the Air Force Research Division pour restituer les trajectoires des satellites, conjointement avec ceux d'autres équipes effectuant des mesures aux endroits suivants:

Jodrell Bank	— Angleterre —
Breisach	— Allemagne —
Florence	— Italie —
Kjeller	— Norvège —
Kiruna	— Suède —
Bedford, Mass.	— Etats-Unis —

Comme il s'agissait d'obtenir la plus grande précision possible, nous avons utilisé un procédé analytique. Il consiste à assimiler la partie centrale de la courbe DOPPLER à une courbe du 3ème degré:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

dont on détermine les coefficients d'après la courbe.

De cette relation, on tire :

$$t_d = x(y'' = 0) = -\frac{b}{3a}$$

et

$$S = y'_{\max} = -\frac{b^2}{3a} + c$$

La précision obtenue est de l'ordre de 0,5 % sur la pente maximum. Sur le temps, elle est de l'ordre de  $\pm 0,5$  seconde. Nous donnons à titre d'exemple une courbe sur laquelle les données utiles sont ainsi déterminées (Fig. 4).

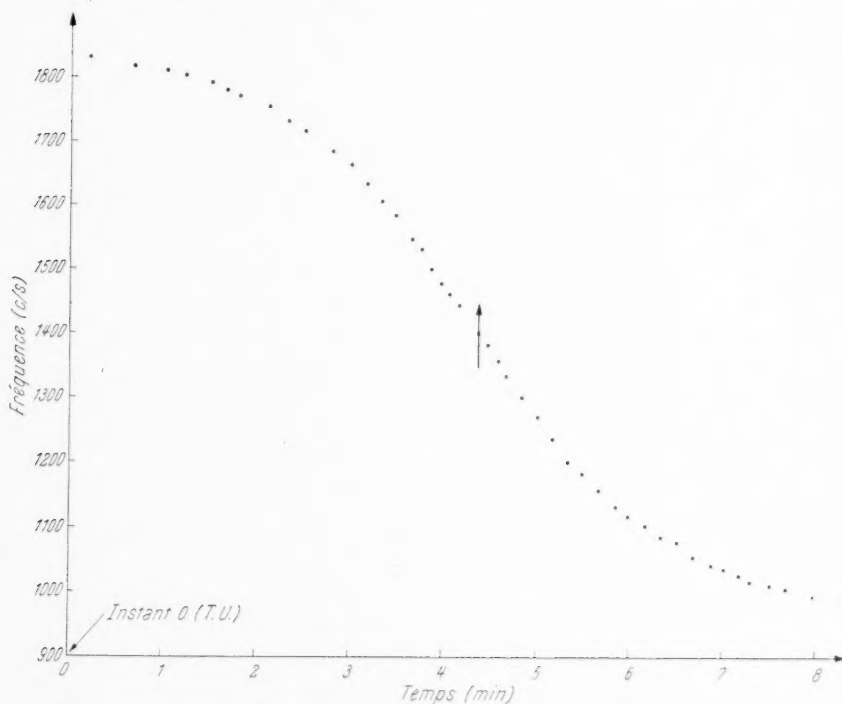


Fig. 4. Val Joyeux ( $\varphi$ :  $48^{\circ} 49' N$ ,  $\lambda$ :  $02^{\circ} 01' E$ ). Mesure d'effet DOPPLER du Satellite 1960  $\epsilon$  1. Jour: 21.05.1960. Révolution: 96. Instant de la distance minimum (T. U.): 03.44.02. Pente: 3,52

Lors d'une réunion qui s'est tenue à Paris en novembre 1959, et où se trouvaient tous les responsables des stations énumérées ci-dessus ainsi que ceux du Space Tracking Center, nous avons pu voir que les points que nous avions fournis étaient parmi ceux qui s'écartaient le moins des trajectoires tracées.

#### b) Hétérogénéités de l'ionosphère

Il arrive assez fréquemment que les courbes DOPPLER présentent des accidents tels que ceux représentés sur la Fig. 5. Or à la réunion de Paris, il fut possible de confronter les enregistrements obtenus de différents points, relatifs à la même rotation d'un satellite, en l'espèce 1958  $\delta$  2 et d'en tirer d'intéressantes conclusions [4].

Essentiellement deux types de phénomènes différents ont pu être distingués:  
— accidents avec début et fin brusques, observés simultanément en différentes stations, dus au passage du satellite à travers une région de forte densité électronique.

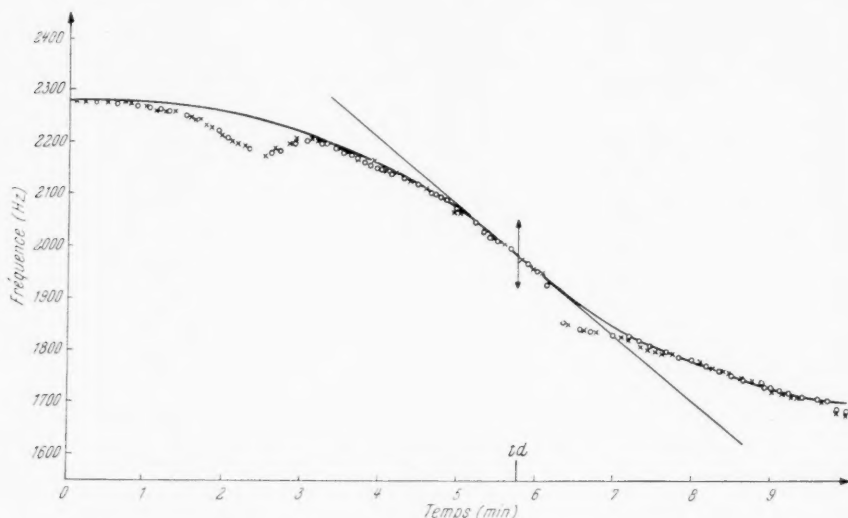


Fig. 5. Jour: 2.08.1959. Heure à la distance minimum (td): 22 h 12 min 53 s T. U. Pente à td  $S \max = \frac{\Delta F}{\Delta t} = 1,88 \text{ Hz/s}$

— scintillation d'origine ionosphérique, les particules responsables étant allongées suivant la direction N-S et se trouvant dans une couche dont la limite inférieure serait de 250 à 400 Km et la limite supérieure vers 1000 Km.

### III. Enregistrement simultané de l'amplitude et de l'effet Doppler-Fizeau

#### 1. Exposé de la méthode

Nous avons cherché durant ces derniers mois à mettre au point une méthode permettant l'enregistrement simultané des mesures d'amplitude et d'effet DOPPLER concernant les signaux radioélectriques émis par des satellites artificiels.

Ces mesures ont porté particulièrement sur les signaux émis par le satellite américain ETA 2; ce satellite présente l'avantage d'émettre actuellement un signal haute fréquence (108 Mhz) non codé, et d'être encore perçu avec un niveau suffisant.

La mise en œuvre simultanée de ces deux mesures, amplitude et effet DOPPLER, pose un double problème.

En ce qui concerne la mesure d'effet DOPPLER, il s'agit d'une mesure de fréquence en fonction du temps; la mesure du temps ne présente pas de difficultés et peut être effectuée avec toute la précision nécessaire; pour la mesure de fréquence, nous avons estimé, compte tenu des résultats déjà obtenus, qu'il était indispensable, outre la mesure directe de fréquence effectuée lors de l'écoute, d'effectuer l'enregistrement sur bande magnétique, qui a par sa propriété de reproductibilité le double avantage de garder la trace de la mesure, et de corriger une erreur éventuelle de mesure de fréquence.

Pour la mesure d'amplitude, la difficulté est de ne pas altérer les variations de niveau des signaux captés par l'antenne du récepteur. La difficulté de cette mesure vient principalement de ce que l'amplitude maximale lors d'un passage est difficilement prévisible, et que d'autre part la variation de niveau dans ces mêmes conditions varie dans un rapport de 1 à 100.

Il ne peut être question d'enregistrement magnétique, il est donc nécessaire de faire un enregistrement graphique direct du signal pris à la sortie du récepteur. Il suffit alors pour interpréter les résultats d'étalonner préalablement le récepteur en lui injectant une tension haute fréquence (de 108 Mhz) et d'amplitude connue, pour déterminer ensuite l'amplitude du signal capté par le récepteur.

## 2. Description de l'appareillage

### a) Cas d'une émission haute fréquence continue

#### $\alpha$ ) Mesure de l'amplitude

L'appareillage employé pour l'enregistrement direct de l'amplitude est indiqué dans le tableau synoptique de la Fig. 6.

*Antenne:* Quart d'onde vertical adapté sur une impédance de 75 ohms.

*Récepteur:* C'est le même récepteur Collins "type R 390 AVRR" précédé d'un convertisseur permettant un premier changement de fréquence et donnant pour une fréquence d'entrée de 108 Mhz une fréquence intermédiaire de 14,5 Mhz. C'est cette dernière fréquence qui est envoyée dans le récepteur proprement dit.

La fréquence de 14,4 Mhz subit dans le récepteur un deuxième changement de fréquence qui donne alors un signal à 455 Khz; ce signal est modulé dans le récepteur par un signal issu d'un BFO. Le battement basse fréquence résultant de cette modulation, dont l'amplitude et la fréquence sont directement proportionnelles à celles du signal capté par l'antenne, est envoyé dans les systèmes détecteurs.

*Détecteur:* Le signal basse fréquence est prélevé après filtrage dans le récepteur et envoyé dans un système détecteur dont la courbe de réponse est linéaire à  $\pm 1$  db entre 10 Hz et 50 KHz. Le signal continu issu de ce détecteur est envoyé dans l'enregistreur.

*Enregistreur:* Il s'agit d'un enregistreur potentiométrique Philips donnant toute sa déviation pour une tension continue d'entrée de 100 millivolts; cet enregistreur est en outre muni d'un système de marquage de temps, commandé par un moteur synchrone et donnant un "top" toutes les trente secondes.

#### $\beta$ ) Mesure de l'effet DOPPLER-FIZEAU

Le signal BF prélevé à la sortie du récepteur est envoyé dans un ampli à contrôle automatique de gain destiné à compenser dans une certaine mesure, les effets de variation de niveau du signal capté par le récepteur; à la sortie de cet ampli,

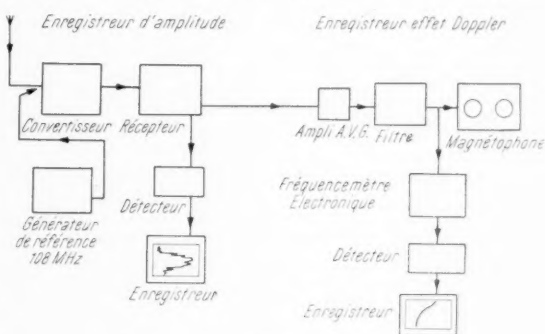


Fig. 6

le signal est délivré de ses harmoniques, et de la plus grande partie de son bruit de fond, au moyen d'un filtre sélectif; enfin le signal ainsi nettoyé est enregistré sur bande magnétique.

Parallèlement à l'entrée de l'enregistreur magnétique le signal est envoyé sur un fréquencesmètre électronique délivrant à sa sortie, une tension continue proportionnelle à la fréquence d'entrée du signal.

Cette tension continue est dirigée sur l'entrée d'un galvanomètre enregistreur muni également d'un marquage de temps.

### b) Cas d'une émission haute fréquence codée

Dans le cas où l'émission du satellite comporte un signal de télémesure superposé, il n'est plus possible d'enregistrer graphiquement les mesures concernant

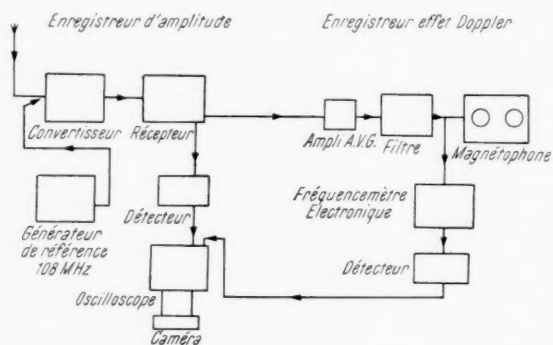


Fig. 7

l'amplitude et l'effet DOPPLER, ces enregistreurs ont, en effet, un temps de réponse incompatible avec l'enregistrement d'un signal codé.

On remplace alors chacun des enregistreurs (Fig. 7) par l'entrée d'un commutateur électronique à amplificateur de tensions continues.

La sortie de ce commutateur électronique, attaque le système de déflexion vertical d'un tube cathodique.

On utilise pour cela un oscilloscope type Tektronix 545 possédant un tiroir commutateur électronique. L'enregistrement du signal apparaissant sur l'écran du tube de l'oscilloscope, s'effectue à l'aide d'une caméra cinématographique à déroulement continu.

Un système de marquage par extinction du faisceau cathodique toutes les trente secondes, donne la mesure du temps.

## 3. Résultats

Nous présentons à titre d'exemple sur la Fig. 8 les enregistrements d'amplitude et d'effet DOPPLER (pour plus de commodité dans l'interprétation des courbes, l'enregistrement d'effet DOPPLER a été reporté sur celui d'amplitude).

Cet enregistrement est relatif au satellite américain ETA 2 et concerne la révolution No 2872 lors du passage au plus près de la station d'écoute du Val-Joyeux.

L'enregistrement a débuté à 23 h 14 min 6.5 s T. U. et s'est poursuivi pendant quatorze minutes.

L'étalonnage du récepteur figuré par les courbes jointes à la Fig. 8 permet de constater que l'amplitude maximale du signal capté par l'antenne est de l'ordre de 0,8 microvolt.

La correspondance entre les courbes d'étalonnage et l'enregistrement d'amplitude s'effectue de la manière suivante :

La tension basse fréquence prélevée sur le récepteur varie notablement suivant la pulsation de ce signal, c'est-à-dire suivant la fréquence du signal HF (effet

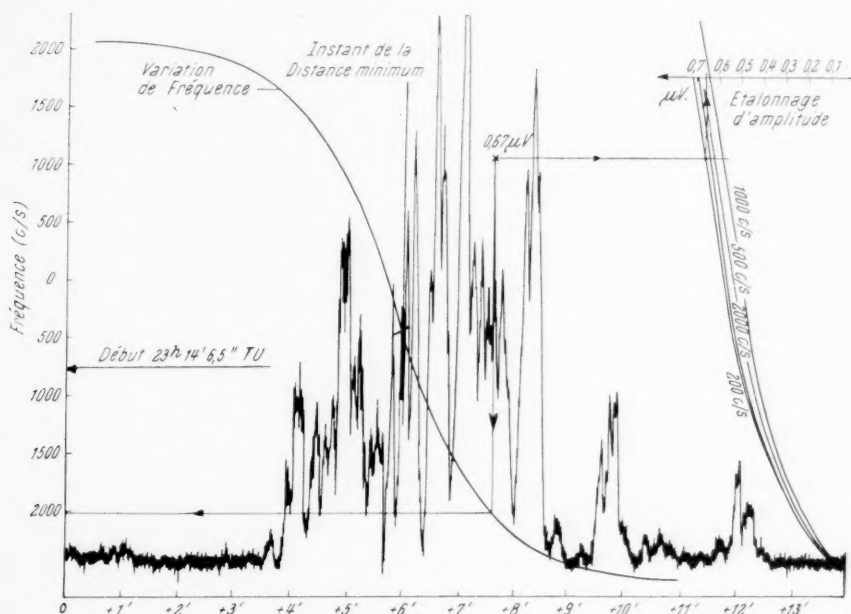


Fig. 8. Val Joyeux ( $\varphi$ :  $48^{\circ} 49' N$ ,  $\lambda$ :  $02^{\circ} 01' E$ ). Satellite 1960 ETA 2. Révolution:  $2872 \frac{4}{1} \lambda$  vertical rec. ant.

DOPPLER); il est donc nécessaire de faire des courbes d'étalonnage pour diverses valeurs de cette fréquence; dans le cas présent, où l'effet DOPPLER présente une variation de  $\pm 2000$  Hz, nous avons réalisé l'étalonnage du récepteur pour 4 fréquences d'entrée au récepteur.

soit: 108 Mhz + 200 Hz  
 108 Mhz + 500 Hz  
 108 Mhz + 1000 Hz  
 108 Mhz + 2000 Hz

Lorsqu'il s'agit de fréquences situées en dehors de ces courbes il suffit d'interpoler entre les deux valeurs les plus proches. Pour connaître la tension captée par l'antenne, d'un point de l'enregistrement d'amplitude on recherche la fréquence exacte du signal HF à cet instant sur la courbe d'effet DOPPLER. Il suffit alors de prendre le point d'intersection de l'amplitude avec la courbe d'étalonnage correspondant à cette fréquence, pour avoir la valeur de la tension d'entrée au récepteur.



#### 4. Utilisation des résultats

Si l'on examine les résultats tels que ceux représentés sur la Fig. 8, on s'aperçoit de la présence d'un bon nombre d'effets perturbateurs:

scintillation ionosphérique,  
effet FARADAY,  
réfraction ionosphérique,  
rotation du satellite autour de son axe,  
variation de la position de cet axe par rapport à la station de réception.

J. MASS et P. BLOOM sont en train de préciser l'importance relative de ces différents effets. Lorsqu'ils seront bien connus, il ne doit pas être impossible d'utiliser les mesures d'amplitude en vue de déterminer l'absorption ionosphérique suivant l'idée que nous avons émise [5].

Si  $E_0$  est la valeur du champ de l'émetteur du satellite situé à la distance  $d$  du récepteur terrestre et ayant traversé une épaisseur  $y$  d'ionosphère dont le coefficient d'absorption moyen est  $k$ , la valeur du champ  $E$  mesurée au récepteur en se servant d'une antenne aussi omnidirectionnelle que possible sera donnée par:

$$E = \frac{E_0}{d} e^{-ky}$$

On calcule  $d$  à partir de la position du satellite donnée par les centres de tracking et  $y$  en tenant compte de la hauteur de la base de l'ionosphère donnée par les ionogrammes classiques.

Utilisant les coordonnées géographiques (latitude et longitude) du récepteur et du satellite, on arrive à des formules relativement simples.

Si théoriquement, pour éliminer  $E_0$  il suffit d'une mesure pour deux positions du satellite au cours d'une même rotation, il est indispensable d'avoir un enregistrement complet de l'amplitude et de l'effet DOPPLER pour tenir compte des effets perturbateurs énumérés plus haut.

#### IV. Conclusion

On voit donc évoquées ici quelques-unes des possibilités offertes par la simple réception des ondes porteuses émises par les satellites artificiels, indépendamment des informations codées.

Ces travaux ont été rendus possibles grâce à l'Electronic Research Directorate de l'U.S. Air Force Research Division, ARDC, depuis la fin 1958 et depuis le 1er novembre 1960 grâce au Comité Français de Recherches Spatiales.

#### Bibliographie

1. A. SCHWATZMAN and P. D. STAHL, Doppler Equation for Earth Satellite Measurements. Proc. I.R.E. **46**, 1960 (1958).
2. W. H. GUIR and G. C. WEIFFENBACH, Theoretical Analysis of Doppler Radio Signals from Earth Satellites. The Johns Hopkins Univ. Appl. Phys. Lab. Bumb. Ser. Rep. 276 (1958).
3. R. B. PATTON, Orbit Determination from Single Pass Doppler Observations Space Trajectories. New York: Academic Press, 1960.
4. R. S. ROGER, J. THOMSON, J. BOURNAZEL, E. VASSY, H. A. HESS, K. RAWER, N. CARRARA, P. CHECACCI, B. LANDMARK, J. TROIM, B. HULTQUIST, L. LISZKA, J. AROONS, H. E. WHITNEY, Atmospheric Phenomena Noted in Simultaneous Observations of 1958  $\delta$  2. Plan and Space Sci. (sous presse).
5. E. VASSY, Nouveau principe de mesure de l'absorption ionosphérique. C. R. Acad. Paris **250**, 4189 (1960).

# Interstellare Materie mit besonderer Berücksichtigung der Dunkelwolken

Von

J. Eugster<sup>1</sup>

(Mit 1 Abbildung)

(Eingegangen am 6. März 1961)

## I. Einleitung

Die neuesten Ansichten über die Struktur der Dunkelwolken sind von ganz besonderem Interesse und führen uns auf die eingehenden Analysen der interstellaren Staubkörner und der neueren Raumchemie. Unter *interstellarer Materie* versteht man alle Materie, die nicht zu Sternen zusammengeballt, sondern als freies Gas oder Staub im Raum zwischen den Sternen zu finden ist. Früher, als man nur die auffallenden, leuchtenden Nebel oder die dichtesten Dunkelwolken wahrnahm, glaubte man, die interstellare Materie sei an räumlich eng begrenzte Gebiete gebunden und in ihrer Gesamtmasse nicht ins Gewicht fallend. Die Verbesserung der astronomischen Beobachtung, die Anwendung lichtstärkerer Optik und hochempfindlicher Platten ergab, daß im Gegensatz zur früheren Ansicht der Großteil des interstellaren Raumes von feinverteilter Materie durchsetzt ist und der absolut leere Raum wahrscheinlich überhaupt nirgends existiert.

Man unterscheidet:

1. Die sogenannten *Gasnebel*, in denen freie Gasatome und Moleküle durch die Strahlung energiereicher Sterne innerhalb oder in der Nähe des Nebels zum Leuchten angeregt werden. Meist sind die Gasnebel noch von feinsten Staubwolken durchsetzt, die rein reflektiertes Sternlicht zum Gesamtlicht des Nebels beisteuern. Früher wurden alle diffusen, unregelmäßigen, leuchtenden Nebelmassen als Gasnebel bezeichnet, während man heute zwischen a) *Emissionsnebel* und b) *Reflexionsnebel* zu unterscheiden gelernt hat. Die Emissionsnebel absorbieren das Licht in ihrer Nähe stehender, heißer Sterne und emittieren es nach einem atomaren Prozeß wieder. Die Reflexionsnebel sind nur infolge normaler Reflexion des Sternlichtes an festen Partikeln sichtbar. Es handelt sich hier um *kosmische Staubwolken*, welche von benachbarten Sternen beleuchtet werden. Meist tritt weder der eine noch der andere Typ rein auf, sondern in einem Nebel finden sich Emission und Reflexion gemischt.

Die allgemeine interstellare Materie ist somit ein Gemisch aus Gas und Staub; die beiden Anteile machen sich nur in völlig verschiedener Weise bemerkbar. Eine Unterscheidung zwischen kosmischem Staub und interstellarem Gas besteht darin, daß erstere die Lichtschwäche auf allen Wellenlängen zeigt, das interstellare Gas eine Absorption und Emission nur in einzelnen Spektrallinien aufweist.

<sup>1</sup> Professor, Universität Zürich, Schweiz.

2. *Dunkelwolken*, die sich durch Absorption des Lichtes hinter dem Nebel stehender Sterne bemerkbar machen und vielfach als dunkle Kanäle vor hellen Sternwolken oder hellen Nebeln abgehoben erscheinen, bestehen meist zum größten Teil aus *kosmischem Staub*, nebst einem Gasmisch.

Für das beobachtende Auge repräsentieren sich die Dunkelwolken als sternarmes Gebiet. Es sind sogenannte Sternleeren, also Gebiete, die Sternarmut zeigen.

Man kennt über tausend derartige Dunkelwolken, die insgesamt etwa ein Drittel der Fläche des Milchstraßenbandes am Himmel bedecken. Sehr auffällig sind die Dunkelwolken im Sternbild des Schwans, welche die Gabelung der Milchstraße vortäuschen. Andere Beispiele von Dunkelwolken sind der Kohlsack im südlichen Kreuz am Südhimmel und der große Pferdekopf im Orionnebel. Die *Lage* der Dunkelwolken ist insofern typisch, als alle in der galaktischen Äquatorzone liegen. Sie reichen nicht über die galaktische Breite von  $30^\circ$  hinaus. Insgesamt bildet die interstellare Materie eine Schicht in der Milchstraßenebene, die einige 100 Parsec (pc) beträgt. Licht von Sternen in hohen galaktischen Breiten wird fast ungeschwächt durchkommen.

Für ein *Arbeitsmodell* einer durchschnittlichen Wolke wird geschätzt:

ein Durchmesser von 10 pc,

eine Dichte von 10 H-Atomen/cm<sup>3</sup> (die lokalen Dichten können mehr als das Hundertfache betragen: 1000 H/cm<sup>3</sup>),

eine Totalmasse von 100 Sonnenmassen ( $M_\odot$ ),

eine mittlere Geschwindigkeit von 10 km/sec.

Zwei Beispiele von maximalen Abweichungen dieser Mittelwerte mögen hier angeführt werden:

a) *Der Rosetten-Nebel* im Sternbild des Monoceros, einem Nebel um den offenen Sternhaufen NGC 2244. Er ist eine leuchtende Masse runder Form mit 16 pc Durchmesser. Seine Entfernung beträgt rund 1400 pc, die Dichte 10000 H-Atome/cm<sup>3</sup>, die Geschwindigkeit etwa 80 bis 100 km/sec. Die Totalmasse des leuchtenden Teils wird auf 10000 Sonnenmassen ( $M_\odot$ ) geschätzt. Dieser helle Teil ist umgeben von einer noch viel größeren Masse dunkler Wolken von 40000  $M_\odot$ . Die Helligkeit dieses Nebels ist die Folge einer Ultraviolettstrahlung von 4-Typ-Sternen, von denen angenommen wird, daß sie innerhalb dieser Riesensmasse von Wolken entstanden sind.

b) Im Gegensatz zu diesen Riesenwolken möge ein Beispiel von *kleinen Dunkelwolken*, sogenannten *Globulen* folgen. Auf vielen Aufnahmen leuchtender, galaktischer Nebel erkennt man kleine Dunkelwolken, die wegen ihres oft kreisrunden Aussehens als Globulen bezeichnet werden. Trotz ihrer Kleinheit, bei einem Durchmesser von etwa 1 pc, absorbieren sie von dem Licht der dahinterliegenden Sterne bzw. der leuchtenden interstellaren Materie bis 5 Größenklassen ( $m$ ) zum Unterschied von nur etwa 1 Größenklasse bei einer typischen Dunkelwolke (von einer Tiefe mit etwa 100 pc). Die Dichte in diesen Gebilden muß infolgedessen wesentlich größer sein. Man schätzt sie auf  $10^{-23}$  bis  $10^{-21}$  g/cm<sup>3</sup> oder 100- bis 1000mal dichter als in normalen Dunkelwolken. Die Durchmesser der Globulen haben dieselbe Größenordnung wie die allgemeine circumsolare Wolke, der zum Sonnensystem gehörenden Kometen, deren äußerster Rand ja wahrscheinlich etwa 1 pc von der Sonne entfernt ist. Man ist aus diesem Grunde vielfach geneigt, die Globulen als erste Entwicklungsstufe von in der Entstehung begriffenen Sternen aufzufassen.

3. *Zahl der Wolken*. Nach BLAAUW [3] enthält ein Visions-Radius (Blickrichtung) von 1000 pc durchschnittlich 10 Wolken. Bei einem mittleren Durchmesser von 10 pc müßten pro Kiloparsec 130000 Wolken vorhanden sein.

4. *Dichte im Weltraum.* Es ist interessant, festzustellen, daß die Ansichten darüber im Laufe der letzten Jahrzehnte sich von einem Extrem zum andern gewandelt haben. Noch vor etwa 50 Jahren nahm man an, daß der Raum zwischen den Sternen praktisch leer, also ein vollkommenes Vakuum sei. Durch zahlreiche Beobachtungstatsachen ließ sich dann die Existenz von interstellarer Materie, zum Teil als gasförmig, zum Teil als staubförmig, beweisen. Anstelle eines Vakuums wurde eine andere extreme Auffassung vertreten, die noch bis vor wenigen Jahren im Schrifttum zu finden ist, nämlich diejenige, die besagte, daß die im interstellaren Raum enthaltene Materie von derselben Größenordnung sein könne, wie die in den Sternen enthaltene Masse.

Durch Untersuchungen der MAGELLANSchen Wolken wurde das Verhältnis der Interstellarmasse zur gesamten Sternmasse auf  $\sim 0,5$  gefunden. Später hat sich dann gezeigt, daß es nicht richtig war, diesen Wert auf die ganze Milchstraße anzuwenden, sondern daß er nur für Räume relativ nahe der Sonne gilt. Statt der Hälfte rechnet man heute an H I (neutralem Wasserstoff) im *Galaktischen System* nur 0,02, also 2% der Sternmasse, wobei ein Verhältnis  $\rho$  H II zu  $\rho$  H I (Verhältnis des ionisierten zum neutralen Wasserstoff) im allgemeinen mit 0,4 bis 0,03 in verschiedenen Gegenden berechnet wird. Da wir für die Dichten der einzelnen Komponenten der interstellaren Materie Werte von  $10^{-26}$  bis  $10^{-23}$  g/cm<sup>3</sup> finden, können wir für eine erste Übersichtsrechnung mit  $10^{-25}$  g/cm<sup>3</sup> rechnen. Intergalaktisch nimmt man eine Dichte von nur  $10^{-3}$  Atomen/cm<sup>3</sup> an ( $10^{-27}$  g/cm<sup>3</sup>).

Die Zusammensetzung der Materie in einer gewöhnlichen H I-Wolke besteht:

- a) weitgehend aus neutralem Wasserstoff, in atomarer und molekularer Form, mit
- b) einer geringen Beimischung von partiell ionisierten leichten Elementen mit ihren freien Elektronen und
- c) aus Staubkörnern.

Die im einzelnen beobachteten Werte der mittleren interstellaren räumlichen Dichteverhältnisse von Gas und Staub beträgt 35 bis 250 und hat den Mittelwert 100. Der Staubgehalt beträgt im Mittel ungefähr 1% des Gasgehaltes.

Tab. 1 orientiert über die Häufigkeitsverteilung der Elemente im interstellaren Gas.

Tabelle 1. Häufigkeitsverteilung der Elemente im interstellaren Gas

Im Durchschnitt enthält 1 m<sup>3</sup> interstellaren Raumes näherungsweise:

- H:  $10^7$  Protonen und  $10^7$  Elektronen
- Na: 111 Atome
- Ca: 15 Atome nicht ionisiert
- 6 Atome in verschiedenen Ionisationszuständen
- übrige Elemente: < 1

5. *Massenauswurf.* Für die Herkunft der interstellaren Materie spielen folgende Prozesse eine wichtige Rolle. Die massenreichsten Sterne schleudern während ihrer Phase der Riesenform enorme Materienmassen zurück in den Weltraum. Auch *Supernovae* werfen riesige Massen aus.

Der Massenauswurf, beschränkt auf *Rote Riesen*, wird auf etwa 1 Solarmasse in  $10^8$  Jahren geschätzt, das ergäbe einen Massenauswurf von etwa  $10^{25}$  g/pro Jahr. Nehmen wir als Beispiel den Roten Superriesen  $\alpha$  Herkulis, einen Doppelstern mit M- und G-Komponenten. Er ist umgeben von einer gemeinsamen Hülle. Diese Wolkenhülle besitzt einen Radius von  $2 \cdot 10^5$  Sonnenradien ( $R_s$ ). Die Masse selbst ist relativ gering,  $10^{-5} M_s$ . Die Hülle dehnt sich aus mit einer Geschwindig-

keit von 10 km/sec, ihre Materie wurde von dem  $M$ -Stern ausgestoßen und geht diesem System nun verloren.

Ähnliche Massenverluste bestehen bei allen anderen Überriesen von späten Spektraltypen. Dieser Prozeß dürfte bei der Entwicklung aller massenreichen Sterne vorkommen, welche ihren Wasserstoff verloren haben.

Historisch ist interessant, daß schon F. M. HELMONT im 17. Jahrhundert den Massenauswurf der Sterne mit dem Ausdruck „Blaas der Sterne“ belegte. Auf diese vorausgeahnte Tatsache möge das am Schlusse unserer Betrachtungen angeführte griechische Zitat bezogen sein.

Bevor wir auf die Analyse der Staubwolke eingehen, soll hier an Hand der Tab. 2 eine Übersicht über einige Wolkentypen gegeben werden.

Tabelle 2. *Wolkentypen. Charakteristika von interstellaren Wolken*

Objekt	1 Kleine Körner	2 Große Körner	3 Mittelgroße Wolken	4 Große Wolken
$M/M_s$	$> 0.2$	5:	$1.3 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^4$
$l$ (pc) = 2 $R$	0.06	0.5	8	40
$\frac{M/M_s}{l}$	$> 3.3$	10:	160	750
$n \left( \frac{\text{H}}{\text{cm}^3} \right)$	$> 7 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^3$	200	40

In dieser Tabelle sind vier Typen von interstellaren Wolken aufgeführt, von denen besonders Typ 4, große Wolken, sich durch Gravitationskraft zusammenzieht.

Im Falle von Kolonne 1 (kleine Körner) scheinen keine Sterne hindurch. Als typische intermediäre Wolke (Kolonne 3) seien als Beispiele erwähnt: der Kohlen-sack im südlichen Kreuz und Wolken in der Nähe von  $\alpha$  Cygni und  $\alpha$  Cephei.

## II. Struktur der Staubwolken

Für die Beschreibung der einzelnen Teilchen, aus denen die Wolken zusammengesetzt sind, können auf Grund der neuesten Untersuchungen zwei Hauptgruppen unterschieden werden, je nach der Größe der Teilchen, mit denen man sich eingehend beschäftigt hat. So wollen wir von einer *Makrogruppe* sprechen für Staubeilchen mit rund  $\sim 1200$  bis  $2000 \text{ \AA}$  und einer *Mikrogruppe* mit Teilchen  $< 100 \text{ \AA}$ , womit das Gebiet der Raumchemie behandelt wird.

Mit der ersten Gruppe haben sich besonders die Autoren H. C. VAN DE HULST [28], J. H. OORT [18, 19] und L. SPITZER JR. [27 bis 29] beschäftigt, mit der zweiten Gruppe: J. R. PLATT [22], L. DAVIS und L. J. GREENSTEIN [10] und B. DONN [6].

### Allgemeines

Zur Geschichte der Erforschung des Kosmischen Staubes sei hier kurz erwähnt, daß 1935 LINDBLAD als erster auf die Möglichkeit von Körnerbildung im Raume hingewiesen, 1949 W. A. HILTNER die Entdeckung der Polarisation des Sternlichtes mitgeteilt hat, wodurch seit 1952 die Erforschung der interstellaren Materie außerordentlich gefördert wurde. Die neueste Entwicklung geschah namentlich auf Grund von Experimenten bei sehr tiefen Temperaturen an chemischen Objekten, Kristallwachstum u. a. (s. Abschnitt Mikrogruppe).

## 1. Makrogruppe

## a) Die Staubteilchen

Die Größe der Staubteilchen wird vorwiegend einige hundert  $\mu$  betragen. Aus der Größe der absorbierenden Partikel und dem beobachteten Betrag der Absorption kann die räumliche Dichte des interstellaren Staubes berechnet werden. Letztere beträgt in der Nähe des galaktischen Äquators  $\sim 10^{-25}$  bis  $10^{-26}$  g/cm<sup>3</sup>. Diese ungeheuer geringe Dichte veranschaulicht man sich am besten durch die Vorstellung, daß durchschnittlich ein Staubteilchen auf 5 Millionen m<sup>3</sup> entfällt. Daß trotzdem ein beobachtbarer Absorptionseffekt entsteht, liegt an den enormen Strecken, die das Licht der Sterne zu durchheilen hat, bevor es zur Erde gelangt.

*Dichte der Staubkörner.* Bei der Konzentration von Staubpartikeln spielt die Wirkung des Strahlendruckes eine wichtige Rolle. Da die Körner gegenseitig zusammenstoßen, werden die schweren Elemente, aus denen solche Körner bestehen, im Verhältnis zu Wasserstoff und den Edelgasen, konzentriert.

Auch die Temperaturdifferenzen zwischen H I- und H II-Regionen haben eine wesentliche Wirkung.

Die mittlere Lebensdauer der Körner beträgt nach OORT und VAN DE HULST  $5 \times 10^7$  Jahre, bevor sie verdampfen.

Was die chemische Zusammensetzung der Körner betrifft, sei auf Tab. 3 verwiesen.

Tabelle 3. Chemische Zusammensetzung der Körner

Chem. Verbindung	%
H <sub>2</sub> O	42
NH <sub>3</sub>	16
CH <sub>4</sub>	15
Fe	13
Si H <sub>4</sub>	6
H <sub>2</sub> S	5
Mg	3
andere	< 1
	100 %

b) H<sub>2</sub>O und Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>

Vorerst wollen wir die Betrachtung nur auf H<sub>2</sub>O und Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> beschränken. Die resultierende Dichte der Masse in einem Korn beträgt 1,2 g/cm<sup>3</sup>.

*Zusammenstöße.* Bei einer inneren Energie  $u$  von 250 cal/g wird das Korn auf 100° C erhitzt und etwa ein Drittel der H<sub>2</sub>O-Moleküle wird verdampfen. Ein Überwert von  $u_1$  von 1000 cal/g genügt, daß alles H<sub>2</sub>O verdampft und der Rückstand wird festes Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> bilden. Wenn nur ein kleiner Teil des H<sub>2</sub>O verdampft, wird das Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> sich verdichten, um eine getrennte Masse von Ferri-Oxyd innerhalb des Kornes zu bilden, vorausgesetzt, daß das Korn für eine genügend lange Zeit in flüssiger Form existiert. Die innere Energie  $u$ , in cal/g, die infolge eines Zusammenstoßes erzeugt wird, kann wie folgt berechnet werden: Für einen zentralen Stoß zweier Körner gleicher Masse, die sich mit einer Relativgeschwindigkeit  $V$  bewegen, gilt:

$$u = 3 \times 10^{-9} V^2 \text{ cal/g.} \quad (1)$$



Für den oben gesetzten Betrag von 250 cal/g wäre somit eine Relativgeschwindigkeit von

$$\sqrt{\frac{2,5 \cdot 10^2}{3 \cdot 10^{-9}}} = 2,9 \cdot 10^5 \text{ cm/sec} = 2,9 \text{ km/sec} \quad (2)$$

nötig.

Für die früher angenommene mittlere Geschwindigkeit einer Dunkelwolke von 10 km/sec ergäbe dies  $u = 10^3$  cal/g, den erwähnten Wert, bei dem alles  $\text{H}_2\text{O}$  verdampft. Das Korn wird zerstört. Aus diesen Überlegungen kann geschlossen werden, daß für jeden Wert von  $u$  zwischen  $u$  und  $u_1$  alles  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  sich in feste Form kondensiert. Es wird sich also ein fester Kern von  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  bilden, wenn zwei Eiskörner mit einer Relativgeschwindigkeit zwischen 2 und 6 km/sec zusammenstoßen, es führt dies zur Bildung ferromagnetischer Partikel („Compound grains“ = Kernkörner) zum Unterschied von primären, einfachen Eiskörnern („ordinary grains“), gewöhnliche Körner.

### c) Ferromagnetische Partikel

Dafür kommen in Betracht: metallisches Eisen, die Eisenoxyde  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ,  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ , letzteres auch wenn es in einer wäßrigen Lösung gefällt ist, sowie  $\text{MgFeO}_4$  (Spinell). Außer Betracht fallen die Endprodukte:  $\text{FeO}$ ,  $\text{FeS}$ ,  $\text{FeSiO}_3$  oder verwandte Verbindungen. Die Theorie geht von der Voraussetzung aus, daß ferromagnetische Körner im Gleichgewicht gebildet werden, d. h. im gleichen Verhältnis, wie sie zerstört werden. Nach einer besonderen Berechnung darf angenommen werden, daß etwa die Hälfte (0,4 bis 0,5) der Masse zweier zusammenstoßender Körner ( $q$ ) für die Bildung eines dichten ferromagnetischen Korns sich eignet. Jedes dichte Korn, das auf diese Art gebildet wurde, wird als Kern für die Kondensation interstellarer Atome dienen, und eine Schale aus Eismasse, die den ferromagnetischen Kern umgibt, wird an Größe zunehmen.

### d) Partikelhäufigkeit und deren Verhältnis zueinander

Eine Schätzung der Relativzahl von „Kernkörnern“ pro  $\text{cm}^3$ , die wie oben ausgeführt wurde, im Gleichgewicht angenommen werden, ergibt folgendes:

$y$  soll das Verhältnis der Partikelhäufigkeit von „Kernkörnern“ (CG) zu jener der gewöhnlichen Körner sein (OG) also CG:OG. Da wir eine gleiche mittlere Lebensdauer für beide Typen annehmen, wird auch die Zahl der zerstörten gewöhnlichen Körner im gleichen Verhältnis bleiben.

$$y = q \frac{(1+y)}{2} \text{ daraus } y = \frac{q}{2-q} \quad (3)$$

Der Faktor  $(1+q)$  geht aus der Tatsache hervor, daß die Fusion eines CG ebenso einen neuen ferromagnetischen Kern erzeugen kann.

Für  $q$  hatten wir oben den Wert 0,4 erhalten.  $y$  wird somit = 0,25, d. h. die Häufigkeit von ferromagnetischen Körnern wäre auf  $1/4$  der Zahl der gewöhnlichen Körner berechnet.

Eine Übersicht über die Charakteristica der Korntypen ist in Tab. 4 gegeben.

Die Form der Körner entsteht dadurch, daß sie aneinander haften, so daß sie verlängerte Nadeln bilden. Die Körner bewegen sich langsam in ein kinetisches Gleichgewicht und ihre starke, gegenseitige magnetische Anziehung wird sie zusammenführen, indem sie mit entgegengesetzten Polen der beiden Kerne so nah als möglich aneinander haften. An winzig dünnen Eisenpartikeln läßt sich im Laboratoriumsversuch ihre Tendenz, in Ketten zusammenzuhaften, gut demonstrieren.



Tabelle 4. *Charakteristica der Korn-Typen*

	1 Gewöhnliche Körner	2 Compound- Körner (CG)	Verhältnis 2:1
$n$ Totalzahl/cm <sup>3</sup> .....	$1,52 \cdot 10^{-13}$	$3,8 \cdot 10^{-14}$	$\sim 1/4$
$\bar{R}$ Mittlerer Radius .....	2400 Å	1300 Å	$\sim 1/2$
$\bar{m}$ Durchschnittliche Masse .....	$9,1 \cdot 10^{-14}$ g	$5,0 \cdot 10^{-14}$	$\sim 1/2$
$\bar{\varrho}$ Weltraum Dichte-Häufigkeit...	$1,38 \cdot 10^{-26}$ /cm <sup>3</sup>	$1,8 \cdot 10^{-27}$ /cm <sup>3</sup>	$\sim 1/8$
$ngF\bar{\varrho}$ partielle $\varrho$ in Wolken .....		$7,6 \cdot 10^{-13}$ /cm <sup>3</sup>	20fach Totalzahl

e) *Interstellares Magnetfeld und dessen Einfluß auf die Interstellarmaterie*

Die Existenz eines solchen Magnetfeldes wurde durch die Entdeckung der Polarisation des Sternlichtes wahrscheinlich gemacht (W. A. HILTNER). Photographische und photoelektrische Beobachtungen, besonders am Nordamerika-Nebel und in den Plejaden zeigen, daß das Licht der Sterne, das durch filamentartige Gebilde hindurchgeht, teilweise polarisiert ist. Diese Polarisation deutet also auf die Existenz von interstellaren Magnetfeldern hin, die in Richtung der Filamente verlaufen und den interstellaren Staub in bestimmter Weise ausrichten. Nach L. DAVIS und J. L. GREENSTEIN [10] sagt die Theorie voraus, daß für uniforme Magnetfelder und interstellare Masse bei konstanter Temperatur und Zusammensetzung die Polarisation proportional zum Farbenexzeß<sup>1</sup> sein dürfte. Die Polarisationsrichtung scheint für das Gebiet der Milchstraße einheitlich zu sein und zeigt, daß die Staubeilchen überall in bestimmter Weise relativ zur Milchstraßenebene angeordnet sind.

DAVIS und GREENSTEIN [10] halten dafür, daß Felder in der Größenordnung von  $10^{-5}$  bis  $10^{-4}$  Gauß nötig sind, um die beobachtete Polarisation zu erklären. Für die orientierende Kraft, welche die Staubeilchen ausrichtet, können zwei Komponenten analysiert werden:

$\alpha$ ) Eine gleichmäßige, einheitliche Komponente, welche die Längsachse der Körner senkrecht, quer zur galaktischen Ebene orientiert und

$\beta$ ) eine fluktuierende Komponente. Die Stärke des fluktuierenden Feldes ist unabhängig von der Richtung und dieses Feld wird zufällig orientiert und in der Betrachtung ausscheiden.

Die Geschwindigkeiten der Wolken sind parallel zur galaktischen Ebene größer als senkrechter dazu. Die stärksten Magnetfelder dürften nach OORT und VAN DE HULST parallel zur galaktischen Ebene sein.

## 2. Mikrogruppe

Zu den bisher besprochenen Arbeiten sind in neuester Zeit Untersuchungen dazugekommen, welche sich mit Partikeln beschäftigen, die bedeutend kleiner sind. Eine Zusammenfassung dieser neueren Arbeiten ist erschienen im Bulletin

<sup>1</sup> Es ist bekannt, daß der Farbenindex  $F. J.$  verbunden ist mit dem Spektraltyp des Sterns. Entfernte Sterne erscheinen röter, als es ihrer Temperatur und damit ihrem Spektraltyp entspricht. Man nennt diese Differenz zwischen der Eigenfarbe und der beobachteten Farbe eines Sterns den *Farbenexzeß*. Dieser deutet darauf hin, daß das Licht eine selektive Absorption erfahren hat. Rotes Licht geht leichter hindurch als blaues.

Nr. 105 Lowell Observatory über die Konferenz in Tucson, Arizona, Februar 1960 [13]. Die hauptsächlichsten Autoren dieser zweiten Gruppe sind J. R. PLATT [22], L. DAVIS und J. L. GREENSTEIN [10], B. DONN [6].

#### a) „Klassische“ Partikel

Fast alle Theorien gehen von der Grundidee aus, daß die interstellare Polarisation auf einer Aneinanderreihung von Partikeln im Raum beruht, und zwar von Staubkörnern, die *nicht sphärisch* sind. Die Brechungsindices solcher Partikel im sichtbaren Bereich gehorchen den klassischen Formeln der Dispersion. Ihre Streuung von Licht ist gegeben durch die Formeln nach MIE, dem sogenannten  $\lambda^{-1}$ -Gesetz, das für Partikel  $> 0,2 \mu$  gilt. Mit solchen Partikeln sind wir auf der Erde vertraut, wo jede unpaaren Elektronen mit jeden andern reagieren können oder beim Durchgang durch die Atmosphäre sich so verändern, daß gesättigte, chemisch stabile Formen gebildet werden.

Ein klassisches Metallpartikel oder eine „Antenne“, deren Länge oder längster Durchmesser  $L$  ist, emittiert oder absorbiert die fundamentale Wellenlänge  $\lambda$  nach der Formel:  $\lambda = 2L$ .

Arbeiten über Mikrowellen bestätigen dies in der Millimeter-Region. Eine  $100 \mu$  lange „Antenne“ emittiert oder absorbiert bis etwa  $200 \mu$  Wellenlängen. Metallische Partikel in der Größenordnung von etwa  $10 \mu$  wurden getestet und scheinen Wellenlängen um das Zweifache ihres Durchmessers zu emittieren und zu absorbieren, wie erwartet. Allein es ist klar, daß diese Formel sich nicht bis in die Regionen von molekularen Dimensionen hinab erstrecken kann (s. gestrichelte Doppellinien in Abb. 1).

Das *Wasserstoffatom* mit  $1 \text{ \AA}$  Durchmesser hat nicht seine erlaubte Absorption („strong allowed absorption“) bei  $2 \text{ \AA}$ , sondern bei  $1215 \text{ \AA}$ , der LYMAN- $\alpha$ -Linie, also beim 600fachen der erwarteten klassischen Dipolwellenlänge.

$$\frac{1}{\lambda} = N = Ry \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) m=1, n=2 \text{ (LYMAN)}.$$

$Ry = \text{RYDBERG-Konstante} = 1,09766 \cdot 10^5 \text{ pro cm. } N = 7,5 \cdot 10^4, \lambda = 1,215 \cdot 10^{-5} = 1215 \text{ \AA}.$

Ebenso absorbiert das *Heliumatom* bis  $584 \text{ \AA}$ . Äthylene  $\text{C}_2\text{H}_4$  mit einem Durchmesser von  $\sim 2,5 \text{ \AA}$  haben ihre erste „strong allowed“ Dipolabsorption bei etwa  $1800 \text{ \AA}$ . Das Molekül  $\text{C}_3$ , etwa  $3 \text{ \AA}$  lang, absorbiert im UV bei 500mal der klassischen Wellenlänge  $= 500 \cdot 6 = 3000 \text{ \AA}$ .

#### b) Partikel nach Platt

(Erklärung und Besprechung von Abb. 1)

PLATT hat darauf hingewiesen, daß Körner, die freie Radikale enthalten oder ungefüllte Energiestreifen zeigen, wirksame Absorber sein dürften.

Abb. 1 stellt die Beziehungen zwischen der längsten Wellenlänge  $\lambda$  von Dipolabsorption (Ordinate) und dem größten Durchmesser  $L$  (Abszisse) von Partikeln dar.

Die doppelt ausgezogene Linie, beginnend bei etwa  $10 \mu$ , gilt für metallische Partikel  $> 10 \mu$  und für die Formel  $\lambda = 2L$ , welche für Elektronenaustausch charakteristisch ist.

Die breite Linie gilt für den Bereich von chemisch ungesättigten organischen Molekülen, Ionen und Radikalen von der Größe 3 bis  $30 \text{ \AA}$  und ist charakteristisch

für „Ein-Elektronen-Sprünge“. Es ist der Bereich der „quantenmechanischen“ Formel  $\lambda \sim 400 L$  nach PLATT.

Ein „Ein-Elektron-Sprung“ kann durch das Korrespondenzprinzip als die Bewegung des Elektrons von einem Ende des Partikels zum andern Ende erklärt

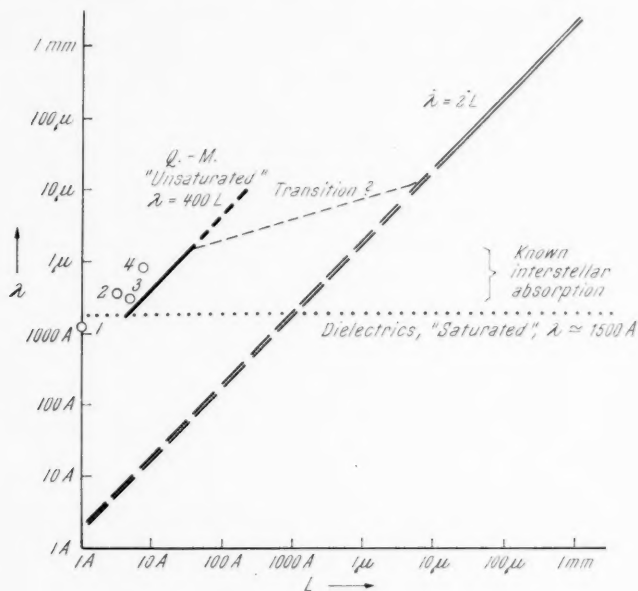


Abb. 1. Nach J. R. PLATT

werden. Das gibt einen elektrischen Dipol, der von Ende zu Ende schwingt, um Licht zu emittieren und zu absorbieren. Zum Unterschied vom klassischen Fall bewegt sich hier ein „chemical electron“ nur mit der Größenordnung von  $1/137$  Lichtgeschwindigkeit, das entspricht etwa der Geschwindigkeit des Elektrons in der 1. BOHRschen Elektronenbahn eines Wasserstoffatoms.

Die gestrichelte Kurve bildet den Übergang (transition) zwischen den beiden Hauptgebieten und umfaßt die noch wenig bearbeiteten Verhältnisse von Partikeln der Größenordnung 20 Å bis 10  $\mu$ .

Die punktierte Horizontallinie gilt für die Absorption von Dielektrika mit  $\lambda \approx 1500$  Å, bei chemisch gesättigten Systemen mit Elektronenpaar-Bindungen, unabhängig von der Partikelgröße.

Abb. 1 zeigt also den Vergleich der klassischen mit der quantenmechanischen Lichtabsorption durch große Moleküle oder kleine Partikel, mit anderen Worten, sie zeigt:

$\alpha$ ) den klassischen oder „Mehrelektronenfall“,

$\beta$ ) den Fall, den PLATT als den quantenmechanischen oder „Einelektronenfall“ bezeichnet. Dieser besteht in einem „Einelektronensprung“ zwischen den höchst gefüllten und tiefsten, leeren FERMI-Niveaus eines Quasi-Metallpartikels von der Länge  $L$  nach der Formel  $\lambda = 400 L$ .

Zur horizontalen, punktierten Dielektrika-Linie sei noch folgende Erklärung hinzugefügt: Ein interstellares dielektrisches Partikel dürfte aus Eis ( $H_2O$ ), Ammoniak, Methan,  $CO_2$ , und andern nicht reaktionsfähigen oder chemisch

gesättigten Molekülen bestehen. In einem solchen Partikel würden alle Elektronen paarweise vorkommen und in geschlossenen oder gesättigten Elektronenschalen festgebunden sein. Der erste UV-Absorptionsstreifen von solchen Molekülen oder Partikeln liegt da, wo die C—H, C—O, N—H, O—H oder andere einfache Bindungen oder feste Doppelbindungen absorbieren. Das ist im Bereich von 1000 bis 2000 Å, und zwar ohne Rücksicht auf die Größe des Partikels der Fall. Ihre Streuung von Licht ist gegeben durch die MIE-Formel ( $\lambda^{-1}$ -Gesetz).

Anders ist es beim „Einelektronensystem“. Es scheint unwahrscheinlich, daß ein solches Partikel seine Paarelektronen im interstellaren Raum für längere Zeit behalten könnte unter Bedingungen, wie Zuwachs von Ionen und Radikalen sowie unter dem Einfluß der Strahlung (*Strahlenschaden*).

Sobald in diesem System ein unpaares Elektron vorkommt, so wird es zu einem *mobilen Elektron* („Einelektronensystem“), indem es einen paramagnetischen oder quasimetallischen Charakter an das Partikel abgibt und sein Absorptionsspektrum ändert. Dabei wird letzteres in den sichtbaren oder infraroten Bereich verlagert. Der Unterschied zwischen klassischer und quantenmechanischer, quasimetallischer Absorption wird in Abb. 1 gezeigt.

Aus der Beziehung  $\lambda \rightarrow L$  läßt sich auch eine Formel für die Zahl der Atome in  $L$  ableiten.  $n_L$  sei die Zahl von Atomen in  $L$ , dem Durchmesser des Partikels. Der numerische Wert für die Entfernung der einzelnen Atome (Mittelpunkt zu Mittelpunkt) sei 1,4 Å; dann ist  $L$  (Durchmesser) = Zahl der Atome in diesem mal die Entfernung der Einzelatome.

$$L = n_L \cdot 1,4 \text{ oder } n_L = L/1,4.$$

Für die Atomzahlformel ergäbe dies die Beziehung:

$$\lambda \sim 560 n_L, \text{ falls } \lambda \sim 400 L \text{ und } L = n_L \cdot 1,4.$$

### c) Beispiele

α) Wir hatten oben als Proportionalitätsfaktor  $g = 400$  angenommen.

$$\lambda = g \cdot L.$$

Ein kugelförmiges Teilchen von etwa 6 Å Radius mit etwa 500 Atomen ( $\sqrt[3]{500} \sim 8$ ), dürfte groß genug sein, um im sichtbaren Bereich intensiv zu absorbieren. Die Berechnung ergibt:  $n_L = 8$ ;  $L = 8 \cdot 1,4 = \sim 12$  Å.

$$\lambda = 400 L = 4800 \text{ Å.}$$

β) Ein Partikel von 25 Å im Radius mit 10,5 Atomen ergäbe  $L = 50$  Å,

$$\lambda = 400 \cdot 50 \text{ Å} = 2 \mu.$$

γ) Ein Prototyp von der Klasse der Radikalen:  $C_3$  mit weniger als 3 Å Durchmesser, von dem man annimmt, daß es ein im Weltall wichtiger, dauernder UV-Absorber und -Strahler ist, absorbiert im UV etwa beim 500fachen der klassischen Wellenlänge:

$$500 \cdot 6 \text{ Å} = 3000 \text{ Å.}$$

Die hier theoretisch gemachten Berechnungen sind auf experimentellem Weg bestätigt worden, und zwar bei ungesättigten organischen Ketten, Ionen von Farbstoffketten und Radikalen, Molekülen von 4 bis über 20 Å Länge.

## d) Modelle

α) Nach J. L. GREENSTEIN [10] sind *Graphite* ein außerordentlich dünnes, flockenähnliches Material, welches eine sehr große Polarisation bei einem niedrigen Betrag von Absorption zeigt. In den annähernd sphärischen Kohlenstoffrauchpartikeln von Graphitstruktur hat jede Schicht eine verschiedene Größe und stellt ein kondensiertes Ringsystem dar. Das sind künstliche Modelle von Staub. Ein großes aromatisches Molekül, wie Isovianthron ist im wesentlichen ein einschichtiger Mikrokristall von Graphit mit 9 Benzolringen und zwei ( $=C=O$ ) Gruppen. Das Isovianthron wird in der Typenfärberei zur Färbung der Baumwolle gebraucht.

Das Molekül ist etwa 20 Å lang und 3 Å breit und absorbiert bis 1,1 μ.

β) *Übergang*. Wie sich der Übergang zwischen der quantenmechanischen und der klassischen Region in Abb. 1 abspielt, ist noch unbekannt.

Diese Übergangsregion von 20 Å bis 10 μ dürfte sicherlich von größter Wichtigkeit für das interstellare oder interplanetare Staubproblem sein.

Die Sammlung und Analyse von kosmischem Staub im Bereich dieser Größenordnung mittels Satelliten dürfte von größtem Interesse sein.

Für die chemischen Reaktionen sind von Bedeutung:

1. die hoch energetische UV-Strahlung,

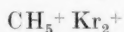
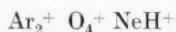
2. irgendwelche korpuskulare, vor allem die kosmische Strahlung.

Laboratoriumsversuche zeigen, daß eine große Wahrscheinlichkeit besteht, daß Zwischenverbindungen in verschiedene Fragmente zersplittern. Es entstehen Prozesse, die für terrestrische Versuche nicht charakteristisch sind. Die PLATTschen Molekültypen werden vermutlich als Kondensationskerne für größere Körner dienen, die graduell über die von VAN DE HULST beschriebenen Typen von molekularen Kondensaten hinaus gehen. Nach DONN [6] dürften im Welt-raum nicht nur gesättigte Moleküle wie  $H_2O$ ,  $NH_3$ ,  $CH_4$  vorkommen, sondern auch eine große Variation von ungesättigten, reaktiven Molekülen. So haben wir das interessante Ergebnis vor uns, daß solche Körner bei Temperaturen um 0° C oder unter der Einwirkung von korpuskularer Strahlung chemisch instabil sein werden.

Ionen-Molekülreaktionen sind neustens in Massen-Spektrometern von Seiten verschiedener Autoren untersucht worden.

Zwei Ergebnisse von ganz besonderem Interesse scheinen für die neu sich entwickelnde Raumchemie wesentlich zu sein:

1. Eine reiche Zahl von ungewöhnlichen Ionenarten



2. Das zweite Ergebnis besteht in einem großen Reaktionswirkungsquerschnitt für Ionen-Molekülreaktionen. Dieser ist etwa gleich oder eine Größenordnung größer als die Zusammenstoßwirkungsquerschnitte für die entsprechenden neutralen Moleküle.

J. L. GREENSTEIN [10] schlägt zur Nachprüfung Versuche über Bestrahlung freier Radikale oder dielektrischer Partikel in Acceleratoren vor, was allerdings bei Temperaturen von flüssigem Helium und bei vollständig chemisch reinen Verbindungen gemacht werden müßte. Auch Versuche unter Einwirkung der kosmischen Strahlung werden dringend empfohlen.

### III. Dunkelmaterie und kosmische Strahlung

Wenn wir die neuesten Ergebnisse bei der Erforschung des kosmischen Staubes<sup>1</sup> betrachten, so fällt auf, daß gewisse Analogien zur kosmischen Strahlung vorliegen:

1. Die Verteilung der chemischen Elemente, vor allem das Verhältnis der schweren Elemente zu Wasserstoff, ist in beiden sehr ähnlich.

2. Die Lebensdauer für interstellare Körner und diejenige der Partikel der kosmischen Strahlung innerhalb einer Wolke haben gleiche Größenordnung ( $10^7$  a).

3. Der Gesamtenergieverlust der kosmischen Strahlung wird auf  $10^{-26}$  erg/cm<sup>3</sup> sec geschätzt (MORRISON, OLBERT und ROSSI 1954 [17]). KAHN [12] schätzte, daß der Energieverlust bei unelastischen Zusammenstößen zwischen Wolken  $\sim 10^{-26}$  erg/cm<sup>3</sup> sec betrage.

4. In der neuen Theorie über den Ursprung der kosmischen Strahlung spielt die Dunkelmaterie eine zentrale Rolle. Die von F. HOYLE [11] vorgeschlagene und von P. M. S. BLACKETT [4] begründete Theorie postuliert das Vorhandensein von elektrischen Feldern, die sich bei Zusammenstößen von Dunkelwolken bilden. Diese Dunkelwolken sind oft undurchlässig für Licht, aber durchgängig für kosmische Strahlung. Die Atome im Innern dieser Dunkelmassen werden zum größten Teil neutral sein, da ja das Sternlicht nur die äußere Schicht ionisiert. Wenn nun zwei solche Dunkelwolken zusammenstoßen, dürften in Anbetracht verschiedener Bestandteile oder Partikelgrößen durch Ladungsunterschiede elektrische Felder erzeugt werden.

Starke elektrische Felder kann man in der Tat durch Strömungen von Staubpartikeln experimentell nachweisen. Elektrische Felder können auch entstehen, wenn sich zwei Staubwolken nah genug aneinander vorbei bewegen.

Ein ganz beträchtlicher Teil der kinetischen Translationsenergie der Wolken kann sich so in elektrostatische Feldenergie umsetzen.

Für die extragalaktische Herkunft bleibt nur noch der Injektionsmechanismus durch Supernovae übrig, während für den intragalaktischen Ursprung die Bedeutung der Dunkelmaterie stark in den Vordergrund gerückt ist.

### IV. Interplanetare Materie (Sonnensystem)

Zur interplanetaren Materie im *engern* Sinn rechnet man

1. die äußeren Teile der Korona der Sonne,
2. die Partikel des Zodiakallichtes,
3. Meteoriten,
4. das vorwiegend durch Diffusion aus den Atmosphären der Planeten in den Raum zwischen den Planeten abgewanderte Gas.

In *erweitertem Sinn* gehören dazu die Planetoiden und Kometen.

Je nach Größe und Art ihrer Bestandteile unterliegt die interplanetare Materie den verschiedenartigsten physikalischen Kräften. So sind für alle *größeren Körper* (Planetoiden, Kerne der Kometen, Meteoriten) die von Sonne und Planeten ausgeübten Gravitationskräfte praktisch allein wirksam. Hier gelten daher in voller Strenge die Gesetze der Himmelsmechanik.

Für Staubteilchen von weniger als  $1\mu$  Größe und für Moleküle kann der *Strahlungsdruck* der Sonne die gravitationsbedingte Anziehungskraft übertreffen und diese Teilchen im Laufe der Zeit aus dem Sonnensystem völlig entfernen.

<sup>1</sup> Für dieses Forschungsgebiet wäre der Ausdruck „Konilogie“ vorzuschlagen (Konis = Staub).



Staubteilchen von etwa  $10\ \mu$  bis zu einigen cm Größe erhalten bei der diffusen Zerstreuung des Sonnenlichtes zufolge der Relativitätstheorie einen Impuls in der ihrer Bahnbewegung um die Sonne entgegengesetzten Richtung, d. h. sie werden gebremst, verlieren daher Energie und nähern sich der Sonne im Laufe von Millionen Jahren und zwar auf spiralförmigen Bahnen. Es ist dies der sogenannte *Poynting-Robertson-Effekt*.

Diese Partikel werden allerdings in der heißen Sonnenumgebung verdampfen und nicht die Masse der Sonne selbst, sondern die Masse des interplanetaren Gases vermehren. Im Gegensatz zu dieser Bremsung von Partikeln erfährt die solare Partikelstrahlung (Sonnenaktivität, Kometen) außerordentlich hohe, von der Sonne fortgerichtete Beschleunigung infolge elektromagnetischer Impulsübertragung. Das allgemeine Magnetfeld der Sonne (1 bis 2 Gauß) bestimmt wahrscheinlich die Form der Korona und den Wirksamkeitsbereich der Partikelstrahlung. Die Bewegung der ionisierten Materie im Sonnensystem überhaupt läßt ein interplanetares Magnetfeld vermuten, das nach den Gesetzen der Magneto-hydrodynamik eine bedeutsame Rolle für die interplanetare Materie spielen dürfte.

### V. Staubmaterie im Sonnensystem

Von großem wissenschaftlichem Interesse ist die Ausdehnung kosmischer Staubpartikel, die sich im Sonnensystem befinden. Denn die Planeten fangen dauernd meteoritisches Material ein.

Das totale Volumen, das von der Erde während eines Jahres weggefeht wird, ist  $1,1 \cdot 10^5$  mal das Erdvolumen (mit rund  $10^{12}\text{ km}^3$ ).

Die neuesten Messungen von kosmischem Staub *in Satelliten* ergeben nach F. L. WHIPPLE 1 bis 2000 Tonnen pro Tag über der ganzen Erdoberfläche. Die früheren Angaben in der Literatur von 10000 Tonnen sind vermutlich zu hoch gegriffen. Ein Teil dieser Menge stammt bestimmt aus dem interplanetaren Raum. Sollte der Einfall der Staubmenge im Verlaufe der geologischen Geschichte der Erde konstant geblieben sein, so müßte sich eine etwa 30 cm dicke Staubschicht auf der Erde abgesetzt haben. Man vermutet, daß auch die Staubschicht auf der Mondoberfläche von diesem dauernden Staubeinfall herrührt. Aus Arbeiten von A. LUNDBÄK [14] geht hervor, daß die Fallzeit der Staubmasse einige Monate beträgt, wenn Teilchen in der Größenordnung von  $0,1$  bis  $1\ \mu$  von 700 km auf 200 km fallen. In der niedrigeren und dichtereren Atmosphäre wird der Fall langsamer und die Dichte größer sein. H. C. VAN DE HULST [30, 31] schließt aus Untersuchungen des Zodiakallichtes, daß die mittlere Dichte des Staubes in Höhen von  $650\text{ km} = 4 \cdot 10^{-16}\text{ g/cm}^3$  beträgt. Nach F. L. WHIPPLE [33] besteht um die Erde eine Staubwolke mit maximaler Dichte bei 100000 km. Er vermutet, daß ein Teil dieser Staubmasse vom Mond stammt. In diesem Fall wäre es also möglich, Material vom Mond untersuchen zu können, ohne dort landen zu müssen.

Kosmischer Staub muß unzweifelhaft als ein verlangsamerender Faktor bei den Satellitenbahnen in Betracht gezogen werden.

Zum Abschluß unserer Betrachtung möge noch eine leicht spekulative Note vorgebracht werden.

Wir können uns vom biologischen Standpunkt aus einmal die Frage vorlegen: Was geschieht mit den gar nicht unbescheidenen Staubmassen auf der Erdoberfläche? Meteorischer und kosmischer Staub wird unter Einfluß von Wasser und Sauerstoff in der Biosphäre stark verändert. Zuletzt wird das Staubmaterial im Boden oder porösen Felsen versickern und von den Pflanzen aufgenommen (Fe). Durch die Pflanzen gehen schließlich die Atome des kosmischen Materials in tieri-



sche und menschliche Körper über. Untersuchungen darüber, ob radioaktive Isotopen des Eisens infolge der kosmischen Strahlung irgendwelche biologische Wirkungen haben können, liegen noch keine vor. Wir schließen mit dem „modernen“, griechischen Hexameter:

*χαίματι ἔμπνευσεν τέκνων θεὸς ἀστροζωνίην*

Bis in das Blut ihrer Lieblinge  
Hauchten die Götter  
Den „Blaas“ ihrer schicksalsbringenden Sterne.

#### Literaturverzeichnis

1. W. BECKER, Fortschr. Astronomie **1** (1938).
2. L. BIERMANN, Z. Astrophysik **25**, 161 (1948).
3. A. BLAAUW, Bull. Astronom. Nederl. **11**, Nr. 436 (1952).
4. P. M. S. BLACKETT, Report Int. Conf. Tata Inst. Fund. Res. Bombay Dec. 1950.
5. S. CHANDRASEKHAR and E. FERMI, Astrophysic. J. **118**, 113 (1958).
6. B. DONN and F. BROIDA, New York: Academic Press, 1960.
7. H. DEBRUNNER, Die Nucleonen-Komponente der Kosmischen Strahlung. Dissertation, Bern 1959.
8. A. DEUTSCH, Astrophysic. J. **123**, 210 (1956).
9. T. GOLD, Nature **169**, 322 (1952).
10. J. L. GREENSTEIN, Astrophysics. New York: J. A. Hynek, 1951.
11. F. HOYLE, Astrophysic. J. **118**, 513 (1953).
12. F. D. KAHN, Bull. Astronom. Nederl. **12**, 132, 187 (1954).
13. Lowell Observatory Bulletin 105, Conference Tucson, Arizona, 1960.
14. A. LUNDBAK, About Cosmic Dust as Decelerating Factor and a General Law for Satellite Orbits. XIth International Astronautical Congress, Stockholm 1960.
15. A. E. LILLEY, Astrophysic. J. **121**, 559 (1955).
16. L. MESTEL and L. SPITZER, Mon. Not. Roy. Astronom. Soc. **116**, 503 (1956).
17. PH. MORRISON, ST. OLBERT und BR. ROSSI, Physic. Rev. **94**, 440 (1954).
18. J. H. OORT, Bull. Astronom. Nederl. **12**, Nr. 455, 177 (1954).
19. J. H. OORT, Specola Astronom. Vaticana **5**, 26 (1958).
20. H. PETTERSON, Nature **181**, 333 (1958).
21. W. H. PICKERING, Vortrag RIAS Funk-Univ. Berlin 1960.
22. J. R. PLATT, Astrophysic. J. **123**, 486 (1956).
23. M. SAVEDOFF, Astrophysic. J. **124**, 533 (1956).
24. M. SCHWARZSCHILD, Evolution and Structure of Stars. Princeton: University Press, 1959.
25. E. SCHATZMAN, Astrophysic. J. **54**, 195 (1949).
26. M. SCHÜRER, Vorlesungen über Astrophysik 1959.
27. L. SPITZER JR., Astrophysic. J. **94**, 232 (1941).
28. L. SPITZER JR., Astrophysic. J. **114**, 187 (1951).
29. L. SPITZER JR., Specola Astronom. Vaticana **5**, 445 (1958).
30. H. C. VAN DE HULST, Astrophysic. J. **105**, 471 (1947).
31. H. C. VAN DE HULST, Astrophysic. J. **118**, 205 (1953).
32. M. WALDMEIER, Einführung in die Astrophysik. Basel: Birkhäuser, 1948.
33. F. L. WHIPPLE, The Dust Cloud about the Earth. Nature **189**, 127 (1961).
34. K. STUMPF, Astronomie. Frankfurt a. M.: Fischer Bucherei, 1959.

## Action des champs magnétiques sur l'écoulement d'un fluide conducteur d'électricité dans une tuyère<sup>1,2</sup>

Par

Jacqueline Naze<sup>3</sup>

(Avec 1 Figure)

(Reçu le 16 mars 1961)

### Résumé — Zusammenfassung — Abstract

**Action des champs magnétiques sur l'écoulement d'un fluide conducteur d'électricité dans une tuyère.** On montre que l'action des champs électriques et magnétiques sur l'écoulement quasi-unidimensionnel d'un fluide parfaitement conducteur d'électricité dans une tuyère ne le modifie pas qualitativement; cette action est au contraire importante pour les fluides imparfaitement conducteurs, et permet: (i) d'obtenir des écoulements stationnaires uniformes dans une tuyère de section constante; (ii) d'observer dans une tuyère de section lentement variable des écoulements transsoniques dont le point sonique est situé en des points de section non extrema; (iii) d'augmenter l'accélération par un champ magnétique convenablement choisi.

On étudie ensuite la stabilité de ces écoulements pour les perturbations du second ordre qui n'en détruisent pas le caractère quasi-unidimensionnel. On voit en particulier que quelle que soit la valeur de la conductivité électrique, un phénomène de blocage apparaît dans les écoulements transsoniques décélérés.

**Der Einfluß eines Magnetfeldes auf die Rohrströmung einer leitenden Flüssigkeit.** Es wird gezeigt, daß der Einfluß eines magnetischen und eines elektrischen Feldes auf die eindimensionale Rohrströmung einer ideal leitenden Flüssigkeit keine qualitativen Änderungen mit sich bringt. Andererseits wird der Einfluß wichtig, wenn es sich um nicht ideal leitende Flüssigkeiten handelt. Folgende Fälle sind möglich: 1. Nicht einheitliche, stationäre Strömung in einem Rohr mit konstantem Querschnitt. 2. Schallnahe Strömung in Düsen mit schwacher Querschnittsänderung, wobei die Machzahl am engsten Querschnitt von 1 verschieden ist. 3. Zusätzliche Beschleunigung durch ein Magnetfeld.

Die Stabilität dieser Strömungen gegenüber Störungen zweiter Ordnung, die den eindimensionalen Charakter der Strömung unverändert lassen, wurde untersucht. Es zeigte sich, daß bei beliebiger Leitfähigkeit und verzögerter schallnaher Strömung Drosselung auftritt.

**The Effect of Magnetic Fields on the Flow of a Conducting Fluid through a Duct.** It is shown that the effect of magnetic and electric fields on quasiunidimensional flow of a perfectly conducting fluid through a duct does not qualitatively modify it; conversely, this effect is important for imperfectly conducting fluids, and allows to get: (i) non uniform, stationary flows in a duct with constant cross-section; (ii) transonic

<sup>1</sup> Dédicé au Professeur THEODORE VON KÁRMÁN à l'occasion de son 80<sup>e</sup> anniversaire.

<sup>2</sup> Qu'il me soit permis de remercier ici le Professeur H. CABANNES qui m'a suggéré l'idée de ce travail, et qui par ses conseils m'a aidée dans son élaboration.

<sup>3</sup> Attachée de Recherches au Centre National de la Recherche Scientifique; 10, Boulevard Michel Fronti, Marseille 8 (Bouches du Rhône), France.

flows with sonic point at non extremum cross-section, in ducts with slowly varying cross-section; (iii) increased acceleration by means of an appropriate magnetic field.

The stability of these flows is then studied, regarding those second order perturbations which do not modify the quasiunidimensional character of the flow. It is seen that, whatever the electric conductivity be, choking appears in decelerated transonic flows.

### Liste des symboles

$p$	pression hydrodynamique	$Q(x)$	aire de la section droite
$\rho$	densité	$\vec{J}$	vecteur courant électrique
$T$	température	$\vec{E}$	champ électrique, dirigé suivant $Oy$
$c_p$	chaleur spécifique à pression constante	$\vec{H}$	champ magnétique, dirigé suivant $Oz$
$c_v$	chaleur spécifique à volume constant		conductivité électrique
$a$	vitesse du son	$u, J, E, H$	désignent les amplitudes des
$\vec{u}$	vitesse du fluide, dirigée suivant $Ox$		vecteurs énumérés ci-dessus

## I. Introduction

On considère l'écoulement d'un fluide non visqueux, non conducteur de chaleur dans une tuyère de section constante ou lentement variable (convergente — divergente). On se borne à l'approximation quasi-unidimensionnelle:  $Ox$  étant l'axe de la tuyère,  $Q(x)$  l'aire de la section droite, les variables hydrodynamiques et électromagnétiques sont fonction de  $x$ , et éventuellement du temps  $t$ ,  $Q(x)$  varie peu avec  $x$ .

En l'absence de phénomènes de nature électromagnétique, les résultats sont bien connus [1].

En pratique, l'écoulement transonique décéléré (supersonique-sonique-subsonique) n'est jamais observé. R. E. MEYER [4] a expliqué ce fait en mettant en évidence l'existence d'un phénomène de blocage au col des écoulements transoniques décélérés.

On se propose d'étudier les caractéristiques des écoulements stationnaires de fluides conducteurs d'électricité en présence d'un champ magnétique, et la stabilité. On montrera qu'il existe des écoulements stationnaires dont les caractéristiques peuvent être plus variées que celles des écoulements de fluides non conducteurs. La vitesse du son peut en général être atteinte ailleurs qu'au col de la tuyère. Il existe encore des écoulements transoniques décélérés. On montrera qu'ils conduisent ici encore à un phénomène de blocage au point sonique. On étudiera également le comportement asymptotique aux extrémités de la tuyère, supposée infinie dans les deux sens, et on comparera les résultats obtenus avec ceux du cas non conducteur.

Il y a lieu de bien préciser ici le sens du qualificatif "quasi-unidimensionnel": il n'a pas seulement un caractère géométrique ayant pour but d'indiquer que l'on considère un écoulement se faisant dans une direction bien déterminée, celle de l'axe  $Ox$  de la tuyère (bien que l'on envisage des variations lentes de sa section droite). En fait il indique une hypothèse supplémentaire également essentielle, qui consiste à négliger toute variation des grandeurs caractéristiques de l'écoulement dans une direction transversale à celle de l'écoulement, que ces grandeurs soient de nature hydrodynamique ou électromagnétique — d'où la notion de valeur moyenne sur une section droite. Les inconnues sont donc fonction du temps  $t$  et de  $x$  seulement.

En particulier, ainsi que l'a fait remarquer le Professeur W. R. SEARS, cette étude ne peut être appliquée à des écoulements dans lesquels les variations

transversales du champ magnétique ne seraient pas négligeables par rapport aux variations le long de l'axe de la tuyère — car il est alors impossible de remplacer en tout point d'une section droite la valeur locale du champ par sa moyenne prise sur cette section.

Une remarque analogue doit être faite sur le sens que l'on attribue ici au mot stabilité: il s'agit de la stabilité d'un écoulement quasi-unidimensionnel pour des perturbations du second ordre, en quelque sorte unidimensionnelles. En d'autres termes, étant donné un écoulement quasi-unidimensionnel, on n'envisage ici que des perturbations telles que:

— au passage de l'onde, seuls sont perturbés les gradients des variables hydrodynamiques — et non ces variables elles-mêmes (perturbation du second ordre),

— l'écoulement perturbé qui s'établit après le passage de l'onde est encore quasi-unidimensionnel, tout au moins pendant un certain temps.

Autrement dit, on ne considère que des perturbations du second ordre compatibles avec les équations de l'écoulement quasi-unidimensionnel, et la stabilité ici étudiée ne concerne que de telles perturbations.

On verra en particulier ( $n^0$  V, 3) que ceci interdit la prise en considération de perturbations qui comporteraient une discontinuité du champ magnétique. Il semble nécessaire pour étudier ce cas d'envisager la propagation d'ondes de choc, dont l'étude n'entre pas dans le cadre de ce travail.

## II. Équations des écoulements quasi-unidimensionnels

On suppose le fluide dépourvu de viscosité et de conductibilité calorifique, et obéissant à l'équation d'état des fluides parfaits,  $p = \rho R T$ , les chaleurs spécifiques  $c_p, c_v$  étant constantes ( $\gamma = c_p/c_v$ ). La densité électrique est supposée nulle et la conductivité électrique  $\sigma$  scalaire et constante. Le vecteur courant électrique  $\vec{J}$  est donné par la loi d'OHM  $\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{H})$ , est parallèle à  $Oy$ , et a pour amplitude

$$J = \sigma (E - u H).$$

### 1. Équations du mouvement

Les phénomènes électromagnétiques se traduisent d'une part par la présence de la force de LORENTZ dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement, d'autre part par un terme d'effet JOULE dans l'équation de l'énergie. On a, dans l'hypothèse quasiunidimensionnelle,  $D/Dt = \partial/\partial t + u (\partial/\partial x)$  représentant la dérivée suivant le fluide ([8, 9], par exemple)

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho u \frac{Q_x}{Q} &= 0 \\ \rho \frac{Du}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial x} - \overrightarrow{(J \times H)}_x &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho c_v T + \rho \frac{u^2}{2} \right) + \frac{1}{Q} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ Q u \left[ \rho c_v T + p + \rho \frac{u^2}{2} \right] \right\} - \vec{J} \cdot \vec{E} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

### 2. Équations de l'électromagnétisme

Pour déterminer les six inconnues  $\rho, p, u, J, E, H$ , on doit adjoindre aux trois équations du mouvement la loi d'OHM et deux données, ou deux équations supplémentaires [7], [8], [9]. Une première approximation consiste à considérer

$E, H$  comme données par un processus extérieur au fluide, et à négliger les effets électromagnétiques induits par le mouvement. Le problème comporte alors seulement quatre inconnues  $\varrho, \phi, u, J$ , la dernière  $J$  étant donnée en fonction de  $E, H, u$  par la loi d'OHM.

Si l'on désire tenir compte des champs induits, on doit écrire les deux équations de MAXWELL :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} &= 0 \\ \nabla \times \vec{H} - \vec{j} &= 0\end{aligned}\quad (2)$$

les courants de déplacement sont négligés.

Les équations de MAXWELL peuvent être interprétées suivant deux points de vue différents, selon que l'on se place du point de vue strictement unidimensionnel, considérant que  $J, E, H$  sont constants le long d'une section droite :

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial H}{\partial x} + \sigma(E - uH) &= 0 \\ J &= \sigma(E - uH)\end{aligned}\quad (3)$$

ou selon que l'on se place du point de vue quasi-unidimensionnel  $\vec{e}, \vec{h}, \vec{j}$  étant les valeurs locales des champs et du courant électrique, variables sur une section droite, vérifient les lois de FARADAY et d'AMPÈRE,

$$\int_{c_1} \vec{e} \cdot d\vec{l} + \int_S \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} ds = 0, \quad \int_{c_1} \vec{h} \cdot d\vec{l} - \int_S \vec{n} \cdot \vec{j} ds = 0 \quad (4)$$

où  $c, s$  désignent une courbe fermée quelconque et une surface s'appuyant sur elle, de normale unitaire  $\vec{n}$ . Les variations de  $\vec{e}, \vec{h}, \vec{j}$  sur une section droite étant supposées faibles, on peut en première approximation leur substituer leurs valeurs moyennes le long de cette section droite,  $\vec{E}, \vec{H}, \vec{j}$ . Après des considérations géométriques simples, il vient

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{Q}} \frac{\partial}{\partial x} (E \sqrt{Q}) &= 0 \\ \frac{1}{\sqrt{Q}} \frac{\partial}{\partial x} (H \sqrt{Q}) + \sigma(E - uH) &= 0 \\ J &= \sigma(E - uH)\end{aligned}\quad (5)$$

### 3. Conductivité électrique

Un cas important est constitué par celui des fluides conducteurs parfaits :  $\sigma = \infty$ ; les équations de l'électromagnétisme s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{Q}} \frac{\partial}{\partial x} (uH \sqrt{Q}) &= 0 \\ J &= -\frac{1}{\sqrt{Q}} \frac{\partial}{\partial x} (H \sqrt{Q}) \\ E &= uH\end{aligned}\quad (6)$$

On étudiera successivement les cas suivants:

α) Le fluide est parfaitement conducteur, et s'écoule dans une tuyère de section lentement variable:

$$\begin{aligned}\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho u \frac{Q_x}{Q} &= 0 \\ \rho \frac{Du}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x} \left( p + \frac{H^2}{2} \right) &= 0 \\ \frac{DS}{Dt} &= 0 \\ \frac{D}{Dt} \left( \frac{H}{Q\rho} \right) &= 0\end{aligned}\quad (7)$$

on a posé  $S = p \rho^{-\gamma}$ , fonction de l'entropie. Lorsque  $H = 0$ , ce système se réduit au système d'équations de l'écoulement quasi-unidimensionnel en l'absence de phénomènes électromagnétiques.

β) La section de la tuyère est constante, et le fluide imparfaitement conducteur:  $\sigma$  fini, non nul, mais on néglige en première approximation les champs induits par le mouvement;  $E, H$  sont donc donnés, pouvant d'ailleurs varier avec  $x, t$ . Le système (7) s'écrit alors:

$$\begin{aligned}\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ \rho \frac{Du}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial x} - \sigma H (E - u H) &= 0 \\ \frac{DS}{Dt} - (\gamma - 1) \sigma \frac{S}{p} (E - u H)^2 &= 0\end{aligned}\quad (8)$$

Lorsque  $\sigma$  tend vers zéro, le système décrit l'écoulement d'un fluide non conducteur dans une tuyère de section constante.

γ) Le cas le plus général consiste enfin à supposer que la section de la tuyère varie lentement, le fluide étant imparfaitement conducteur et la forme quasi-unidimensionnelle des équations de MAXWELL étant retenue:

$$\begin{aligned}\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho u \frac{Q_x}{Q} &= 0 \\ \rho \frac{Du}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial x} - \sigma H (E - u H) &= 0 \\ \frac{DS}{Dt} - (\gamma - 1) \sigma \frac{S}{p} (E - u H)^2 &= 0 \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{Q}} \frac{\partial}{\partial x} (E \sqrt{Q}) &= 0 \\ \frac{1}{\sqrt{Q}} \frac{\partial}{\partial x} (H \sqrt{Q}) + \sigma (E - u H) &= 0\end{aligned}\quad (9)$$

Dans chacun de ces cas, on déterminera le système des surfaces caractéristiques; puis on étudiera les solutions stationnaires, et enfin leur stabilité relativement aux perturbations du second ordre.

### III. Surfaces caractéristiques. Vitesses du son

Dans l'étude de la propagation des faibles perturbations au sein d'un écoulement, les surfaces caractéristiques du système d'équations de l'écoulement jouent un rôle essentiel [1], [2]. Sans revenir sur la méthode bien connue de leur détermination (voir, [1], [2] par exemple), rappelons qu'elles seront ici uniquement déterminées par les termes contenant les dérivées partielles par rapport à  $x, t$  des inconnues, dans chacune des équations du système.

Dans le cas de l'hydrodynamique classique ( $\sigma = 0$ ) le système des surfaces caractéristiques se décompose en

$$\begin{aligned} dx - u dt &= 0 \\ dx - (u + \varepsilon a) dt &= 0 \quad \varepsilon = \pm 1 \end{aligned} \quad (10)$$

ces dernières surfaces constituant les ondes sonores proprement dites progressives ( $\varepsilon = +1$ ) et régressives ( $\varepsilon = -1$ ),  $a$  étant la vitesse du son

$$a = c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\gamma S \varrho^{\gamma-1}} \quad (11)$$

L'examen des systèmes (2) et (9) relatifs à l'écoulement d'un fluide imparfaitement conducteur montre qu'aucune équation ne contient simultanément les dérivées des variables hydrodynamiques  $u, \rho, p$  (ou  $S$ ) et des variables électromagnétiques  $E, H$ . Les surfaces caractéristiques sont donc celles du cas classique, tandis que les perturbations de  $E, H$  se propagent à une vitesse infinie (ondes électromagnétiques). Au contraire, dans le système (1) correspondant aux conducteurs parfaits la dérivée de  $H$  apparaît en particulier dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement, le système des caractéristiques est modifié. Le calcul montre que l'équation correspondant aux ondes sonores proprement dites est

$$dx - (u + \varepsilon a) dt = 0 \quad \varepsilon = \pm 1 \quad (12)$$

mais ici

$$a^2 = c^2 + \frac{H^2}{\rho} = \gamma \frac{p}{\rho} + \frac{H^2}{\rho} \quad (13)$$

On a le résultat important suivant ([7] par exemple).

Au sein d'un fluide imparfaitement conducteur, la vitesse effective du son (vitesse de propagation des petites perturbations) est la vitesse du son,  $c$ .

$$c = a = \left( \frac{\gamma p}{\rho} \right)^{1/2} \quad (14)$$

Au sein d'un fluide parfaitement conducteur, la vitesse effective du son est supérieure à  $c$ , et est donnée par

$$a = \left( c^2 + \frac{H^2}{\rho} \right)^{1/2} \quad (15)$$

Dans ce qui suit, on donnera dans tous les cas à  $a$  le nom de vitesse du son, et le nombre de MACH sera toujours défini par  $M = u/a$ . Un écoulement sera dit supersonique ou subsonique suivant que  $M > 1$  ou  $M < 1$ .

### IV. Écoulements stationnaires

On cherche si les systèmes d'équations du mouvement admettent des solutions indépendantes du temps, définies pour tout  $x$ .



## 1. Conducteur parfait

Les équations (1) montrent que toute solution stationnaire est telle que le débit  $Q \varrho u$ , l'entropie (et par conséquent  $S$ ) et l'intensité magnétique spécifique  $H/Q \varrho$  sont constants. En éliminant  $x$  et en posant  $h^2 = H^2/\varrho a^2$ , ( $0 \leq h^2 < 1$ ), il vient [4]

$$\begin{aligned}\frac{du}{u} &= \frac{1-h^2}{M^2-1} \frac{dQ}{Q} \\ \frac{d\phi}{\phi} &= \gamma \frac{h^2-M^2}{M^2-1} \frac{dQ}{Q}\end{aligned}\quad (16)$$

ces équations se réduisant à celles du cas non conducteur lorsque  $h = 0$ . On voit immédiatement que la vitesse varie qualitativement ainsi que dans ce cas: un écoulement supersonique (resp. subsonique) est accéléré dans la partie divergente (resp. convergente) de la tuyère, et décéléré dans la partie convergente (resp. divergente). La vitesse du son ne peut être atteinte qu'au col. En ce qui concerne les variations de pression, les résultats s'interprètent mieux en raisonnant, non pas sur la pression hydrodynamique  $\phi$ , mais sur la pression effective  $\pi$ , obtenue en ajoutant à  $\phi$  la pression magnétique

$$\begin{aligned}\pi &= \phi + \frac{H^2}{2} \\ d\pi &= -\varrho a^2 M^2 \frac{1-h^2}{M^2-1} \frac{dQ}{Q}\end{aligned}\quad (17)$$

d'où il résulte que les variations de  $\pi$  se font qualitativement ainsi que celles de la pression dans le cas classique. La discussion étant analogue, [1], nous n'indiquons que les résultats, [5].

Un écoulement stationnaire peut être:

- entièrement supersonique (resp. subsonique)
- supersonique — sonique — supersonique, ou subsonique-sonique-subsonique
- supersonique — sonique — subsonique (transonique décéléré)
- subsonique — sonique — supersonique (transonique accéléré)

## 2. Conducteur imparfait. Tuyère de section constante

Les variations de la vitesse en fonction de l'abscisse peuvent être étudiées sur l'expression tirée des équations (2):

$$\frac{du}{dx} = -\frac{\sigma H^2}{\phi} \frac{1}{M^2-1} \left(u - \frac{E}{H}\right) \left(u - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{E}{H}\right) \quad (18)$$

Alors que l'écoulement stationnaire d'un fluide non conducteur ( $\sigma = 0$ ) dans une tuyère de section constante est uniforme, on peut énoncer ici les résultats suivants: le débit  $\varrho u$  est constant, mais l'entropie est une fonction croissante de  $x$ , puisqu'en entretenant les champs appliqués  $E, H$  on fournit de l'énergie au fluide. L'écoulement peut avoir des points soniques, atteints pour des vitesses égales à  $E/H$  ou  $(\gamma-1)/\gamma (E/H)$ . Il résulte de la discussion effectuée par E. L. RESLER et W. R. SEARS [11] de ces écoulements, que les solutions stationnaires dépourvues de phénomènes de blocage sont:

- supersonique. Lorsque  $x \rightarrow +\infty$ ,  $u \rightarrow E/H$ , le nombre de MACH ayant une limite finie,
- subsonique. Lorsque  $x \rightarrow +\infty$ ,  $u \rightarrow (\gamma-1)/\gamma (E/H)$ , le nombre de MACH tendant vers zéro et la température vers l'infini,
- transonique accéléré, la vitesse au point sonique étant  $E/H$ ,
- transonique décéléré, la vitesse au point sonique étant  $(\gamma-1)/\gamma (E/H)$ .

### 3. Conducteur imparfait. Tuyère de section variable

On utilise la forme quasi-unidimensionnelle des équations de MAXWELL, les équations de l'écoulement étant alors données par [7]. Le système fournit d'abord trois intégrales premières

$$Q \varrho u = k = cte \quad E \sqrt{Q} = \eta = cte \quad \frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\varrho} + \frac{E H}{\varrho u} = cte \quad (19)$$

Il est commode d'introduire des variables non dimensionnelles rapportées à un état de référence du système noté par l'indice 1.

$$\xi = \frac{u}{u_1} \quad z = H \sqrt{Q} \frac{u_1}{\eta} \quad T = \frac{p}{\varrho \alpha u_1^2} \quad x^* = \sigma u_1 x$$

$$M = \frac{u}{a} = \frac{\xi}{\sqrt{\gamma \alpha T}} \quad (20)$$

Le système ne dépend plus que des deux paramètres non dimensionnels

$$\alpha = \frac{p_1}{\varrho_1 u_1^2} \quad \beta = \frac{\eta}{\sqrt{k} u_1^3} \quad (21)$$

et de la loi donnant la variation de la section,  $Q(x)$ . La suite de la discussion montrera que l'on a avantage à prendre pour état de référence l'état limite pour  $x \rightarrow +\infty$ , qui est nécessairement tel, ainsi qu'on le verra, que  $E_1 = u_1 H_1$ .

Les trois inconnues restantes  $\xi$ ,  $z$ ,  $T$  vérifient le système formé de deux équations différentielles en  $\xi$ ,  $z$ , et d'une équation finie donnant  $T(\xi, z)$ :

$$\frac{\xi'}{\xi} (\xi^2 - \gamma \alpha T) = \gamma \alpha T \frac{Q'}{Q} - \beta^2 (1 - \xi z) (\gamma - 1 - \gamma \xi z) \equiv A \quad (22)$$

$$z' = \xi z - 1 \quad (23)$$

$$\gamma \alpha (T - 1) + \frac{\gamma - 1}{2} (\xi^2 - 1) + (\gamma - 1) \beta^2 (z - 1) = 0 \quad (24)$$

L'accent indique la dérivation par rapport à  $x^*$ .

On discute de l'existence et de la nature des solutions en utilisant une représentation graphique dans le plan  $\xi, z$ . Un écoulement  $\xi(x)$ ,  $z(x)$ ,  $T(\xi, z)$  est représenté par une courbe  $\mathcal{E}$  de ce plan, paramétrée par  $x$ . Les courbes suivantes jouent un rôle important:

$$(T) \quad T(\xi, z) = 0 \quad (C_1) \quad \xi z - 1 = 0$$

$$(\mathcal{M}) \quad \xi^2 - \gamma \alpha T = 0 \quad (C_2) \quad \gamma \xi z - (\gamma - 1) = 0.$$

Les paraboles du faisceau  $(T)$ ,  $(\mathcal{M})$  sont les lignes à nombre de MACH  $M$  constant,  $(T)$ ,  $(\mathcal{M})$ ,  $Oz$  correspondant respectivement à  $M = \infty$ ,  $M = 1$ ,  $M = 0$ .

Une solution n'est acceptable que si elle remplit les conditions suivantes:

- $T, \xi, z$  sont positifs, ce qui entraîne par (24) que  $\xi, z$  sont bornés,
- $|x| \rightarrow \infty$  entraîne  $1 - \xi z \rightarrow 0$ ,
- les zéros de  $\xi^2 - \gamma \alpha T$  sont zéros de  $A$ .

Une courbe  $\mathcal{E}$  du plan  $\xi, z$  ne peut donc représenter un écoulement que si elle est un arc de courbe contenu dans la portion de plan délimitée par  $O\xi, Oz$ ,  $(T)$ , ayant ses extrémités sur  $(C_1)$ . De plus  $\mathcal{E}$  doit être décrit en entier lorsque  $x$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ , les extrémités étant atteintes pour  $x = \pm \infty$ , et les points d'intersection avec  $(\mathcal{M})$  vérifiant  $A = 0$ .

La solution dépendant des paramètres  $\alpha, \beta$  et d'une fonction  $Q(x)$  on conçoit qu'il existe un grand nombre de possibilités. On voit sur (22) que l'accélération est la somme d'un terme hydrodynamique (auquel elle se réduirait en l'absence

de champs,  $\beta = 0$ ) et d'un terme de nature électromagnétique. Suivant les cas, ces deux termes agissent ou non dans le même sens pour accélérer ou décélérer l'écoulement, les effets électromagnétiques pouvant renforcer les effets hydrodynamiques, ou bien les atténuer, ou même les détruire.

Les schémas de la Fig. 1 correspondent à des écoulements où les deux effets contribuent à accélérer l'écoulement dans la partie divergente.

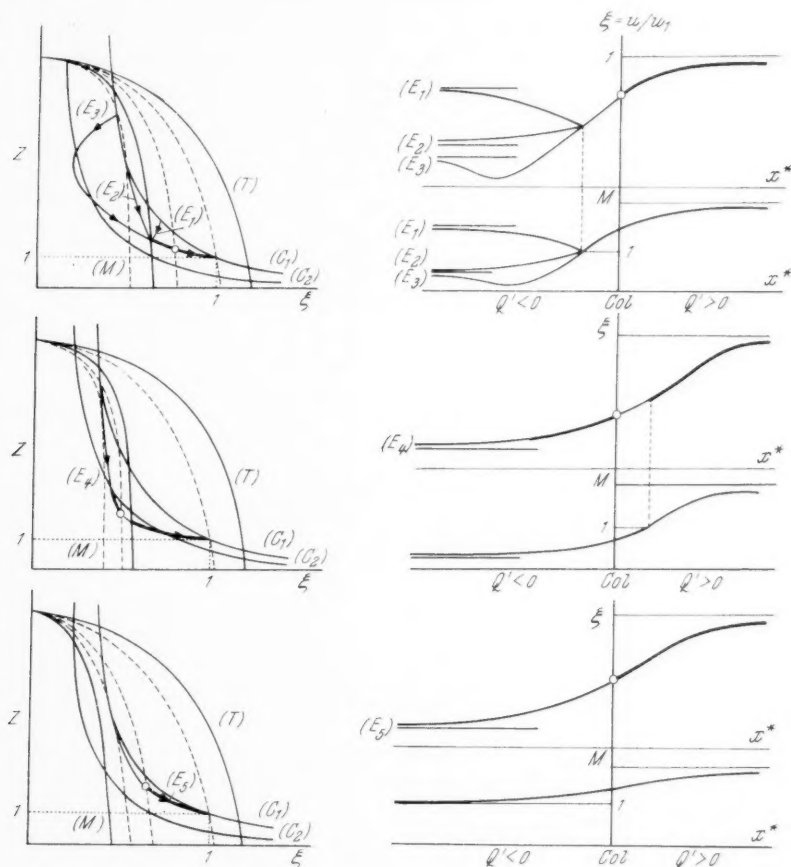


Fig. 1. Schémas de quelques types d'écoulements stationnaires et graphiques correspondants du plan  $(\xi, z)$ . ... Lignes à nombre de MACH constant

Les portions de courbes en traits gras correspondent aux régions de l'écoulement dans lesquelles les composantes hydrodynamique et électromagnétique de l'accélération agissent dans le même sens

Il est essentiel de remarquer qu'un point sonique est caractérisé par  $\xi^2 - \gamma \propto T = 0$ . D'après les conditions énoncées ci-dessus, la condition de possibilité n'est plus  $Q' = 0$  (point sonique au col), mais  $A = 0$ , ce qui en général ne se produit pas pour  $Q' = 0$ , à moins que le point d'intersection de  $(M)$  et  $(C_1)$  ou  $(C_2)$  ne soit tel que précisément  $Q' = 0$ . On voit donc que l'une des caractéristiques essentielles des écoulements mis en évidence est l'existence de points soniques en des points où la section droite n'est pas extremum.

### V. Stabilité des écoulements stationnaires quasi-unidimensionnels

Supposons que soit établi dans la tuyère un écoulement stationnaire de l'un des types précédemment mis en évidence. On se propose d'en étudier la stabilité relativement aux perturbations du second ordre.

On appelle perturbation du second ordre en un point  $x, t$ , une discontinuité des dérivées partielles premières des variables d'état  $u, p, \varrho$  de l'écoulement, les variables elles-mêmes étant continues au point considéré [2].

Il résulte des propriétés des surfaces caractéristiques rappelées au n° III qu'une telle discontinuité émise en un point et un instant choisis pour origines des  $x, t$ , se propage suivant les ondes progressive et régressive  $\mathcal{S}_\varepsilon$  ( $\varepsilon = \pm 1$ ), variétés caractéristiques de l'espace-temps, solutions de

$$dx = (u + \varepsilon a) dt$$

issues du point considéré. Rappelons que  $a$  est la vitesse effective du son,

$$a = \begin{cases} \sqrt{\frac{\gamma p}{\varrho}} & \text{si } \sigma \neq \infty, \\ \sqrt{\frac{\gamma p}{\varrho} + \frac{H^2}{\varrho}} & \text{si } \sigma = \infty. \end{cases}$$

#### 1. Rappels de propriétés. Méthode de R. E. Meyer

Soit  $D_\varepsilon$  la dérivée suivant  $\mathcal{S}_\varepsilon$

$$D_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial t} + (u + \varepsilon a) \frac{\partial}{\partial x}. \quad (25)$$

$\mathcal{S}_\varepsilon$  divise l'espace-temps en deux domaines 1-2, l'écoulement étant stationnaire (non perturbé) dans 1, et non stationnaire (perturbé) dans 2. A l'intérieur de chaque domaine, les variables de l'écoulement sont continues, ainsi que leurs dérivées partielles premières, et vérifient les équations du mouvement; les variables sont continues à travers  $\mathcal{S}_\varepsilon$ . Si  $\varphi$  est une variable dépendante, en général

$$[\varphi]_\varepsilon = 0 \quad \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]_\varepsilon \neq 0 \quad \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_\varepsilon \neq 0 \quad (26)$$

$[\varphi]_\varepsilon$  désignant le saut de  $\varphi$  à travers  $\mathcal{S}_\varepsilon$ , soit  $\varphi_2 - \varphi_1$ .

On démontre [2] que le saut de la dérivée suivant  $\mathcal{S}_\varepsilon$  à travers  $\mathcal{S}_\varepsilon$  est nul

$$[D_+ \varphi]_+ = 0, \quad [D_- \varphi]_- = 0 \quad (27)$$

Il s'en déduit que les dérivées premières de  $\varphi$  sont continues si l'une d'entre elles l'est, car

$$\left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{-\varepsilon} = -\frac{1}{2a} [D_\varepsilon \varphi]_{-\varepsilon}, \quad \left[ \frac{D\varphi}{Dt} \right]_{-\varepsilon} = \frac{1}{2} [D_\varepsilon \varphi]_{-\varepsilon} \quad (28)$$

R. E. MEYER a montré pour un écoulement quasi-unidimensionnel non conducteur d'électricité, que les sauts des dérivées premières, et en particulier de l'accélération et du gradient de pression sur les fronts d'onde progressive et régressive s'expriment en fonction respectivement des sauts des dérivées  $D_-$  et  $D_+$  de deux nouvelles variables dépendantes, les variables de RIEMANN [4].

Nous exposerons rapidement la méthode lorsque  $\sigma = 0$ , et indiquerons la généralisation aux cas qui nous intéressent.

Lorsque  $\sigma = 0$ , le système d'équations du mouvement vérifié par  $\varrho, u, p$  (ou  $S = p \varrho^{-\gamma}$ ) est

$$\varrho_t + u \varrho_x + \varrho u_x = -\varrho u \frac{\varrho_x}{\varrho}$$

$$u_t + u u_x + \frac{1}{\varrho} p_x = 0 \quad (29)$$

$$\frac{DS}{Dt} = 0$$

Les variables de RIEMANN  $r_\varepsilon$  sont définies par

$$2 r_\varepsilon = u + 2 \varepsilon \frac{a}{\gamma - 1} \quad (\varepsilon = \pm 1). \quad (30)$$

L'entropie étant constante dans la région non perturbée, il résulte de (28) qu'elle la demeure dans la région perturbée.  $a^2 = \gamma S \varrho^{\gamma-1}$  est donc fonction de  $\varrho$  seul et

$$2 dr_\varepsilon = du + \varepsilon \frac{a}{\varrho} d\varrho \quad (31)$$

Le système des deux premières équations de (29) est équivalent au système

$$D_\varepsilon r_\varepsilon = \varepsilon B \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

$$B = -a u \frac{Q_x}{Q}. \quad (32)$$

$B$  étant continu sur  $\mathcal{S}_\varepsilon$ , il résulte de (32) que les dérivées partielles premières de  $r_+$  et  $r_-$  sont respectivement continues sur  $\mathcal{S}_-$  et  $\mathcal{S}_+$ . Les discontinuités à travers  $\mathcal{S}_+$ ,  $\mathcal{S}_-$  s'expriment donc uniquement en fonction de  $1/z_+ = [D_- r_+]_+$  et de  $1/z_- = [D_+ r_-]_-$  respectivement. On a en particulier pour le saut d'accélération:

$$\left[ \frac{Du}{Dt} \right]_+ = \frac{1}{2} \frac{1}{z_+}, \quad \left[ \frac{Du}{Dt} \right]_- = \frac{1}{2} \frac{1}{z_-}.$$

Une transformation de (32) montre que  $z_\varepsilon$  vérifie l'équation linéaire du premier ordre

$$D_\varepsilon z_\varepsilon + G_\varepsilon z_\varepsilon + K_\varepsilon = 0$$

où  $G_\varepsilon$  et  $K_\varepsilon$  sont fonction des valeurs non perturbées des variables et de leurs dérivées premières.

La résolution de cette équation donne la variation de  $z_\varepsilon$  au cours du temps, c'est-à-dire du saut d'accélération sur les deux ondes de propagation, pour un écoulement non perturbé et une discontinuité initiale donnés.

### 2. Définition de la stabilité pour les perturbations du second ordre

L'écoulement est stable si  $[Du/Dt]_\varepsilon$  ( $\varepsilon = \pm 1$ ) demeure fini et tend vers zéro lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

Du point de vue physique, on considère donc comme instable, soit un écoulement où prend naissance un choc (l'amplitude de  $[Du/Dt]_\varepsilon$  devient infinie au bout d'un temps fini), soit un écoulement tel que l'écoulement initial n'est pas rétabli au bout d'un temps suffisamment long.

On est donc ramené à étudier les zéros de  $z_\varepsilon$  et son comportement asymptotique.

### 3. Généralisation de la méthode de R. E. Meyer

Supposons établi un écoulement stationnaire vérifiant l'un des systèmes (27), (28), (29), et supposons encore qu'à l'instant initial se produise une discontinuité des dérivées premières des inconnues,  $u, S, \varrho, E, H$  demeurant continues. La propriété (28) montre sur les dernières équations des systèmes

(27)–(29) que les dérivées premières de  $K = H/Q$ ,  $S$ , d'une part, et de  $H$ ,  $E$ ,  $S$  d'autre part, sont continues (pour (28) le problème ne se pose pas puisque  $E$ ,  $H$  sont considérées comme donnés). Dans tous les cas, les seules quantités à dérivées discontinues sont  $u$ ,  $\varrho$ .

La généralisation de la méthode consiste à les remplacer par deux variables dépendantes, variables de RIEMANN généralisées, telles que chacune d'entre elles soit à dérivées continues sur l'un des deux fronts d'onde. Le problème est différent suivant que  $\sigma$  est fini ou non.

#### 4. Conducteur parfait

Lorsque  $\sigma = \infty$ , on définit les variables de RIEMANN généralisées par [4],

$$2r_\varepsilon = u + \varepsilon \int_0^\varrho \frac{a}{\varrho} d\varrho \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

$$a = \left( \gamma \frac{p}{\varrho} + \frac{H^2}{\varrho} \right)^{1/2} = (\gamma S \varrho^{\gamma-1} + K^2 Q^2 \varrho)^{1/2}, \quad K = \frac{H}{Q}, \quad (33)$$

$a$  étant fonction de  $\varrho$ ,  $Q$ , puisqu'on a vu que  $S$ ,  $K$  étant constants dans l'état non perturbé, le demeurent.  $z_\varepsilon = \{[D_{-\varepsilon} r_\varepsilon]_\varepsilon\}^{-1}$  est alors solution de

$$D_\varepsilon z_\varepsilon + G_\varepsilon z_\varepsilon + K_\varepsilon = 0 \quad (34)$$

avec

$$G_\varepsilon = \frac{a}{2M} (3M - \varepsilon) \frac{dM}{dx} - \varepsilon a h^2 \frac{Q_x}{Q} \quad (35)$$

$$K_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{4a} (\gamma + 1 + (2 - \gamma) h^2) \quad (36)$$

$$h^2 = \frac{H^2}{\varrho a^2}, \quad M = \frac{u}{a}. \quad (37)$$

les grandeurs  $u$ ,  $a$ , ... se rapportent à l'état non perturbé stationnaire et sont donc connues pour tout  $x$ .

Pour  $h = 0$ , on obtient l'équation de R. E. MEYER relative à un fluide non conducteur [4].

#### 5. Conducteur imparfait

Lorsque  $\sigma$  est fini, non nul, on conserve formellement la définition (30) des variables de RIEMANN

$$2r_\varepsilon = u + 2\varepsilon \frac{a}{\gamma - 1} \quad (38)$$

mais on doit remarquer que  $S$  n'étant plus constant, la relation (31) doit être remplacée par

$$2dr_\varepsilon = du + \varepsilon \frac{a}{\varrho} d\varrho + \varepsilon \frac{a}{\gamma - 1} \frac{dS}{S}. \quad (39)$$

Un calcul assez long, mais ne présentant aucune difficulté théorique montre alors que  $z_\varepsilon = \{[D_{-\varepsilon} r_\varepsilon]_\varepsilon\}^{-1}$  vérifie l'équation

$$D_\varepsilon z_\varepsilon + G_\varepsilon z_\varepsilon + K_\varepsilon = 0 \quad (40)$$

avec maintenant

$$G_\varepsilon = -\frac{\sigma H^2}{2\varrho} - \frac{Q_x}{Q} \frac{a}{4} \frac{(3M - \varepsilon)((\gamma - 1)M^2 + 2)}{M^2 - 1} - \varepsilon \frac{\sigma H}{4\varrho a^2} \frac{E - uH}{M^2 - 1} C_\varepsilon +$$

$$\sigma \frac{1}{4\varrho a^5 M (M^2 - 1)} F_\varepsilon \quad (41)$$

$$K_\varepsilon = \varepsilon \frac{\gamma + 1}{4a} \quad (42)$$

$$C_\varepsilon = 2(2\gamma - 1)u^2 + 2\varepsilon(\gamma + 1)au - (5\gamma - 1)a^2 \quad (43)$$

$$F_\varepsilon = (\gamma - 1)[\gamma u^3 - \varepsilon\gamma a u^2 + (2\gamma + 3)a^2 u - \varepsilon a^3] \quad (44)$$

Ce système d'équations s'applique indifféremment à l'étude de la stabilité des écoulements vérifiant le système (8) (avec champs imposés) au (9), puisque dans l'un et l'autre cas  $E$ ,  $H$  sont, ainsi que leurs dérivées premières, continus à travers  $\mathcal{S}_\varepsilon$ . Les coefficients  $G_\varepsilon$ ,  $K_\varepsilon$  sont calculés en fonction des variables de l'état stationnaire non perturbé,  $E$ ,  $H$  étant suivant le cas, donnés (8) ou solutions des équations stationnaires au même titre que  $u$ ,  $\varrho$ ,  $S$  (9), [6], [7].

## VI. Discussion

Dans tous les cas l'évolution de  $z_\varepsilon$  suivant les fronts d'ondes progressives ou régressives est donnée par la solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre,  $x$ ,  $t$  étant liés par la relation

$$dx = (u + \varepsilon a) dt$$

( $\varepsilon = +1$  sur l'onde progressive,  $\varepsilon = -1$  sur l'onde régressive) solution égale à  $z_0$  en  $t = x = 0$ :

$$z_\varepsilon = \frac{1}{L_\varepsilon} \left[ z_0 - \int_0^t K_\varepsilon L_\varepsilon dt \right]$$

$$L_\varepsilon = \exp \int_0^t G_\varepsilon dt \quad (45)$$

$z_0$  est fonction de la discontinuité initiale d'accélération

$$\frac{1}{z_0} = 2 \left[ \frac{Du}{Dt} \right]_{t=x=0}$$

ou en terme de la discontinuité initiale du gradient de pression

$$\frac{1}{z_0} = - \frac{a^2}{\gamma p} \left[ \frac{\partial p}{\partial x} \right]_{t=x=0}$$

Une onde progressive se déplace toujours de l'amont vers l'aval, tandis qu'une onde régressive se déplace dans un sens ou dans l'autre suivant que l'écoulement est supersonique ou subsonique. Sa vitesse de propagation étant  $u - a$ , elle tend asymptotiquement vers un point sonique.

Il en résulte que l'onde progressive issue d'une perturbation produite à l'amont traverse toute la tuyère, quelle que soit la nature de l'écoulement. Il en est de même pour l'onde régressive issue d'une perturbation produite à l'amont (resp. à l'aval) d'un écoulement partout supersonique (resp. subsonique). Par contre, s'il existe un point sonique, il existera toujours au moins une onde régressive tendant asymptotiquement vers lui, à moins que l'écoulement ne soit subsonique-sonique-supersonique (transonique accéléré).

On doit donc étudier:

- les zéros de  $z_\varepsilon$  susceptibles de se produire en  $t$  fini;
- le comportement asymptotique de  $z_\varepsilon$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ ;
- le comportement asymptotique de  $z_\varepsilon$  sur une onde régressive tendant asymptotiquement vers le point sonique, lorsque cela se produit.



Dans tous les cas ( $\sigma$  fini ou non), et en l'absence de point sonique,  $L_\epsilon$  est une fonction positive bornée de  $t$  et  $I_\epsilon = \int_0^t K_\epsilon L_\epsilon dt$  est une fonction croissante en valeur absolue, et de signe constant (celui de  $\epsilon$ ). Il s'en suit que  $z_\epsilon$  ne s'annule pas si  $|I_\epsilon|$  est borné supérieurement et si  $|z_0|$  est supérieur à  $\limsup_{t \rightarrow \infty} |I_\epsilon| = \lim_{t \rightarrow \infty} |I_\epsilon|$ .

L'étude des zéros de  $z_\epsilon$  est donc ramenée à celle du comportement asymptotique de  $I_\epsilon$ . La discussion est assez compliquée, aussi indiquerons-nous les résultats sans entrer dans les détails. Ils s'expriment sous forme de conditions asymptotiques imposées au profil de la tuyère, c'est-à-dire à  $Q(x)$ , tout au moins dans le cas de fluides non conducteurs ou conducteurs parfaits.

L'amplitude du saut d'accélération sur les fronts d'ondes demeure finie et tend vers zéro si

$\sigma = 0$ (Résultats de R. E. MEYER [4])	$\sigma = \infty$
$Q(x) x^{-4(\gamma-1)} \rightarrow \infty$ à l'aval	$Q(x) x^{-2/3} \rightarrow \infty$ à l'aval
$Q(x)  x ^{-2} \rightarrow \infty$ à l'amont	$Q(x)  x ^{-6/(19-8\gamma)} \rightarrow \infty$ à l'amont

Lorsque le fluide est conducteur imparfait ( $\sigma$  fini, non nul) l'amplitude du saut d'accélération demeure finie et tend vers zéro, quelque soit le profil de la tuyère. (En effet on montre dans ce cas que  $\lim_{t \rightarrow \infty} G_\epsilon = -\sigma(H^2/2\rho)$ , qui n'est pas nul si  $\sigma \neq 0$ .  $L_\epsilon$  tend donc vers  $\exp[-(\sigma H^2/2\rho)t]$  et  $K_\epsilon$  étant borné,  $|I_\epsilon|$  est certainement borné.)

Si l'on compare les conditions à imposer à  $Q(x)$  dans les cas non conducteurs et conducteurs parfaits, on voit qu'elles sont plus fortes dans le premier cas que dans le second. Comme d'autre part aucune condition n'est imposée à  $Q(x)$  dans le cas conducteur imparfait, on peut en conclure que la prise en considération des phénomènes électromagnétiques accroît la stabilité, tout au moins lorsqu'il n'existe pas de point sonique vers lequel puisse tendre des ondes régressives.

Plaçons-nous maintenant précisément dans ce cas. Lorsque  $t \rightarrow \infty$ , sur l'onde régressive  $u \rightarrow a$ , et tandis que le front d'onde tend asymptotiquement vers le point sonique,  $z$  tend vers  $-K_-/G_-$ ; le saut d'accélération tend donc vers  $-G_-/2K_-$ . Que le fluide soit non conducteur, imparfaitement conducteur, ou conducteur parfait, on démontre que la limite de cette quantité n'est pas nulle. Si le fluide est non conducteur, ou parfaitement conducteur, on peut même montrer que le gradient de pression sur l'onde régressive tend vers l'opposé de sa valeur non perturbée.

L'écoulement transonique décéléré (supersonique — sonique — subsonique), tel que toute onde régressive issue d'une perturbation produite à l'amont et à l'aval tend asymptotiquement vers le point sonique, est donc instable pour les perturbations du second ordre, quelle que soit la valeur de la conductivité électrique — un phénomène de blocage se produisant toujours au point sonique.

### Références

1. R. COURANT et K. O. FRIEDRICH, *Supersonic Flow and Shock Waves*. New York 1948.
2. J. M. BURGERS, Penetration of a Shock Wave into a Magnetic Field. *Magneto hydrodynamics*, edited by R. K. LANDSHOFF, p. 36—56. Stanford, California: Stanford University Press, 1954.

3. J. HADAMARD, Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique, Chap. 2. Chelsea Publishing Company, 1949.
4. R. E. MEYER, Quart. J. Mech. Appl. Math. **5**, Pt. 3 (1952).
- 5-7. J. NAZE, C. R. Acad. Sci. Paris **246**, n° 24, 333-335 (1958); **248**, n° 3, 362-365 (1959); **248**, n° 4, 525-528 (1959).
8. S. I. PAI, On Exact Solutions of One Dimensional Flow Equations of Magneto-Gasdynamics. Technical Note BN82, Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, University of Maryland, September 1956.
9. S. I. PAI, One Dimensional Unsteady Flow of Magneto-Gasdynamics. Technical Note BN86, Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, University of Maryland, November 1956.
10. E. L. RESLER et W. R. SEARS, J. Aero. Sci. **25**, 235-245 (1958).
11. E. L. RESLER et W. R. SEARS, Z. angew. Math. Phys. **9** b, 509-518 (1958).\*

# Prospects for Advanced Nuclear Systems<sup>1</sup>

By

R. V. Meghreblian<sup>2</sup>

(With 4 Figures)

(Received March 14, 1961)

## Abstract — Zusammenfassung — Résumé

**Prospects for Advanced Nuclear Systems.** The ultimate performance potential of nuclear fission reactors as power sources for the direct heating of a propellant in a rocket engine is examined with the aid of a nontemperature limited reactor concept and a generalized engine model which includes a radiator. In practical terms this means that some fissionable material is retained within the reactor in gas phase, and the incorporation of a radiator allows greater freedom in dispensing unsuitable forms of energy attenuated in the solid members of the engine.

With this point of view it is found that the fission reactor cannot produce limitless specific impulse if regenerative cooling by the propellant is the only mechanism for cooling the engine solids. The maximum available is about three times that possible with all solid-fuel reactors. The addition of a radiator, however, relaxes this limit, but in these systems the thrust-to-weight ratio of the engine becomes less than unity.

Application of this general model is made to both high acceleration (ground takeoff) and low acceleration (interplanetary) vehicles. The high acceleration systems are shown to yield substantial gains in payload fraction over other propulsion systems. In the low acceleration case, the ultimate fission reactor offers some reduction in trip time to the near planets; but, for the more distant planets, the nuclear-electric systems appear to be superior, unless the thermal radiation flux from the gaseous cavities is found to be smaller than anticipated.

**Über die Aussichten der Anwendung fortgeschrittener atomarer Antriebssysteme für die Raumfahrt.** Mit Hilfe eines hinsichtlich der Temperatur nicht begrenzten Reaktor-Konzepts wird die optimale Leistung eines Kernreaktors für die direkte Erhitzung von Treibmaterie in der „Brennkammer“ einer Rakete untersucht. Dies bedeutet praktisch, daß gasförmiges Spaltmaterial innerhalb des Kernreaktors zurückbehalten wird. Weiters bietet die Einbeziehung eines Kühlers mehr Möglichkeiten, unerwünschte Energieformen, die sich an den festen Teilen der Rakete festsetzen, abzuführen.

Von diesem Standpunkt aus betrachtet ergibt sich, daß ein Kernreaktor nicht in der Lage ist, unbegrenzt spezifischen Impuls zu liefern, solange zur Kühlung der festen Raketenteile nur regenerative Treibstoffkühlung verwendet wird. Das mögliche Maximum liegt etwa dreimal so hoch wie dasjenige aller Reaktoren mit festem Brennmaterial. Durch die zusätzliche Verwendung eines Kühlers wird diese Beschränkung etwas gemildert, jedoch wird das Verhältnis von Antrieb zu Gewicht bei solchen Kernraketen-Motoren kleiner als Eins.

<sup>1</sup> Dedicated to Professor THEODORE VON KÁRMÁN on the occasion of his 80th birthday.

<sup>2</sup> Chief, Physical Sciences Division, Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, 4800 Oak Grove Drive, Pasadena, California, U.S.A.

Eine Anwendung ist sowohl für Kernraketen-Fahrzeuge hoher Beschleunigung (Start von der Erdoberfläche), wie auch für solche kleiner Beschleunigung (interplanetarischer Verkehr) vorteilhaft. Es wird gezeigt, daß Kernraketen hoher Beschleunigung einen bedeutenden Gewinn an Nutzlast gegenüber anderen Antriebssystemen aufweisen. Im Falle kleiner Beschleunigungen bietet der optimale Kernreaktor eine Verkürzung der Reisezeit zu den nächstliegenden Planeten; jedoch scheint für die weiter entfernten Planeten die nukleare Ionenrakete überlegen zu sein, es sei denn, daß die Temperaturstrahlung gasgefüllter Brennkammern kleiner sein wird als erwartet.

**Applicabilité des réacteurs nucléaires à la propulsion spatiale.** Une analyse des performances limites de réacteurs à fission, comme sources d'échauffement d'un fluide propulsif, est basée sur le concept d'un réacteur non limité par la température et d'un modèle de moteur généralisé par inclusion d'un échangeur de chaleur. Ceci signifie en pratique qu'une partie du matériau fissile est maintenue dans le réacteur en phase gazeuse, tandis que l'échangeur facilite l'évacuation des calories dans les parties solides du moteur.

Il s'avère que le réacteur par fission est limité en impulsion spécifique, si le mécanisme de refroidissement consiste uniquement en une circulation régénératrice des fluides propulsifs. On obtient au maximum trois fois l'impulsion spécifique des réacteurs à combustible solide. L'addition de l'échangeur recule cette limite aux dépens du rapport poussée-poids, qui devient inférieur à l'unité.

L'application au cas des accélérations élevées, telles que requises au décollage, conduit à des gains substantiels de charge utile comparativement aux autres systèmes propulsifs. Dans le cas des faibles accélérations, suffisantes pour les véhicules interplanétaires, le réacteur à fission, poussé à la limite, réduit quelque peu la durée d'un trajet aux planètes proches. Pour les planètes plus éloignées, les dispositifs électro-nucléaires semblent supérieurs, à moins que le rayonnement thermique issu des cavités gazeuses ne soit plus faible qu'anticipé.

## I. Introduction

The purpose of this paper is to examine the ultimate performance potential of nuclear fission reactors as power sources for the direct heating and acceleration of a propellant by means of a rocket nozzle. Specifically, we will discuss the features of an "ultimate nuclear rocket" in terms of the unique properties of the fission process, relate these to various vehicle missions, and finally, suggest the prospects for the engineering realization of such systems.

The subject of this paper will not include "conventional" nuclear systems, which for the present purposes are defined as any reactor concept which incorporates nuclear fuel bearing material in either solid or liquid phase. Thus we will exclude advanced reactors of the solid fuel heat-exchanger type, molten fuel reactors, and dust fueled reactors. All these systems are in a real sense temperature-limited, either by the melting or vaporization point of the solid, or by the boiling point of the liquid.

The reactor systems to be considered are postulated to include some region of the nuclear fuel bearing medium which in a complete sense is *non-temperature limited*. In practical terms, this means that some portion of the nuclear fuel is in gas phase; thus, as in chemical engines, it becomes possible to maintain this portion of the fuel medium at temperatures significantly greater than that tolerable in either a liquid or solid state. This implies, of course, that the solid retaining boundaries of this gaseous medium are cooled by some suitable process, again as in conventional rocket engines.

The approach outlined here is sufficiently general to encompass the various gaseous fuel reactor concepts suggested to date. These include the vortex containment technique [1] (which requires intimate mixing of the fissionable species and the propellant) and the plasma core [2] and coaxial flow [3] reactor concepts, both of which postulate the physical separation of the fuel and propellant. In the vortex technique the heat transfer is achieved by the direct slowing down of the nuclear fission fragments in the propellant gas, whereas in the last two methods mentioned, the fission fragments slow down in the fuel region which then transfers its energy to the propellant principally by thermal radiation. The specific ideas and results to be discussed, however, apply directly to methods which incorporate intimate mixing in gas phase of the fuel and propellant. Although, as already suggested, the other two methods may also be treated by the present approach, these require a reformulation of the problem in terms of the specific physical features of the system, in particular the radiative characteristics of the fissioning plasma medium. In this sense, the present analysis is not complete, but the general results are in gross terms applicable to the radiative heat transfer systems as well. Certainly, the incentives and overall conclusions to be drawn from the present study are generally valid to all such gas-phase fission reactors.

Finally, it should be mentioned, that for purely analytical reasons, the reactor and engine complex utilized in this work are highly idealized models. It is to be expected, therefore, that the numerical results will be optimistic, and in some cases unrealistic. These results will define, however, the upper bounds for any practical system and thereby serve as a measure of excellence for future development.

## II. Generalized Nuclear Rocket Engine

In order to provide the most general description of a nuclear rocket engine we combine the non-temperature-limited reactor concept with an engine complex that includes a heat rejection device, here conveniently taken to be a space radiator. Fig. 1 shows a schematic of the proposed engine. The configuration shown is but one of many possible arrangements. The choice of a particular scheme is not essential to the overall argument; however the choice of components is, and these will determine some of the general engine characteristics. Consider the reactor. The figure shows the temperature-limited fuel zone in a central location (here represented by a radial array of solid fuel plates) and the non-temperature-limited zone in a surrounding annular region. Beyond the latter, and at each end, is a neutron reflector. The non-temperature-limited fuel bearing regions are represented by a matrix of cylindrical cavities containing gaseous fuel imbedded in a moderator matrix. As already noted, this definition of a gaseous system is most appropriate to the vortex containment method; it may also be applicable, however, to the plasma core or coaxial flow reactor concepts.

The radiator and closed-loop coolant circuit disposes of unsuitable or unavailable forms of energy released in the engine complex such as fission power from the solid (temperature-limited) fuel bearing medium, nuclear radiation, and thermal radiation. Some of this power may be removed also by regenerative cooling by the propellant. In the scheme shown, the propellant is heated from the storage condition (at say enthalpy per unit mass  $h_0 = 0$ ) to the value  $h_s$  corresponding to the maximum allowable temperature  $T_s$  in the solid regions

of the reactor; it is then passed into the cavities where it is further heated, by intimate mixing with the gaseous fuel, to enthalpy  $h_c$  (or temperature  $T_c$ ) and finally expanded through a rocket nozzle.

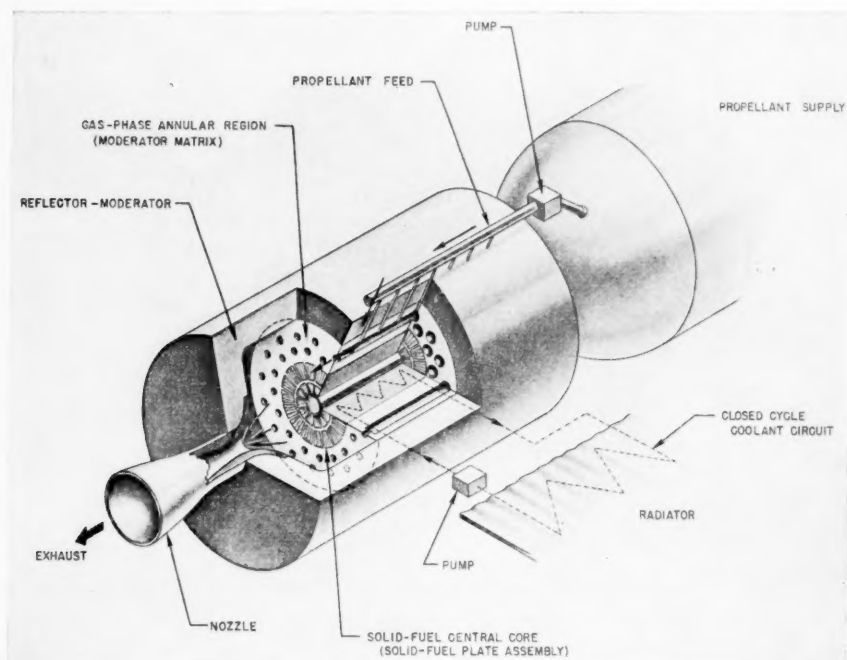


Fig. 1. Conceptual arrangement of nuclear rocket engine with non-temperature-limited fuel-bearing region and radiator system

The performance potential of this system may be obtained in terms of the specific impulse  $I_c$ , corresponding to the enthalpy  $h_c$ , from an analysis of the power balance in the engine [4]. If it is assumed for simplicity that the propellant at the stagnation enthalpy  $h_c$  is completely expanded in a DE LAVAL nozzle, then  $I_c = \sqrt{2 h_c/g}$ . The power balance for the generalized system which includes a radiator then yields

$$\left(\frac{I_c}{I_s}\right)^2 = \frac{1 + \gamma(1-f)(1-\zeta) - \beta \left[ \left(\frac{I_c}{I_s}\right)^8 - 1 \right]}{f + \zeta(1-f)} \quad (1)$$

where  $I_s$  corresponds to  $h_s$ ,  $\zeta$  denotes the fraction of the fission energy which appears as nuclear radiation (and penetrates the gas in the cavities and is attenuated only by the surrounding solids),  $f$  is the fraction of the total fission power produced in the solid fuel regions, and

$$\beta \equiv \frac{\sigma \epsilon_c A_c T_s^4}{\dot{m} h_s} \quad \gamma \equiv \frac{P_r}{\dot{m} h_s} \quad (2)$$

The symbol  $P_r$  denotes the power rejected by the radiator,  $\dot{m}$  is the mass flow rate of the propellant,  $\sigma$  is the STEFAN-BOLTZMANN constant, and  $\epsilon_c$  the emissivity and  $A_c$  the surface area, of the gas mixture in the cavities.

Fig. 2 shows the specific impulse ratio  $I \equiv I_c/I_s$  as a function of the thermal radiation parameter  $\beta$  for various values of the solid fission fraction  $f$ . These results are for system without radiator ( $\gamma = 0$ ), and as will be discussed shortly,

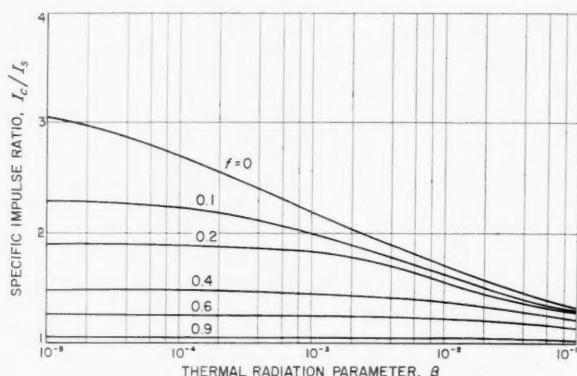


Fig. 2. Specific impulse ratio as function of thermal radiation parameter for system without radiator

applicable to the high-acceleration (or ground takeoff missions). Two trends are of significance: first, there is a maximum value of the specific impulse ratio for each value of the solid fission fraction  $f$ , the largest of which  $I = 3.13$ , occurs

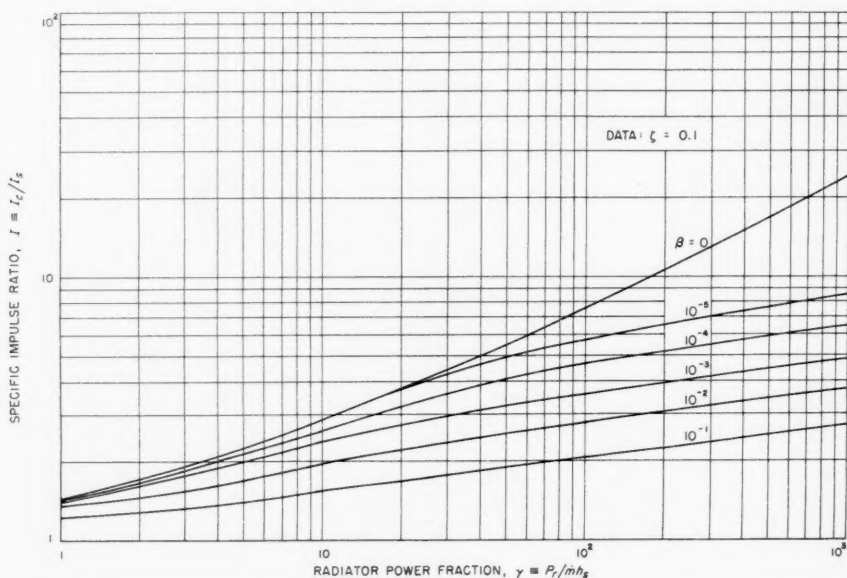


Fig. 3. Specific impulse ratio as function of radiator power fraction for  $f = 0.6$

for  $f = 0$ ; second, increasing values of  $\beta$  compromise the rocket performance. The upper bound on  $I$  arises because of the quantity  $\zeta$  (here taken as 0.1). The explanation is given in terms of the power balance. Since the present systems are



regeneratively cooled, the enthalpy  $h_s$  gained by the propellant in cooling the solid regions must be exactly the fraction  $\zeta$  of the total enthalpy  $h_c$  it gains in passing through the reactor. Thus,  $h_c/h_s = I^2 = 1/\zeta$ . In the case of hydrogen propellant and a maximum reactor solids temperature  $T_s = 2000^\circ \text{K}$ , this limit yields  $I_c = 2210 \text{ sec}$ . When  $f > 0$ , the effect on the system is to increase the effective value of  $\zeta$ ; the same effect arises also from the thermal radiation produced by the gases in the cavities. Thus we find that even with the aid of a non-temperature-limited reactor concept, the fission process does not yield unlimited performance potential in systems entirely regeneratively cooled.

When a radiator is added, however, the upper bound on  $I_c/I_s$  is removed, and arbitrarily larger values can be obtained by simply rejecting a greater fraction of the heat attenuated by the solid. Fig. 3 shows the specific impulse ratio for the case  $f = 0.6$  (which is appropriate for the low acceleration mission) as a function of the radiator power fraction  $\gamma$ . These results indicate for example, that if the radiator removes all but one part in a thousand of the heat deposited in the solid, then, specific impulse ratios as high as 10 are possible.

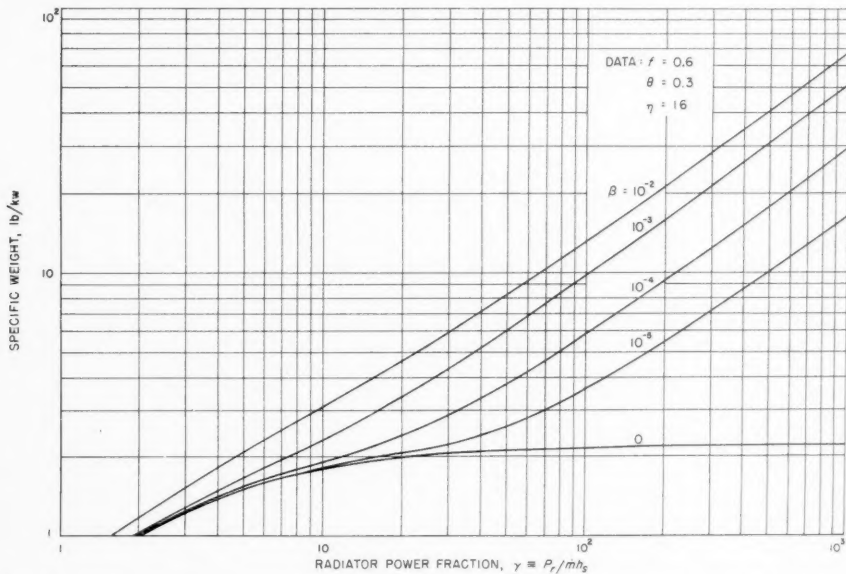


Fig. 4. Engine (reactor plus radiator) specific weight as function of radiator power fraction

From a practical point of view, however, such large values are not attractive. The reason is that increasing radiator capacity brings with it an increasing penalty in radiator weight. Consequently, the higher specific impulse systems are characterized by engine thrust-to-weight ratios substantially less than unity; thus application is limited to low-acceleration (interplanetary) missions. The general expression for the engine thrust-to-weight ratio  $a_e$  may be written

$$a_e = \frac{I}{\gamma \eta + \frac{1}{\theta} (1 + \gamma)} \quad (3)$$

where

$$\theta \equiv \frac{2 p_s}{w_s c_s} \quad \text{and} \quad \eta \equiv \frac{\delta c_s}{2 \sigma \epsilon_r T_r^4} \quad (4)$$

and  $p_s$  is the power density in the solid regions of the reactor,  $w_s$ , the weight per unit volume of reactor material,  $c_s = I_s g$ ,  $\delta$  is the radiator weight per unit area, and  $(\epsilon, T)_r$  refers to the radiator properties. The first term in the denominator of Eq. (3) is due to the radiator, and the second is due to the reactor. In the case of the system with radiator, a more widely used parameter is the specific weight  $\alpha_*$ , here defined as the ratio of reactor plus radiator weight to the power imparted to the exhaust. Fig. 4 shows  $\alpha_*$  as a function of the radiator power fraction. The values noted on the figure correspond to  $I_s = 700$  sec,  $p_s = 30$  w/cm<sup>3</sup>,  $w_s = 3$  gm/cm<sup>3</sup>,  $\delta = 5$  lb/f<sup>2</sup>,  $\epsilon_r = 0.9$  and  $T_r = 1000^\circ$  K. It is seen that for values of  $\gamma < 200$  the specific weights are entirely comparable to nuclear electric systems. For  $\gamma < 60$ , they are far superior.

When the radiator is omitted from the engine the resulting system, although limited in maximum obtainable specific impulse, is capable of rather large thrusts. For these systems the engine thrust-to-weight ratio is given by:  $a_e = \theta I$ . It should be noted that the parameter  $\theta$  may be interpreted as the thrust-to-weight ratio of an all temperature-limited (i.e., solid fuel) reactor operating at maximum temperature  $T_s$ . With the constants given above and a power density of 2 kw/cm<sup>3</sup>,  $\theta = 20$ . Thus at the maximum value of the specific impulse ratio,  $a_e \simeq 60$ .

### III. Nuclear Characteristics

The nuclear characteristics of the reactor may be determined directly from the selected engine parameters, such as  $f, \beta, \gamma$  and  $\theta$ , once the mission has been selected. In general, the specification of the mission is stated in terms of a velocity increment and a payload to be delivered. A detailed trajectory analysis then establishes the propellant and payload fractions, and from this information, one can determine the reactor thrust, power and size.

The reactor size and power in turn determine the average nuclear fuel concentration, critical mass, and average thermal neutron flux. For the purposes of this analysis a simplified nuclear model was considered adequate. Calculations were performed for a bare, homogeneous reactor using the FERMI age theory [5]. A uniform correction was introduced, however, to account for the presence of the cavities which contain the gaseous fuel. Detailed nuclear computations require a selection of the void fraction  $x$  and information on the distribution of the fissionable material between the gas and solid phases. This latter is implied in the solid fission fraction  $f$ .

Some typical results for the nuclear characteristics are given in connection with vehicle performance data.

### IV. Application to High Acceleration Systems

In the case of the high acceleration missions, performance calculations were made for simple "burnout velocities" of single-staged vehicles traversing drag-free vertical trajectories in a constant gravitational field. Given the velocity increment to be attained and the specific impulse available, the payload fraction  $\pi_{pl}$  is determined. For the present systems, this may be expressed

$$\pi_{pl} \equiv \frac{W_{pl}}{W_0} = 1 - \lambda(1 + s) - \frac{a_0}{a_e} \quad (5)$$

Table 1. *Vehicle and Engine Characteristics for Placing 300,000 Payload in 300 Mile Earth Satellite Orbit*

System	$I_c$	$W_0$	$\pi_{pl}$	$W_n$	$P$	$l$	$N_{FC}$	$\phi_c$	$M_F$
Fraction of Fuel in Gas Phase	Specific Impulse (sec)	Vehicle Gross Weight (lb)	Payload Fraction	Reactor Weight (lb)	Reactor Power (Mw)	Reactor Diameter (ft)	Fuel Concentration in Gas Phase (nuclei/cm <sup>3</sup> )	Thermal Flux in Cavity (neut/cm <sup>2</sup> sec)	Critical Mass (kg)
0.94	1160	1,380,000	0.217	54,000	45,000	9.7	$11.3 \times 10^{17}$	$1.23 \times 10^{17}$	5.9
0.60	967	1,870,000	0.160	88,000	51,000	11.4	$4.95 \times 10^{17}$	$1.95 \times 10^{17}$	6.6
Chemical	420	$\sim 5,000,000$	$\sim 0.06$	Nova					

Data:  $\beta = 10^{-2}$ ,  $s = 0.05$ ,  $z = 0.1$ ,  $x = 0.6$ ,  $a_0 = 1.3$ ,  $\theta = 20$ ,  $\phi_r/\phi_s = 1$ ,  $p_s = 2$  kw/cm<sup>3</sup>, BeO Moderator,  $\sigma_d^{(F)} = 1000$  barns.

Table 2. *Vehicle and Engine Characteristics for Lunar Landing and Return of Apollo Capsule ( $W_{pl} = 15,000$  lb)*

System	$I_c$	$W_0$	$\pi_{pl}$	$W_n$	$P$	$l$	$N_{FC}$	$\phi_c$	$M_F$
Fraction of Fuel in Gas Phase	Specific Impulse (sec)	Vehicle Gross Weight (lb)	Payload Fraction	Reactor Weight (lb)	Reactor Power (Mw)	Reactor Diameter (ft)	Fuel Concentration in Gas Phase (nuclei/cm <sup>3</sup> )	Thermal Flux in Cavity (neut/cm <sup>2</sup> sec)	Critical Mass (kg)
0.94	1160	375,000	0.040	15,000	12,300	6.3	$10 \times 10^{18}$	$1.4 \times 10^{16}$	14
0.79	1080	667,000	0.022	28,000	20,000	7.8	$2 \times 10^{18}$	$6.1 \times 10^{16}$	6
Chemical	420	$\sim 5,000,000$	$\sim 0.003$	Nova or 4 Saturns					

Data:  $Av = 53,000$  f/s,  $\beta = 10^{-2}$ ,  $s = 0.05$ ,  $z = 0.1$ ,  $x = 0.6$ ,  $a_0 = 1.3$ ,  $\theta = 20$ ,  $\phi_r/\phi_s = 1$ ,  $p_s = 2$  kw/cm<sup>3</sup>, BeO Moderator,  $\sigma_d^{(F)} = 1000$  barns.

where  $\lambda$  is the propellant fraction,  $s$  the ratio of tank weight to propellant weight, and  $a_0$  is the initial vehicle acceleration. Vehicle characteristics based on this relation and the vacuum trajectory equation have been computed for two high performance missions: first, a booster to place a 300,000 lb gross payload in 300 mi earth satellite orbit; and second, a vehicle to launch a manned capsule of the Apollo type from the earth, land on the moon, take off from the moon and finally return to the earth.

The first mission was selected to demonstrate the capabilities of advanced nuclear systems as satellite freighters. For comparative purposes it should be noted that this mission is being considered for the Nova vehicle, a 3-stage chemical system of about 5 million lb. takeoff weight. Table 1 summarizes some of the principal characteristics of the nuclear vehicle and engine. The engine parameters are listed at the bottom of the table, of particular interest being the cavity void fraction  $\alpha = 0.6$ , the power density  $\dot{p}_s = 2 \text{ kw/cm}^3$ , the "Rover-equivalent" thrust to weight ratio  $\theta = 20$ , and the thermal radiation parameter  $\beta = 10^{-2}$ . This last choice is an estimate for cavity tubes of about an inch in diameter and propellant emissivities of about 0.1. Two systems are reported, one in which nearly all the fissionable material is carried in gas phase, and another in which 60 percent is in gas phase. An immediate observation to be made is that the system with less fuel in the gas phase exhibits a smaller payload fraction and larger engine characteristics. The gain over the Nova, however, is apparent, in either case. The indicated reactor weights, total power and diameter are not unreasonable for so large a vehicle, but the critical masses are low. This results from the fact that the thermal absorption cross section of the non-fuel components in the reactor was taken to be that of the moderator BeO alone (which is in the order of millibarns). In a practical situation, many foreign materials in the form of structural components and the like would be present, and this would lead to an increase in the critical mass by perhaps as much as a factor of 5. The average thermal neutron flux, on the other hand is seen to be about two orders of magnitude larger than encountered in current technology. Values of  $10^{17} \text{ neut/cm}^2 \text{ sec}$ , however, are generally characteristic of high performance nuclear propulsion devices, including solid-fuel heat-exchanger types.

The choice of the lunar-lander-and-return mission was selected as a very difficult feat which would exhibit in more conspicuous fashion the incentives for pursuing the developing of these advanced systems. The performance requirements were based on a 33,000 f/s escape velocity from the earth, followed by a landing and takeoff velocity increment of 9000 f/s each, and a corridor-reentry reserve of about 2000 f/s. It was assumed that all the dead weight in the takeoff vehicle was retained throughout the mission; this includes, reactor, tanks and payload. The 3-man Apollo capsule weight for a 2 week mission was taken to be 15,000 lb. Table 2 gives the required system characteristics for this mission. The engine parameters used in this calculation are the same as those for the satellite freighter. Some idea of the gains to be realized by utilizing these systems is obtained from a comparison with major chemical boosters under development. It would take roughly 4 Saturn C-2 (3 stage) vehicles in a rendezvous operation to accomplish this mission, or a single 5 million pound Nova. In either case the payload fraction is about 0.003.

## V. Application to Low Acceleration Systems

The incorporation of a radiator into the engine complex leads to considerable versatility in these advanced systems. By adding a radiator they become competitive, at least in principle, with low thrust nuclear-electric systems. The

Table 3. Characteristics of 500,000 lb Spacecraft to Deliver a Mars Orbiter

$a_0$	$I_c^*$	$t_{\text{total}}$	$W_p$	$W_n$	$P$	$l$	$N_{FC}$	$\phi_c$	$M_F$	$\alpha^*$
Initial Acceleration (units of $g$ )	Specific Impulse (sec)	Flight Time (days)	Payload Weight (lb)	Reactor Weight (lb)	Reactor Power (Mw)	Reactor Diameter (ft)	Fuel Concentration in Gas Phase (nuclei/cm <sup>3</sup> )	Thermal Flux in Cavity (neut/cm <sup>2</sup> sec)	Critical Mass (kg)	Engine Specific Weight (lb/kw)
$10^{-5}$	2450	2120	203,000	3200	15	3.2	—	—	—	52
$10^{-4}$	1890	424	142,000	6200	32	3.9	$6.8 \times 10^{18}$	$1.73 \times 10^{14}$	2.6	14
$10^{-3}$	1190	274	104,000	5200	32	3.7	$12.8 \times 10^{18}$	$1.12 \times 10^{14}$	3.3	2
$10^{-2}$	910	263	70,000	22,000	145	5.9	$1.4 \times 10^{18}$	$11.2 \times 10^{14}$	2.0	0.6
$10^{-4}$	14,000	498	280,000	Nuclear-Electric, 16.6 Kwe						
$2.7 \times 10^{-4}$	4000	332	134,000							
—	420	230	40,000	2 Nova Vehicles						
$1.7 \times 10^{-2}$	900	230	72,000	6 SaR-R (Saturn first stage + Rover (800 sec) second stage with low-thrust Rover engine in spacecraft)						

\* Optimum for maximization of payload fraction.

Data:  $\beta = 10^{-2}$ ,  $f = 0.6$ ,  $z = 0.1$ ,  $s = 0.05$ ,  $x = 0.3$ ,  $\theta = 0.3$ ,  $\eta = 16$ ,  $p_s = 30$  w/cm<sup>3</sup>,  $\phi_c/\phi_s = 1$ , BeO Moderator,  $\sigma_0(\text{Be}) = 1000$  barns.

principal incentive for considering this application is the prospect of performing difficult interplanetary missions at substantial reductions in total trip time, a consequence of the inherent high thrust capability of the gaseous fission reactor.

Some indication of performance potential is obtained from the analysis of two representative cases, a Mars and a Jupiter mission. In each case the mission is to propel a spacecraft along a minimum energy trajectory starting from an earth satellite orbit at 300 mi, to the target planet where the payload is to be captured in a circular orbit at 1.1 times the planet radius. The requirements for the Mars orbiter are representative of a relatively easy mission, whereas the requirements for the Jupiter orbiter are of a relatively difficult one. The trajectories begin with an escape spiral at the earth during which period a constant thrust is applied at right angles to the local radius vector from the center of the force field. When the appropriate hyperbolic velocity has been achieved to enter the minimum energy ellipse, the vehicle then coasts, and at the destination planet enters a deceleration spiral until a capture is accomplished.

The vehicle and engine characteristics for the Mars orbiter are given in Table 3 for an initial spacecraft weight of 500,000 lb and various initial accelerations at the earth satellite orbit. The indicated specific impulses are optimized so as to obtain the maximum payload fraction for the given initial acceleration. The selected engine parameters are indicated in the footnote, the most important of these being the power density ( $30 \text{ w/cm}^3$ ) and the thermal radiation parameter ( $\beta = 10^{-2}$ ). This very low power density was chosen in order that the reactor sizes be large enough to allow a critical assembly. Even then, it may be noted that the reactor for  $a_0 = 10^{-5}$  will not go critical. The remaining three cases do yield critical systems, but these configurations are not optimum and consequently the fuel concentrations in gas phase are high. Concentrations in the order of  $10^{16}$  nuclei/cm<sup>3</sup> are preferable so that the required cavity gas pressures be reasonable. For these cases the fluxes would be in the order of  $10^{16} - 10^{17}$  neutrons/cm<sup>2</sup> sec. No attempt was made to improve the nuclear characteristics of these systems since the selected reactor model was considered too coarse to warrant refinement. More accurate computational models, coupled with the use of various reflected geometries and flux peaking techniques, and finally the inclusion of fast fission reactions, are expected to yield better nuclear configurations than suggested here.

When compared to scaled-up versions of nuclear-electric systems under development or projected for the near future, it is seen that the payload capability of the present systems, for an initial acceleration of  $10^{-4} g$  is about half that predicted for the nuclear-electric. However, as the initial acceleration increases, the gaseous systems rapidly overtake the electric. Missions at accelerations above about  $5 \times 10^{-4} g$  can only be performed by the gaseous systems. These observations apply in general to missions to the near planets. At these relatively higher accelerations, the trip time is reduced very nearly to the so-called coast period; thus these systems behave very much like spacecraft launched directly from the ground by boosters. With these vehicles the thrust is applied impulsively (in the order of minutes); but this is essentially the characteristic of the gaseous engines for  $a_0 > 10^{-3}$ . As may be seen from the indicated engine specific weights (Fig. 4), these engines consist primarily of reactor and therefore give high thrust-to-weight ratios and short propulsion times.

If one attempts a more difficult interplanetary mission, as represented by the Jupiter orbiter, the performance of the gaseous system falls off badly. For example, if one were to apply the same engine characteristics to this mission as

Vol.  
7  
1961

Table 4. Characteristics of 500,000 lb Spacecraft to Deliver a Jupiter Orbiter

$a_0$	$I_c^*$	$t_{\text{total}}$	$W_{pl}$	$W_n$	$P$	$l$	$N_{FC}$	$\phi_c$	$M_F$	$\alpha_*$	
Initial Acceleration (units of $g$ )	Specific Impulse (sec)	Flight Time (years)	Payload Weight (lb)	Reactor Weight (lb)	Reactor Power (Mw)	Reactor Diameter (ft)	Fuel Concentration in Gas Phase (nuclei/cm <sup>3</sup> )	Thermal Flux in Cavity (neut/cm <sup>2</sup> sec)	Critical Mass (kg)	Engine Specific Weight (lb/kw)	
$10^{-4}$	3500	3.8	39,000	5,200	27	3.7	$12 \times 10^{18}$	$1.04 \times 10^{14}$	3.3	8	
$3 \times 10^{-4}$	3010	3.1	8,200	7,700	46	4.2	$4.3 \times 10^{18}$	$3.2 \times 10^{14}$	2.2	4.5	
$10^{-4}$	14,000	4.8	142,000	Nuclear-Electric, 16.6 Kwe							10
$1.7 \times 10^{-4}$	8000	3.6	40,000								
			0	Nova or Rover							

\* Optimum to maximize payload fraction.

Data:  $\beta = 10^{-4}$ ,  $f = 0.6$ ,  $\xi = 0.1$ ,  $s = 0.05$ ,  $x = 0.3$ ,  $\theta = 0.3$ ,  $\eta = 0.3$ ,  $p_s = 16$ ,  $p_r = 30$  w/cm<sup>2</sup>,  $\phi_r/\phi_c = 1$ , BeO Moderator,  $\sigma_a(E_c) = 1000$  barns.

in the Mars, then the resulting system would be incapable of making the trip. In order to achieve reasonable performance it is necessary that the radiation parameter  $\beta$  be reduced from  $10^{-2}$  to  $10^{-4}$ . Then again gains are made in reducing trip times (Table 4). This is of course most important if the mission is to be a manned flight. It is interesting to note that for the Jupiter mission the optimum specific impulses are considerably higher than in the case of the Mars orbiter. This is due to the fact that by reducing the thermal radiation parameter, the penalty in radiator weight is also reduced, and markedly higher specific impulses can be achieved before the attendant engine weight cuts substantially into the payload capability. Further reductions in  $\beta$  would, of course, result in mission capability into the  $10^{-3} - 10^{-2}$  range of initial accelerations.

These results indicate that in missions to the more distant planets, the gaseous systems are not competitive with the nuclear electric unless values of the radiation parameter much less than  $10^{-3}$  can be achieved. In that event, these systems not only compete favorably, but offer considerable savings in trip time.



## VI. Discussion

Several general observations can be made about the prospects for advanced nuclear systems on the basis of the results obtained for the representative cases considered.

1. In the high thrust application, there is a maximum possible specific impulse ratio of  $\zeta^{-1/2}$ , if regenerative cooling is the only mechanism for removing low quality heat from the engine.

In the case of hydrogen propellant this corresponds to a specific impulse of about 2200 sec, using 700 sec as a reference for the solid portion of the reactor.

2. At values of the thermal radiation parameter in the order of  $10^{-2}$ , the gaseous systems offer large payload capability in single stage ground takeoff vehicles.

At  $\beta = 10^{-2}$ , the gaseous reactors can still produce specific impulses in the order of 1200 sec, and at these values the resulting systems compete very well with any other method of rocket propulsion.

3. Specific impulse ratios greater than  $\zeta^{-1/2}$  can be achieved by the addition of a radiator, and application to interplanetary (low-acceleration) missions become feasible.

4. Low acceleration missions to the near planets can be performed at flight times substantially less than that possible with electric systems.

The near planets represent sufficiently easy missions (small velocity increments) that the very large specific impulse capability of the nuclear-electric systems allow them no great advantage over the gaseous systems with their relatively lower specific impulse. Consequently, the higher thrust-to-weight ratios of the latter yield marked reductions in flight time. Even at values of  $\beta \sim 10^{-2}$ , initial accelerations of  $10^{-2} g$  can be achieved, and these reduce trip times to coast periods. In a practical situation, however, such trips would most likely incorporate a nearly continuous propulsion period during both the planetary and heliocentric portion of the trajectory, and further reductions in flight time would become possible.

5. Low acceleration missions to the far planets do not appear competitive with nuclear-electric systems unless the thermal radiation parameter can be reduced to  $10^{-4}$  or less.

These higher performance missions place a premium on specific impulse, and unless  $\beta$  can be reduced to  $10^{-4}$  or less, the radiator weight penalty does not permit the gaseous systems to operate at specific impulses anywhere near the values possible with nuclear-electric engines. Since the electric systems can attain specific impulses in the order of 10,000 sec, gaseous engines are apparently severely handicapped. The prospect of increasing the specific impulse to values of 5000 sec and up rests by and large on the thermal radiation characteristics of the gaseous mixture of fissionable species and propellant. In the case of the vortex containment method, typical tube dimensions, radial mass through-flows, and vortex characteristics [1] require that the emissivity of the gas be in the order of  $10^{-4}$  so as to yield  $\beta$  values as low as  $10^{-4}$ .

Values of  $\epsilon_c \sim 10^{-4}$  are not necessarily unreasonable when considered in terms of the present formulation of the thermal radiation problem. In this treatment [4] we have used the form  $\epsilon_c T_c^4$  to represent the thermal radiation from the cavity. Therefore, if the gas is to radiate at the value  $T_c$ , then to be consistent  $\epsilon_c$  must indeed be very low. To complete the argument, it may be noted that in the event that  $\epsilon_c \sim 1$ , the gas mixture would radiate like a black body, be very opaque,

and the effective temperature of emission would be that of a layer approximately one optical depth inside the surface. At this depth the gas mixture would be some fraction of the central core temperature  $T_c$ .

These general remarks serve to point out that the prospect for achieving very high specific impulses with the aid of gas-phase fission heating is dependent upon the resolution of the thermal radiation problem, as well as upon the question of fuel containment. Further detailed analysis and especially experiments on the optical properties of suitable gaseous mixtures are required before the ultimate performance potential of these systems can be established.

The applicability of the gaseous system to the high acceleration mission, however, appears to be apparent. The thermal radiation problem is less important in this instance since even small gains in specific impulse result in better vehicle performance than possible with staged-chemical or heat-exchanger type nuclear systems.

Thus if the containment problem can be solved, the high thrust application becomes an interesting possibility.

#### References

1. J. L. KERREBROCK and R. V. MEGHREBLIAN, An Analysis of Vortex Tubes for Combined Gas-Phase Fission Heating and Separation of the Fissionable Material. Oak Ridge National Laboratory, CF 57-11-3, Nov. 1, 1957, declassified Dec. 21, 1959. — See also KERREBROCK and MEGHREBLIAN, Vortex Containment for the Gaseous Fission Rocket. *J. Aero Space Sci.*, 1961, in press.
2. S. T. NELSON, The Plasma Core Reactor. Space Technology Laboratories, Inc., GM 60-7630.2-9, June 22, 1960.
3. H. WEINSTEIN and R. G. RAGSDALE, A Coaxial Flow Reactor — A Gaseous Nuclear-Rocket Concept. Presented at 15th Annual Amer. Rocket Soc. Meeting, Washington, D. C., December 5-8, 1960.
4. R. V. MEGHREBLIAN, Gaseous Fission Reactors for Spacecraft Propulsion. Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, Techn. Rep. 32-42, July 6, 1960.
5. R. V. MEGHREBLIAN, Gaseous Fission Reactors for Booster Propulsion. Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, Techn. Rep. 32-94, March 31, 1961.

# Temperature Distribution in a Spinning Spherical Shell During Atmospheric Entry

By

H. Reismann<sup>1</sup> and W. H. Journey<sup>2</sup>

(With 15 Figures)

(Received February 20, 1961)

## Abstract — Zusammenfassung — Résumé

### Temperature Distribution in a Spinning Spherical Shell During Atmospheric Entry.

The problem is formulated as a heat-conduction boundary value problem in spherical, polar coordinates. The outer surface of the shell is subjected to a time-dependent boundary condition. Two separate boundary conditions, isothermal and adiabatic, are considered for the inner surface. An explicit solution for the temperature field is obtained by means of the LAPLACE transform and the calculus of residues.

The temperature in the shell is shown to consist of two parts:

1.  $T_I$ , which is independent of the rate of rotation;
2.  $T_{II}$ , which is a function of the rate of rotation.

$T_I$  and  $T_{II}$  are of the same order of magnitude in the absence of rotation, and it is shown that  $T_{II}$  becomes negligible compared to  $T_I$  for rotation rates of practical magnitude.

If the axis of rotation of the spherical shell is maintained perpendicular to the free-stream velocity, it is possible to decrease the stagnation-point temperature to approximately 40 to 50% of the value it would attain without rotation. Relatively low rotation rates (order of magnitude 1 rpm) are sufficient to accomplish this temperature reduction.

**Über die Temperaturverteilung an einer beim Eintauchen in die Erdatmosphäre rotierenden Kugelschale.** Das Problem wird als Randwertproblem der Wärmeleitung in Kugelkoordinaten formuliert. An der Außenfläche der Schale ist eine zeitabhängige Randbedingung vorgeschrieben. An der Innenfläche werden sowohl der isotherme als auch der adiabatische Fall behandelt. Mittels LAPLACE-Transformation werden explizite Lösungen erhalten.

Es wird gezeigt, daß sich die Temperatur der Schale aus zwei Teilen aufbaut:

1.  $T_I$ , unabhängig von der Rotation;
2.  $T_{II}$ , abhängig von der Winkelgeschwindigkeit der Rotation.

$T_I$  und  $T_{II}$  werden bei verschwindender Rotation von gleicher Größenordnung, und es wird gezeigt, daß  $T_{II}$  gegenüber  $T_I$  vernachlässigbar wird, wenn die Winkelgeschwindigkeit der Drehung praktisch realisierbare Werte annimmt.

<sup>1</sup> Chief Engineer, Missions Analysis Section, The Martin Company, Denver, Colorado, U.S.A.

<sup>2</sup> Associate Professor of Mathematics, Colorado School of Mines, Golden, Colorado, U.S.A.

Wenn die Rotationsachse der Schale senkrecht auf die Anströmgeschwindigkeit steht, ist es möglich, die Staupunkttemperatur an der Schalenoberfläche um etwa 40 bis 50% zu senken. Relativ kleine Drehgeschwindigkeiten (etwa 1 U/min) genügen, um diese Temperatursenkung zu erreichen.

**La répartition des températures dans une coque sphérique en rotation durant la rentrée dans l'atmosphère.** Ce problème de conduction thermique est formulé en coordonnées sphériques. Les données aux limites sur la surface externe sont fonctions du temps. Sur la surface interne on a considéré séparément un cas isotherme et un cas adiabatique. Une solution explicite peut être obtenue par la transformée de LAPLACE et le calcul des résidus.

La température dans la coque se compose de deux termes:

- 1)  $T_I$ , indépendant du taux de rotation;
- 2)  $T_{II}$ , qui en est une fonction.

Ces termes sont du même ordre de grandeur en l'absence de rotation. Pour des vitesses angulaires pratiquement réalisables  $T_{II}$  devient négligeable devant  $T_I$ .

Si l'axe de rotation est maintenu perpendiculaire au vecteur vitesse à l'infini, la température d'arrêt peut être réduite à 40 ou 50% de sa valeur en l'absence de rotation. Ceci pour des vitesses angulaires aussi basses que 1 tour/min.

#### Nomenclature and Units

$T$	Temperature ( $^{\circ}\text{C}$ )	$R_0$	Radius of inner surface of spherical shell (cm)
$r, \theta, \varphi$	Spherical polar coordinates (cm, rad, rad)	$q = r/R$	Dimensionless radial coordinate
$\lambda$	Angle of inclination of axis of rotation (rad)	$q_0 = R_0/R$	Dimensionless radius of inner surface of spherical shell
$\tau$	Real time (sec)	$t = \tau(K/R^2)$	Dimensionless time
$k$	Thermal conductivity (cal/cm-sec- $^{\circ}\text{C}$ )	$\omega = \Omega(R^2/K)$	Dimensionless spin rate
$K$	Diffusivity (cm $^2$ /sec)	$\alpha = a(R/k)$	Transformed heat flux parameters ( $^{\circ}\text{C}$ )
$\Omega$	Spin rate (rad/sec)	$\beta = b(R/k)$	
$a, b$	Heat flux parameters (cal/cm $^2$ -sec)	$p$	LAPLACE transformation parameter
$R$	Radius of outer surface of spherical shell (cm)	$z = x + iy$	Complex variable
		$i = \sqrt{-1}$	

#### I. Introduction

The heating that a body experiences on entering the earth's atmosphere has recently received a great deal of attention in scientific and technical literature. Much effort is presently expended to achieve a sound and efficient design of re-entry vehicles. A considerable portion of this effort is devoted to the gas-dynamics aspects of the problem, i.e., to the analytical and experimental determination of the heat transfer mechanism for various flow regimes and shapes ([1] through [8]). While some of this work deals with stagnation point heating only, there are also experimental and theoretical results dealing with the heat flux distribution over the entire body.

Some results have been obtained in determining the effect of heat flux on the structural skin during atmospheric entry. [9] concerns itself with the temperature history in a thick skin subjected to laminar heating during re-entry. [10] considers the two-dimensional heat conduction problem in an infinitely long rotating cylinder entering the atmosphere at hypersonic speed, the axis of

rotation being at right angles to the velocity vector. [11] gives an expression for the time-dependent temperature distribution in a rotating, solid sphere entering the atmosphere.

When a blunt-nosed body, such as a sphere, enters the atmosphere, then in the region of importance for heat transfer, the REYNOLDS numbers are almost always low enough to insure laminar flow [6]. In this case the stagnation point will experience the maximum heat flux intensity, whereas points on the spherical surface distant from the stagnation point will receive proportionately less heat flux. Therefore, if the stagnation point is stationary with respect to the sphere, a hot spot will develop. The undesirability of a hot spot in a structure is well known, particularly if its location cannot be predicted accurately. With reference to this situation, the conclusions of ALLEN and EGGERS [12] are of interest. These authors call attention to certain advantages in using the spherical shape as a re-entry body. They suggest the possibility of slow rotation during flight to distribute the maximum heat flux over a greater part of the sphere's surface area, resulting in a more efficient utilization of the protective shell as a heat sink.

The purpose of this investigation is to extend the work of [11] and to calculate the time-dependent temperature distribution in a rotating spherical shell entering the atmosphere; i.e., to obtain a quantitative assessment of the effect of the magnitude and orientation of the angular velocity on the temperature distribution in the presence of an isothermal and an adiabatic boundary condition on the interior boundary of the shell.

## II. Problem Formulation

We choose a right-handed cartesian coordinate system  $x, y, z$  and an associated spherical polar-coordinate system  $r, \theta, \varphi$  so that the free-stream velocity  $\bar{v}$  is parallel to the  $x$ -axis, and the stagnation point is the intersection of the outer surface of the spherical shell with the positive  $x$ -axis (Figs. 1 and 2).

The laminar heat transfer rate distribution for convective heat transfer to the outer surface of a spherical shell at hypersonic speeds is given in [1] and in terms of our chosen coordinate system a spherical polar plot of the heat flux, referred to the outer surface of the spherical shell, is a surface of revolution with the  $x$ -axis as the axis of symmetry. In what follows we assume the surface heat transfer mechanism is predominantly convective, and we shall neglect radiation effects.

A reasonably good approximation of the heat flux surface referred to our coordinate system is given by the equation

$$k \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{(R, \theta, \varphi)} = a + b \sin \theta \cos \varphi \quad (1)$$

where  $a$  and  $b$  are constants that depend on the free-stream MACH number.

A plane passing through the  $x$ -axis will intersect the heat-flux surface of revolution. If the plane polar plot of the heat flux thus obtained is transformed to a cartesian plot (Fig. 3), then the parameters  $a$  and  $b$  are determined by requiring an optimum match with the appropriate curve of [1], corresponding to the desired MACH number.

In the following we shall assume a slow rotation of the shell about an axis  $I'$  passing through its center, the orientation of which is fixed with respect to the free-stream velocity. In the strictest sense, the above heat transfer rate eq. (1)

is applicable only to a nonrotating spherical shell. However, if the rotation is slow in the sense that the local flow speed in the inviscid field around the shell is much larger than the peripheral speed produced by the rotation, i.e., if

$$R |\bar{\Omega}| \ll |\bar{v}| \quad (2)$$

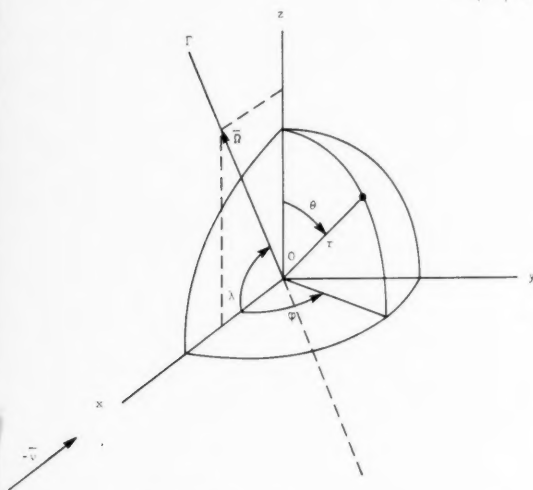


Fig. 1. Coordinate systems

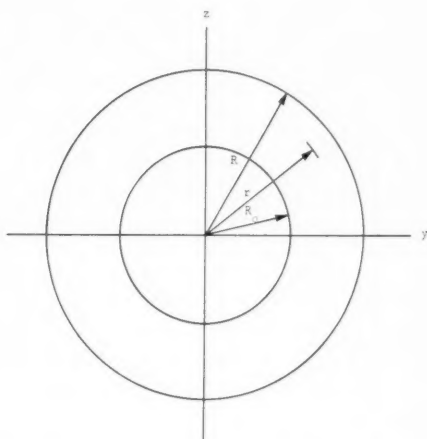


Fig. 2. Cross-section through spherical shell

then we can assume the existence of a quasi-steady boundary layer around the shell, and on the basis of [13] and [14] we may assume that eq. (1) is applicable in an approximate sense with the restriction expressed by eq. (2).

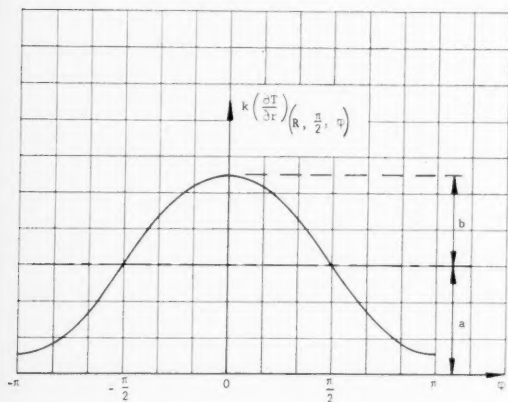
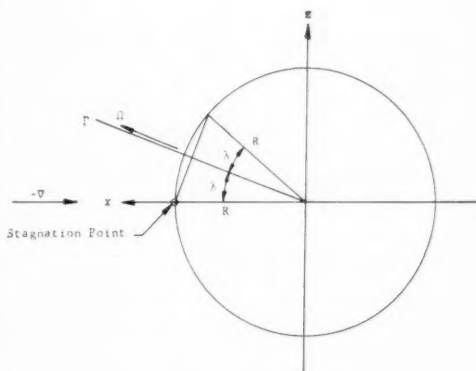
Fig. 3. Cartesian plot of intersection of heat flux surface with  $x - y$  plane

Fig. 4. Motion of stagnation point on surface of spherical shell

Consider a spherical shell entering the atmosphere. Its geometrical center translates with velocity  $\bar{v}$  (at constant MACH number) while it rotates with constant angular velocity  $\bar{\Omega}$  about an axis  $\Gamma$  passing through the center. The  $x - z$  plane in Fig. 1 is selected to pass through these two vectors. Thus the axis of rotation of the spherical shell is in the  $x - z$  plane and passes through the origin 0.

If the shell rotates about the  $x$ -axis only, the axis of rotation coincides with the axis of symmetry of the heat flux surface, and the heat flux intensity acting on each surface element of the shell is independent of time.

Next consider a spherical shell rotating about the  $z$ -axis. In this case the heat flux intensity acting on each surface element of the outer surface of the shell is a periodic function of time with frequency  $\Omega$ . This problem can be considerably simplified by interchanging the relative roles of the shell and heat flux surface. For purposes of computation, we assume the shell to have zero rotation with respect to the chosen coordinate system. We then require the heat flux surface to rotate rigidly about the  $z$ -axis without changing its shape. Therefore, if we assume the shell to be composed of a material displaying homogeneous and isotropic heat conduction properties with constant diffusivity, the partial differential equation (referred to spherical polar coordinates) characterizing the heat conduction process in the shell is [15]:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{K} \frac{\partial T}{\partial \tau}. \quad (3)$$

The "rotating" boundary condition can be derived by an appropriate modification of eq. (1). Since in this case the heat flux surface rotates rigidly about the  $z$ -axis without changing its shape, eq. (1) is modified to read

$$k \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{(R, \theta, \varphi, \tau)} = a + b \sin \theta \cos (\varphi - \Omega \tau). \quad (4)$$

Note that the above boundary condition, eq. (4), also applies to the case of a spherical shell rotating about the  $x$ -axis if we set  $\Omega = 0$ .

If we consider the angle of inclination  $\lambda$  of the axis of rotation  $I'$  as a parameter (Fig. 4), rotation about the  $z$ -axis will result in the greatest amount of temperature alleviation, while rotation about the  $x$ -axis will result in no temperature alleviation —  $\Omega$  and all other variables remaining fixed. This follows from the following considerations: For arbitrary  $0 \leq \lambda \leq \pi/2$ , the stagnation point moves on a circle of radius  $R \sin \lambda$  on the surface of the sphere. Since temperature alleviation effects considered in this investigation are a result of the averaging process obtained by rotation, the greatest reduction of temperature will be effected when the stagnation point is made to move on the circle of greatest circumference,  $\lambda = \pi/2$  (a great circle). No reduction can be expected when the circumference of this circle shrinks to zero ( $\lambda = 0$ ). For fixed  $\Omega$ , therefore, the above formulated boundary value problem will yield an upper bound of temperature alleviation when we consider  $\lambda$  as a parameter.

The cases considered here for the spherical shell entering the atmosphere are called "isothermal" and "adiabatic" for the sake of brevity. In both, the exterior surface ( $r = R$ ) is subject to the boundary condition, eq. (4). In the isothermal case the inner surface of the spherical shell ( $r = R_0$ ) is maintained at a fixed temperature ( $T_i$ ), while the heat flux across this surface is assumed to vanish for the adiabatic case. These boundary conditions are characterized by the equations:

$$T(R_0, \theta, \varphi, \tau) = T_i \text{ (isothermal);} \quad (5)$$

and

$$\left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{(R_0, \theta, \varphi, \tau)} = 0 \text{ (adiabatic).} \quad (6)$$



In summary then, we have shown that the problem of time-dependent temperature distribution in a spherical shell entering the atmosphere along a rectilinear flight path at constant MACH number and with constant angular momentum is characterized as a boundary value problem by eqs. (3) and (4). To achieve a complete solution, a knowledge of the initial temperature field  $T_0$ , and a knowledge of the boundary conditions such as eq. (5) or (6), is required. In this formulation of the problem, the axis of rotation is assumed to be perpendicular to the flight path.

### III. Solution

#### 1. Isothermal Case

The problem, as defined in Chapter II, is characterized by the partial differential equation

$$\nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (7)$$

where

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial \varrho^2} + \frac{2}{\varrho} \frac{\partial T}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\varrho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2},$$

subject to the boundary conditions

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial T}{\partial \varrho} \right)_{(\varrho=1, \theta, \varphi, t)} &= \alpha + \beta \sin \theta \cos (\varphi - \omega t) \\ (T)_{(\varrho=0, \theta, \varphi, t)} &= T_i \text{ (a constant),} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

and

and the initial conditions

$$\left. \begin{aligned} T_i &= T_0(\varrho_0, \theta, \varphi) \\ T(\varrho, \theta, \varphi, 0) &= T_0(\varrho, \theta, \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

where

Eqs. (7) through (9) are in dimensionless form (see nomenclature).

Because of the assumed linearity of the physical system, we may obtain a solution for  $T$  by expressing it in the form

$$T = T_0 + T_1 + T_2 + T_3, \quad (10)$$

and we shall determine  $T_1$ ,  $T_2$ , and  $T_3$  by requiring the following initial conditions:

$$T_1(\varrho, \theta, \varphi, 0) = T_2(\varrho, \theta, \varphi, 0) = T_3(\varrho, \theta, \varphi, 0) = 0. \quad (11)$$

We thus obtain the three subsidiary boundary value problems:

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial \varrho^2} + \frac{2}{\varrho} \frac{\partial T_1}{\partial \varrho} = \frac{\partial T_1}{\partial t} \quad (12)$$

with

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial T_1}{\partial \varrho} \right)_{\varrho=1} &= \alpha \\ (T_1)_{\varrho=\varrho_0} &= T_i \end{aligned} \right\}; \quad (13)$$

$$\nabla^2 T_2 = \frac{\partial T_2}{\partial t} \quad (14)$$

with

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial T_2}{\partial \varrho} \right)_{\varrho=1} &= \beta \sin \theta \cos \varphi \cos \omega t \\ (T_2)_{\varrho=\varrho_0} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

and

$$\nabla^2 T_3 = \frac{\partial T_3}{\partial t} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial T_3}{\partial \varrho} \right)_{\varrho=1} &= \beta \sin \theta \sin \varphi \sin \omega t \\ (T_3)_{\varrho=\varrho_0} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

each subject to the initial conditions (11).

The solutions for  $T_1$ ,  $T_2$ , and  $T_3$  are obtained by use of the LAPLACE transform technique in conjunction with the calculus of residues.  $\bar{T}_j(p)$  is defined as

$$\bar{T}_j(p) = \int_0^\infty e^{-pt} T_j(t) dt, \quad j = 1, 2, 3.$$

a) Solution for  $T_1$

Taking the LAPLACE transform of eq. (12) and boundary conditions (13) with respect to  $t$  gives

$$\frac{\partial^2 \bar{T}_1}{\partial \varrho^2} + \frac{2}{\varrho} \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \varrho} = p \bar{T}_1 \quad (18)$$

and

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \varrho} \right)_{\varrho=1} &= \frac{\alpha}{p} \\ (\bar{T}_1)_{\varrho=\varrho_0} &= \frac{T_i}{p} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

The substitution  $\bar{u} = \varrho \bar{T}_1$ , reduces eq. (18) to

$$\frac{d^2 \bar{u}}{d\varrho^2} - p \bar{u} = 0. \quad (20)$$

The general solution of eq. (20) is

$$\bar{u} = A \cosh(\sqrt{p} \varrho) + B \sinh(\sqrt{p} \varrho) \quad (21)$$

and from eqs. (19)

$$\varrho \bar{T}_1(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{g(p)}{q(p)} \quad (22)$$

where

$$\begin{aligned} g(p) &= T_i \varrho_0 \{ \sinh \sqrt{p} (1 - \varrho) - \sqrt{p} \cosh \sqrt{p} (1 - \varrho) \} - \alpha \sinh \sqrt{p} (\varrho - \varrho_0) \\ q(p) &= \sinh \sqrt{p} (1 - \varrho_0) - \sqrt{p} \cosh \sqrt{p} (1 - \varrho_0). \end{aligned}$$

The solution of eq. (12) subject to the boundary conditions (13) is now affected by the inversion of eq. (22) (Chapter V) in the form

$$\varrho T_1 = \frac{\varrho_0 \varrho T_i + \alpha(\varrho - \varrho_0)}{\varrho_0} - 2 S_1 \quad (23)$$

where

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\{\varrho_0(1-\varrho_0) - \xi_n^2\} \sin \xi_n} \right] \cdot \left[ \varrho_0 T_i \left\{ (1-\varrho_0) \sin \left( \frac{1-\varrho}{1-\varrho_0} \right) \xi_n - \right. \right. \\ \left. \left. - \xi_n \cos \left( \frac{1-\varrho}{1-\varrho_0} \right) \xi_n \right\} - \alpha (1-\varrho_0) \sin \left( \frac{\varrho-\varrho_0}{1-\varrho_0} \right) \xi_n \right] e^{-\frac{\xi_n^2 t}{(1-\varrho_0)^2}} \quad (24)$$

where  $\xi_n$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) are the positive roots of

$$\tan \xi = \frac{\xi}{1-\varrho_0}. \quad (25)$$

See Table 3 for the first 40 real roots of eq. (25), with  $\varrho_0 = 0.500, 0.625, 0.750$ , and  $0.875$ . All roots of eq. (25) are real as shown in Chapter V.

#### b) Solutions for $T_2$ and $T_3$

Taking LAPLACE transforms of eq. (14) and (15), with respect to  $t$  we obtain

$$\nabla^2 \bar{T}_2 = \bar{p} \bar{T}_2 \quad (26)$$

and

$$\left( \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial \varrho} \right)_{\varrho=1} = \beta \sin \theta \cos \varphi \cdot \frac{\bar{p}}{\bar{p}^2 + \omega^2} \quad (27)$$

$$(\bar{T}_2)_{\varrho=\varrho_0} = 0.$$

A trial solution of (26) in the form

$$\bar{T}_2 = R(\varrho) \sin \theta \cos \varphi \quad (28)$$

leads to the equation

$$\frac{d^2 R}{d\varrho^2} + \frac{2}{\varrho} \frac{dR}{d\varrho} - \left( \frac{2}{\varrho^2} + \bar{p} \right) R = 0 \quad (29)$$

for the determination of  $R(\varrho)$ .

If eq. (29) is transformed by the successive substitutions

$$\varrho \cdot R(\varrho) = Q(\varrho), \quad x = \sqrt{\bar{p}} \varrho, \quad (30)$$

we obtain

$$\frac{d^2 Q}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dQ}{dx} + \left\{ i^2 - \frac{(\frac{3}{2})^2}{x^2} \right\} Q = 0, \quad (31)$$

and the general solution of eq. (31) is

$$Q(x) = \frac{A}{\sqrt{x}} \left\{ \frac{\sinh x}{x} - \cosh x \right\} + \frac{B}{\sqrt{x}} \left\{ \frac{\cosh x}{x} - \sinh x \right\}. \quad (32)$$

The use of eq. (32), relations (28), (30) and the application of conditions (27) leads to  $\bar{T}_2$  in the form

$$\frac{\varrho^2 \bar{T}_2(\varrho)}{\beta \sin \theta \cos \varphi} = \frac{\bar{p}}{\bar{p}^2 + \omega^2} \cdot \frac{g(\bar{p})}{q(\bar{p})} \quad (33)$$

with

$$\left. \begin{aligned} g(\bar{p}) &= (1 - \varrho_0 \varrho \bar{p}) \sinh \sqrt{\bar{p}} (\varrho - \varrho_0) - \sqrt{\bar{p}} (\varrho - \varrho_0) \cosh \sqrt{\bar{p}} (\varrho - \varrho_0) \\ q(\bar{p}) &= \sqrt{\bar{p}} \{ 2(1 - \varrho_0) - \varrho_0 \bar{p} \} \cosh \sqrt{\bar{p}} (1 - \varrho_0) \\ &\quad + \{ (2\varrho_0 - 1) \bar{p} - 2 \} \sinh \sqrt{\bar{p}} (1 - \varrho_0). \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

By inversion of eq. (33) (Chapter V) we obtain

$$\frac{\varrho^2 T_2}{\beta \sin \theta \cos \varphi} = \frac{1}{2} \frac{(\alpha_1 + i \beta_1)}{(\gamma_1 + i \delta_1)} e^{i \omega t} + \frac{1}{2} \frac{(\alpha_1 - i \beta_1)}{(\gamma_1 - i \delta_1)} e^{-i \omega t} - 2 S_2 \quad (35)$$

where  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ , and  $S_2$  will be defined after a solution for  $T_3$  is obtained.

The determination of  $T_3$  follows the same pattern as that of  $T_2$ . The LAPLACE transforms with respect to  $t$  of eq. (16) and boundary conditions (17) are

$$\nabla^2 \bar{T}_3 = \bar{p} \bar{T}_3 \quad (36)$$

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial \bar{T}_3}{\partial \varrho} \right)_{\varrho=1} &= \frac{\beta \omega \sin \theta \sin \varphi}{\bar{p}^2 + \omega^2} \\ (\bar{T}_3)_{\varrho=\varrho_0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

From eq. (36) and conditions (37) we obtain

$$\frac{\varrho^2 \bar{T}_3(\bar{p})}{\beta \sin \theta \sin \varphi} = \frac{\omega}{\bar{p}^2 + \omega^2} \cdot \frac{g(\bar{p})}{q(\bar{p})} \quad (38)$$

with  $g(\bar{p})$  and  $q(\bar{p})$  defined by eqs. (34). Subsequent developments will be facilitated by noticing that the right-hand member of eq. (38) is the same as that of eq. (33) except that  $\omega$  replaces  $\bar{p}$  in the numerator of the first factor.

The inversion of eq. (38) gives

$$\frac{\varrho^2 T_3}{\beta \sin \theta \sin \varphi} = \frac{i (\alpha_1 - i \beta_1)}{2 (\gamma_1 - i \delta_1)} e^{-i\omega t} - \frac{i (\alpha_1 + i \beta_1)}{2 (\gamma_1 + i \delta_1)} e^{i\omega t} + 2 \omega S_3. \quad (39)$$

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ , and  $\delta_1$  are the same as in eq. (35). These values are given, together with the expression for  $S_3$ , following the next result.

Eqs. (35) and (39) are now combined giving

$$\frac{T_2 + T_3}{\beta \sin \theta} = \frac{A}{\varrho^2} \cos (\varphi - \omega t) + \frac{B}{\varrho^2} \sin (\varphi - \omega t) - \frac{2}{\varrho^2} \cos \varphi S_2 + \frac{2 \omega}{\varrho^2} \sin \varphi S_3 \quad (40)$$

where

$$S_2 = (1 - \varrho_0) \sum_{n=1}^{\infty} \quad (41)$$

$$\frac{\xi_n^2 \left[ \{(1 - \varrho_0)^2 + \varrho_0 \varrho \xi_n^2\} \sin \left( \frac{\varrho - \varrho_0}{1 - \varrho_0} \right) \xi_n - (1 - \varrho_0) (\varrho - \varrho_0) \xi_n \cos \left( \frac{\varrho - \varrho_0}{1 - \varrho_0} \right) \xi_n \right] e^{-\frac{\xi_n^2 t}{(1 - \varrho_0)^2}}}{\{\xi_n^4 + \omega^2 (1 - \varrho_0)^4\} [\varrho_0 \{\xi_n^2 + 2 \varrho_0 (1 - \varrho_0)\} \sin \xi_n - \xi_n (1 + 2 \varrho_0^2) \cos \xi_n]}$$

$$S_3 = (1 - \varrho_0)^3 \sum_{n=1}^{\infty} \quad (42)$$

$$\frac{\left[ \{(1 - \varrho_0)^2 + \varrho_0 \varrho \xi_n^2\} \sin \left( \frac{\varrho - \varrho_0}{1 - \varrho_0} \right) \xi_n - (1 - \varrho_0) (\varrho - \varrho_0) \xi_n \cos \left( \frac{\varrho - \varrho_0}{1 - \varrho_0} \right) \xi_n \right] e^{-\frac{\xi_n^2 t}{(1 - \varrho_0)^2}}}{\{\xi_n^4 + \omega^2 (1 - \varrho_0)^4\} [\varrho_0 \{\xi_n^2 + 2 \varrho_0 (1 - \varrho_0)\} \sin \xi_n - \xi_n (1 + 2 \varrho_0^2) \cos \xi_n]}$$

and

$$A = \frac{\alpha_1 \gamma_1 + \beta_1 \delta_1}{\gamma_1^2 + \delta_1^2}, \quad B = \frac{\beta_1 \gamma_1 - \alpha_1 \delta_1}{\gamma_1^2 + \delta_1^2} \quad (43)$$

and

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= (1 - \varrho_0 \varrho \omega) \sinh \sigma \cos \sigma + (1 + \varrho_0 \varrho \omega) \sin \sigma \cosh \sigma - (\varrho - \varrho_0) \sqrt{2 \omega} \cosh \sigma \cos \sigma \\ \beta_1 &= (1 - \varrho_0 \varrho \omega) \sin \sigma \cosh \sigma - (1 + \varrho_0 \varrho \omega) \sinh \sigma \cos \sigma - (\varrho - \varrho_0) \sqrt{2 \omega} \sinh \sigma \sin \sigma \\ \gamma_1 &= \sqrt{2 \omega} \{2 (1 - \varrho_0) \cosh \sigma_0 \cos \sigma_0 + \varrho_0 \omega \sinh \sigma_0 \sin \sigma_0\} + \\ &\quad + \{(2 \varrho_0 - 1) \omega - 2\} \sinh \sigma_0 \cos \sigma_0 - \{(2 \varrho_0 - 1) \omega + 2\} \sin \sigma_0 \cosh \sigma_0 \\ \delta_1 &= \sqrt{2 \omega} \{2 (1 - \varrho_0) \sinh \sigma_0 \sin \sigma_0 - \varrho_0 \omega \cosh \sigma_0 \cos \sigma_0\} + \\ &\quad + \{(2 \varrho_0 - 1) \omega + 2\} \sinh \sigma_0 \cos \sigma_0 + \{(2 \varrho_0 - 1) \omega - 2\} \sin \sigma_0 \cosh \sigma_0 \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\omega}{2}} (\varrho - \varrho_0), \quad \sigma_0 = \sqrt{\frac{\omega}{2}} (1 - \varrho_0).$$

The values  $\xi_n$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ), of eqs. (41) and (42) are the positive roots of

$$\tan \xi = \frac{\xi}{(1 - \varrho_0)} \frac{\{\varrho_0 \xi^2 + 2(1 - \varrho_0)^3\}}{\{(2\varrho_0 - 1)\xi^2 + 2(1 - \varrho_0)^2\}} \quad (45)$$

These roots are tabulated in Table 4, and their reality is discussed in Chapter VI.

The expression  $\frac{T_2 + T_3}{\beta \sin \theta}$  may also be written as

$$\frac{T_2 + T_3}{\beta \sin \theta} = M \cos \varphi + N \sin \varphi \quad (46)$$

where

$$M = \frac{A}{\varrho^2} \cos \omega t - \frac{B}{\varrho^2} \sin \omega t - \frac{2}{\varrho^2} S_2 \quad (47)$$

$$N = \frac{A}{\varrho^2} \sin \omega t + \frac{B}{\varrho^2} \cos \omega t + \frac{2}{\varrho^2} S_3. \quad (48)$$

### c) Special Cases

Where  $\omega = 0$ , it is noted that  $T_1$  is unchanged and  $T_3 \equiv 0$ . However,  $\frac{\varrho^2 T_2(p)}{\beta \sin \theta \cos \varphi}$  becomes  $\frac{1}{p} \frac{g(p)}{q(p)}$  where  $g(p)$  and  $q(p)$  are given by eq. (34). Therefore,  $\frac{\varrho^2 T_2(p)}{\beta \sin \theta \cos \varphi}$  has an isolated pole at  $p = 0$  for  $\omega = 0$ . The contribution to  $\frac{\varrho^2 T_2(t)}{\beta \sin \theta \cos \varphi}$  due to this pole is

$$\frac{(\varrho - \varrho_0)(\varrho^2 + \varrho \varrho_0 + \varrho_0^2)}{1 + 2\varrho_0^3}. \quad (49)$$

The value of  $S_2$  in  $T_2$  remains unchanged (except for  $\omega = 0$ ) and

$$\frac{\varrho^2 (T_2 + T_3)}{\beta \sin \theta \cos \varphi} = \frac{(\varrho - \varrho_0)(\varrho^2 + \varrho \varrho_0 + \varrho_0^2)}{2\varrho_0^3 + 1} - 2S_2 \quad (50)$$

where

$$S_2 = (1 - \varrho_0) \sum_{n=1}^{\infty} \quad (51)$$

$$\frac{\left[ \{(1 - \varrho_0)^2 + \varrho_0 \varrho \xi_n^2\} \sin \left( \frac{\varrho - \varrho_0}{1 - \varrho_0} \right) \xi_n - (1 - \varrho_0)(\varrho - \varrho_0) \xi_n \cos \left( \frac{\varrho - \varrho_0}{1 - \varrho_0} \right) \xi_n \right] e^{-\frac{\xi_n^2 t}{(1 - \varrho_0)^2}}}{\xi_n^2 [\varrho_0 \{\xi_n^2 + 2\varrho_0(1 - \varrho_0)\} \sin \xi_n - \xi_n (1 + 2\varrho_0^2) \cos \xi_n]}.$$

For sufficiently large  $\omega$ , sufficiently large  $t$ , and  $\varrho = 1$  we have

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{\frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2}{\gamma_1^2 + \delta_1^2}} \approx \text{Max} \frac{(T_2 + T_3)}{\beta \sin \theta}. \quad (52)$$

It is easily shown that if  $\omega \geq 32$  and  $t \rightarrow \infty$

$$\sqrt{\frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2}{\gamma_1^2 + \delta_1^2}} \approx \sqrt{\frac{2(1 - \varrho_0)^3 + 2\varrho_0^2 \omega + 2\varrho_0(1 - \varrho_0) \sqrt{2\omega}}{2\varrho_0^2 \omega^2 + 2(2\varrho_0 - 1)^2 \omega + \omega(2\varrho_0 - 1) \sqrt{2\omega} \{2(1 - \varrho_0) - (\varrho_0 \omega)\}}} \quad (53)$$

and if  $\omega$  is sufficiently large, ( $\omega > 150$ )

$$\left| \frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2}{\gamma_1^2 + \delta_1^2} \right| \approx \frac{1}{\sqrt{\omega}}. \quad (54)$$

## 2. Adiabatic Case

The boundary value problem to be solved is that of obtaining a solution of

$$\nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (55)$$

that satisfies the boundary conditions

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial T}{\partial \varrho} \right)_{\varrho=1} &= \alpha + \beta \sin \theta \cos (\varphi - \omega t) \\ \left( \frac{\partial T}{\partial \varrho} \right)_{\varrho=\varrho_0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

and the initial conditions

$$\left. \begin{aligned} T(\varrho, \theta, \varphi, 0) &= T_0 \\ T_j(\varrho, \theta, \varphi, 0) &= 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

with

$$T = T_0 + T_1 + T_2 + T_3. \quad (58)$$

The solution is completely analogous to that for the isothermal case. We obtain

$$\frac{\varrho T_1(p)}{\alpha} = \frac{1}{p} \frac{g(p)}{q(p)} \quad (59)$$

with

$$\left. \begin{aligned} g(p) &= \sinh \sqrt{p} (\varrho - \varrho_0) + \sqrt{p} \varrho_0 \cosh \sqrt{p} (\varrho - \varrho_0) \\ q(p) &= \sqrt{p} (1 - \varrho_0) \cosh \sqrt{p} (1 - \varrho_0) - (1 - \varrho_0 p) \sinh \sqrt{p} (1 - \varrho_0). \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

The inversion of (59) results in

$$\frac{\varrho T_1}{\alpha} = \frac{A_1 + A_0 t}{1 - \varrho_0} - 2 S_1 \quad (61)$$

where

$$A_0 = \frac{3 \varrho}{(1 + \varrho_0 + \varrho_0^2)} \quad (62)$$

and

$$A_1 = \frac{5 (\varrho - \varrho_0)^2 (\varrho + 2 \varrho_0) (1 + \varrho_0 + \varrho_0^2) - 3 \varrho (1 - \varrho_0)^2 (1 + 3 \varrho_0 + \varrho_0^2)}{30 \varrho (1 + \varrho_0 + \varrho_0^2)^2} \quad (63)$$

with

$$S_1 = (1 - \varrho_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\{ (1 - \varrho_0) \sin \left( \frac{\varrho - \varrho_0}{1 - \varrho_0} \right) \xi_n + \varrho_0 \xi_n \cos \left( \frac{\varrho - \varrho_0}{1 - \varrho_0} \right) \xi_n \right\} e^{-\frac{\xi_n^2 t}{(1 - \varrho_0)^2}}}{\xi_n^2 \{ (1 + \varrho_0^2) \sin \xi_n + \varrho_0 \xi_n \cos \xi_n \}}. \quad (64)$$

The values  $\xi_n$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) in eq. (64) are the positive roots of

$$\tan \xi = \frac{(1 - \varrho_0)^2 \xi}{(1 - \varrho_0)^2 + \varrho_0 \xi^2}. \quad (65)$$

The first 40 solutions of eq. (65) are given in Table 5 for  $\varrho_0 = 0.500, 0.625, 0.750$ , and  $0.875$ . The reality of these roots is established in Chapter VI.

a) Solutions for  $T_2$  and  $T_3$

$$\frac{\varrho^2 T_2(\rho)}{\beta \sin \theta \cos \varphi} = \frac{\rho}{\rho^2 + \omega^2} \cdot \frac{g(\rho)}{q(\rho)} \quad (66)$$

where

$$g(\rho) = \left\{ 2 - \varrho_0 (2\varrho - \varrho_0) \rho \right\} \sinh \sqrt{\rho} (\varrho - \varrho_0) - \left\{ 2(\varrho - \varrho_0) + \varrho_0^2 \varrho \rho \right\} \sqrt{\rho} \cosh \sqrt{\rho} (\varrho - \varrho_0) \quad (67)$$

and

$$q(\rho) = - \left\{ 4 + 2(1 - \varrho_0)^2 \rho + \varrho_0^2 \rho^2 \right\} \sinh \sqrt{\rho} (1 - \varrho_0) + \left\{ 2(1 - \varrho_0)(2 - \varrho_0 \rho) \sqrt{\rho} \cosh \sqrt{\rho} (1 - \varrho_0) \right\}$$

Also,

$$\frac{\varrho^2 T_3}{\beta \sin \theta \sin \varphi} = \frac{\omega}{\varrho^2 + \omega^2} \cdot \frac{g(\rho)}{q(\rho)} \quad (68)$$

where  $g(\rho)$  and  $q(\rho)$  are given by eqs. (67). The inverse of eq. (66) is identical in form to eq. (35), and the inverse of eq. (68) is identical in form with eq. (39).

The combination of  $T_2$  and  $T_3$  results in

$$\frac{T_2 + T_3}{\beta \sin \theta} = \frac{A}{\varrho^2} \cos(\varphi - \omega t) + \frac{B}{\varrho^2} \sin(\varphi - \omega t) - \frac{2}{\varrho^2} \cos \varphi S_2 + \frac{2\omega}{\varrho^2} \sin \varphi S_3 \quad (69)$$

$$S_2 = (1 - \varrho_0) \sum_{n=1}^{\infty} \cdot$$

$$\frac{\xi_n \left[ (1 - \varrho_0) \{ 2(1 - \varrho_0)^2 + \varrho_0 (2\varrho - \varrho_0) \xi_n^2 \} \sin \left( \frac{\varrho - \varrho_0}{1 - \varrho_0} \right) \xi_n - \{ \xi_n^4 + (1 - \varrho_0)^4 \omega^2 \} [ 2\varrho_0 (1 + \varrho_0^2) \xi_n \sin \xi_n + \{ \varrho_0^2 \xi_n^2 - 2(1 - \varrho_0)^2 (1 + \varrho_0 + \varrho_0^2) \} \cos \xi_n ] \right]}{\xi_n \{ 2(\varrho - \varrho_0) (1 - \varrho_0)^2 - \varrho \varrho_0^2 \xi_n^2 \} \cos \left( \frac{\varrho - \varrho_0}{1 - \varrho_0} \right) \xi_n} e^{-\frac{\xi_n^2 t}{(1 - \varrho_0)^2}} \quad (70)$$

$$S_3 = (1 - \varrho_0)^3 \sum_{n=1}^{\infty} \cdot$$

$$\frac{\left[ (1 - \varrho_0) \{ 2(1 - \varrho_0)^2 + \varrho_0 (2\varrho - \varrho_0) \xi_n^2 \} \sin \left( \frac{\varrho - \varrho_0}{1 - \varrho_0} \right) \xi_n - \xi_n \{ \xi_n^4 + (1 - \varrho_0)^4 \omega^2 \} [ 2\varrho_0 (1 + \varrho_0^2) \xi_n \sin \xi_n + \{ \varrho_0^2 \xi_n^2 - 2(1 - \varrho_0)^2 (1 + \varrho_0 + \varrho_0^2) \} \cos \xi_n ] \right]}{\xi_n \{ 2(\varrho - \varrho_0) (1 - \varrho_0)^2 - \varrho \varrho_0^2 \xi_n^2 \} \cos \left( \frac{\varrho - \varrho_0}{1 - \varrho_0} \right) \xi_n} e^{-\frac{\xi_n^2 t}{(1 - \varrho_0)^2}} \quad (71)$$

$$A = \frac{\alpha_1 \gamma_1 + \beta_1 \delta_1}{\gamma_1^2 + \delta_1^2}, \quad B = \frac{\beta_1 \gamma_1 - \alpha_1 \delta_1}{\gamma_1^2 + \delta_1^2} \quad (72)$$



$$\left. \begin{aligned}
 \alpha_1 &= \{2 - \varrho_0 (2\varrho - \varrho_0) \omega\} \sinh \sigma \cos \sigma + \{\varrho_0 (2\varrho - \varrho_0) \omega + \\
 &\quad + 2\} \sin \sigma \cosh \sigma - \sqrt{2\omega} \{2(\varrho - \varrho_0) \cosh \sigma \cos \sigma - \varrho_0^2 \varrho \omega \sinh \sigma \sin \sigma\} \\
 \beta_1 &= \{2 - \varrho_0 (2\varrho - \varrho_0) \omega\} \sin \sigma \cosh \sigma - \{\varrho_0 (2\varrho - \varrho_0) \omega + \\
 &\quad + 2\} \sinh \sigma \cos \sigma - \sqrt{2\omega} \{2(\varrho - \varrho_0) \sinh \sigma \sin \sigma + \varrho_0^2 \varrho \omega \cosh \sigma \cos \sigma\} \\
 \gamma_1 &= \{2(1 - \varrho_0)^2 \omega - (4 - \varrho_0^2 \omega^2)\} \sin \sigma_0 \cosh \sigma_0 - \\
 &\quad - \{(4 - \varrho_0^2 \omega^2) + 2(1 - \varrho_0)^2 \omega\} \sinh \sigma_0 \cos \sigma_0 + \\
 &\quad + 2\sqrt{2\omega} (1 - \varrho_0) \{2 \cosh \sigma_0 \cos \sigma_0 + \varrho_0 \omega \sinh \sigma_0 \sin \sigma_0\} \\
 \delta_1 &= -\{2(1 - \varrho_0)^2 \omega + (4 - \varrho_0^2 \omega^2)\} \sin \sigma_0 \cosh \sigma_0 + \\
 &\quad + \{(4 - \varrho_0^2 \omega^2) - 2(1 - \varrho_0)^2 \omega\} \sinh \sigma_0 \cos \sigma_0 + \\
 &\quad + 2\sqrt{2\omega} (1 - \varrho_0) \{2 \sinh \sigma_0 \sin \sigma_0 - \varrho_0 \omega \cosh \sigma_0 \cos \sigma_0\}
 \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

and

$$\sigma = \sqrt{\frac{\omega}{2}} (\varrho - \varrho_0), \quad \sigma_0 = \sqrt{\frac{\omega}{2}} (1 - \varrho_0). \quad (74)$$

Eqs. (46) through (48) are also applicable to this case with appropriate interpretation. The values  $\xi_n$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) are the positive roots of

$$\tan \xi = \frac{2(1 - \varrho_0)^2 \xi \{2(1 - \varrho_0)^2 + \varrho_0 \xi^2\}}{2(1 - \varrho_0)^4 (2 - \xi^2) + \varrho_0^2 \xi^4}. \quad (75)$$

These roots are tabulated in Table 6 and their reality is established in Chapter VI.

#### b) Special Cases

Where  $\omega = 0$ ,  $T_1$  is unchanged,  $T_3 \equiv 0$  and  $\varrho^2 T_2(p)/(\beta \sin \theta \cos \varphi)$  has a simple pole at  $p = 0$ . From eq. (66) the residue contributed by this pole (see Chapter V) is given by

$$\frac{3\varrho_0^3 + 2(\varrho - \varrho_0)(\varrho_0^2 + \varrho_0 \varrho + \varrho^2)}{2(1 - \varrho_0)(1 + \varrho_0 + \varrho_0^2)} = C. \quad (76)$$

Therefore, for  $\omega = 0$ ,

$$\frac{\varrho^2 (T_2 + T_3)}{\beta \sin \theta \cos \varphi} = C - 2S_2 \quad (77)$$

where

$$\begin{aligned}
 S_2 = (1 - \varrho_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[ (1 - \varrho_0) \{2(1 - \varrho_0)^2 + \varrho_0(2\varrho - \varrho_0)\xi_n^2\} \sin \left( \frac{\varrho - \varrho_0}{1 - \varrho_0} \right) \xi_n - \right. \\
 \left. - \xi_n \{2(\varrho - \varrho_0)(1 - \varrho_0)^2 - \varrho \varrho_0^2 \xi_n^2\} \cos \left( \frac{\varrho - \varrho_0}{1 - \varrho_0} \right) \xi_n \right]}{\xi_n^3 [2\varrho_0(1 + \varrho_0^2)\xi_n \sin \xi_n + \{\varrho_0 \xi_n^2 - 2(1 - \varrho_0)^2(1 + \varrho_0 + \varrho_0^2)\} \cos \xi_n]} \\
 \times e^{-\frac{\xi_n^2 t}{(1 - \varrho_0)^2}}. \quad (78)
 \end{aligned}$$

For large  $t$  and  $\omega$  ( $\omega \geq 32$ ):

$$\begin{aligned}
 \frac{\text{Max}(T_2 + T_3)}{\beta \sin \theta} &\approx \sqrt{\frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2}{\gamma_1^2 + \delta_1^2}} \approx \\
 &\approx \sqrt{\frac{\varrho_0^4 \omega^3 + \varrho_0^2 (\varrho_0 - 2)^2 \omega^2 - \omega \sqrt{2\omega} \{\varrho_0^3 (\varrho_0 - 2) \omega - 2\varrho_0^2\}}{\varrho_0^4 \omega^4 + 4\varrho_0^2 (1 - \varrho_0)^2 \omega^3 + 4(1 - \varrho_0)^4 \omega^2 + 2\varrho_0^3 (1 - \varrho_0) \omega^3 \sqrt{2\omega}}}; \quad (79)
 \end{aligned}$$

and for  $\omega$  sufficiently large ( $\omega \geq 150$ ):

$$\sqrt{\frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2}{\gamma_1^2 + \delta_1^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{\omega}}. \quad (80)$$

#### IV. Discussion of Results

##### 1. Isothermal Case

Fig. 5 shows a plot of the spin-independent portion of the spherical shell temperature, with inner radius  $\varrho_0$  as a parameter and  $\varrho = 1$ ,  $T_i = 0$  [eq. (23)]. An inspection of eq. (23) shows that  $T_1$  assumes a constant value for sufficiently

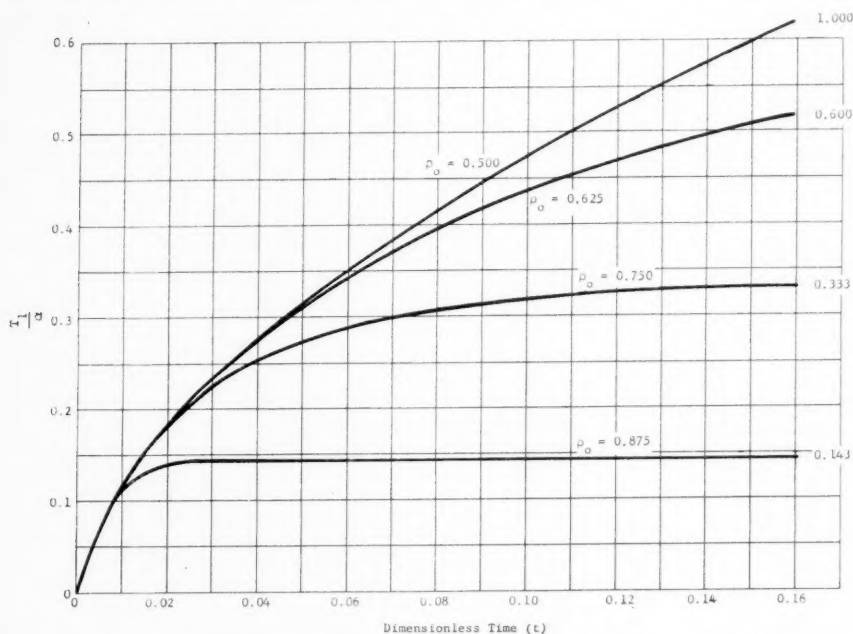


Fig. 5. Spin rate independent temperature component vs dimensionless time ( $\varrho = 1$ ), isothermal case

large  $t$ . Fig. 6 is a plot of the spin-dependent portion of the stagnation-point temperature  $T_{II}/(\beta \sin \theta)$  as a function of time, with dimensionless spin rate  $\omega$  as a parameter, and for  $\varrho_0 = 0.500$  [eq. (40)]  $T_{II}$  is defined as  $\max(T_2 + T_3)$ . Figs. 7, 8, and 9 present similar data for the shell with inner radii  $\varrho_0 = 0.625$ , 0.750, and 0.875, respectively. For sufficiently large angular rates  $\omega$ , the value of  $T_{II}/(\beta \sin \theta)$  becomes negligible compared to  $T_1/\alpha$  (since  $\alpha \approx \beta$ ) and  $\theta = \pi/2$ .

Since the total stagnation point temperature is greater than, or at most equal to,  $T_1/\alpha$  (for  $0 \leq t \leq 0.16$ ), it is obvious that rotation results in an alleviation of temperature. For this case Table I shows the temperature alleviation as a function of spin rate, with inner radius as a parameter. It is clearly indicated that temperature reduction in this case is of the order of 40 to 50%. Note also that alleviation increases with decreasing shell thickness.

It is interesting to note that for  $\varrho = 1$  and sufficiently large values of  $t$  and  $\omega$ , the absolute maximum of  $T_{II}/(\beta \sin \theta)$  approaches the value  $1/\sqrt{\omega}$  [eq. (54)]. This limiting value is independent of shell thickness  $1 - \varrho_0$ . To obtain an indica-

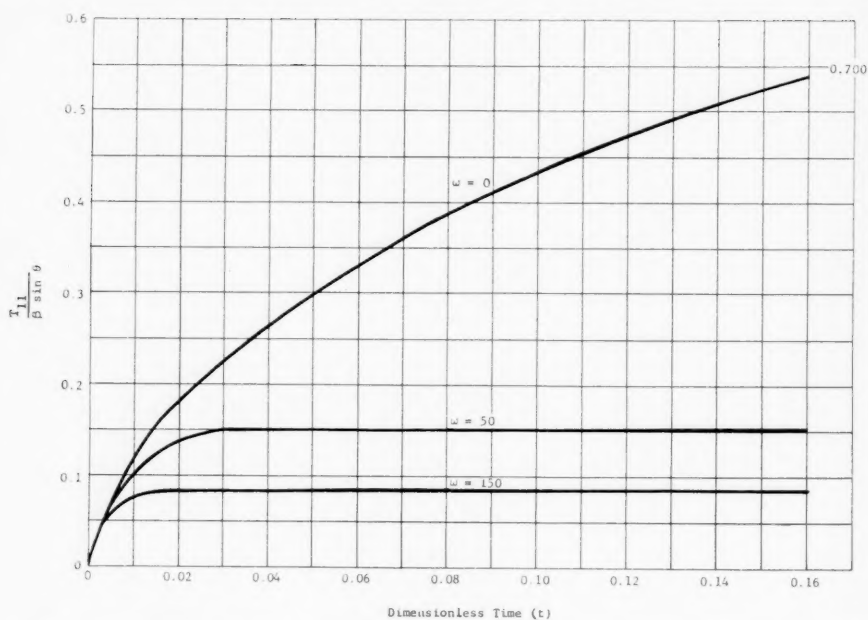


Fig. 6. Maximum spin rate dependent temperature components vs dimensionless time ( $\varphi = \omega t$ ,  $q_0 = 0.500$ ,  $q = 1$ ), isothermal case

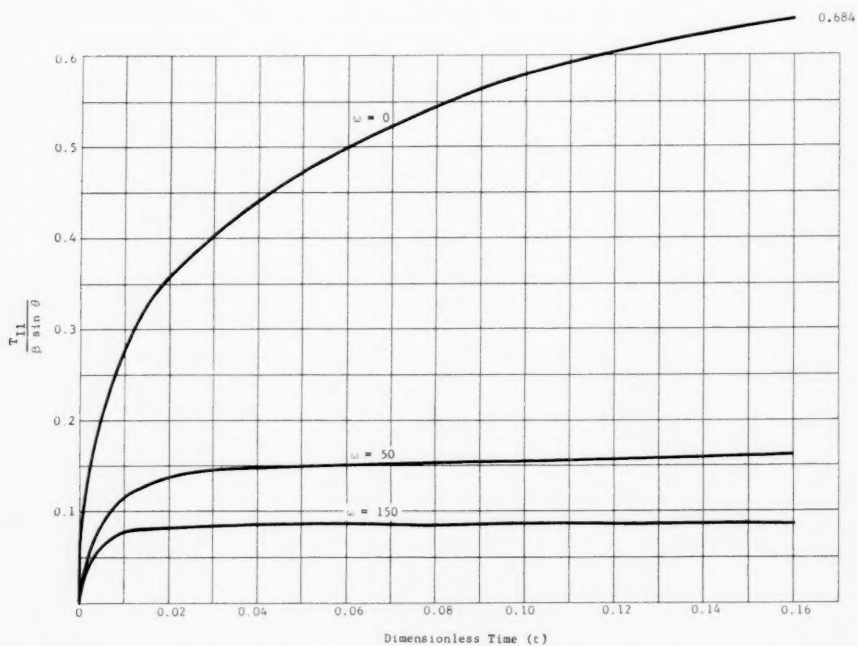


Fig. 7. Maximum spin rate dependent temperature component vs dimensionless time ( $\varphi = \omega t$ ,  $q_0 = 0.625$ ,  $q = 1$ ), isothermal case

tion of the applicability of this formula, consider the case of re-entry of a steel shell of outside radius  $R = 20$  cm and diffusivity  $K = 0.07$  cm<sup>2</sup>/sec, rotating with an angular speed of  $\Omega = 1$  rpm  $= (2\pi/60)$  rad/sec. We obtain

$$\omega = \frac{R^2}{K} \Omega = \frac{(20)^2 (2\pi)}{(0.07) (60)} \approx 597,$$

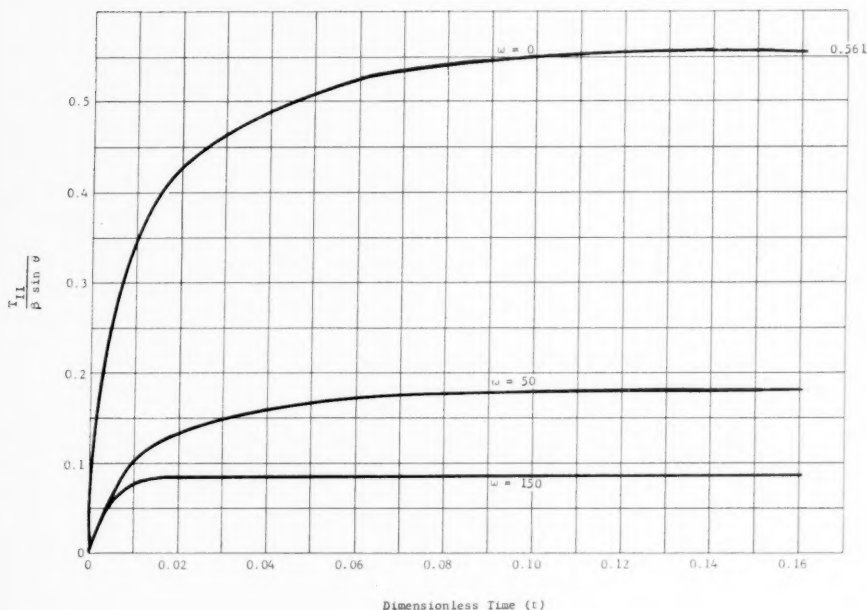


Fig. 8. Maximum spin rate dependent temperature component vs dimensionless time ( $\varphi = \omega t$ ,  $q_0 = 0.750$ ,  $q = 1$ ), isothermal case

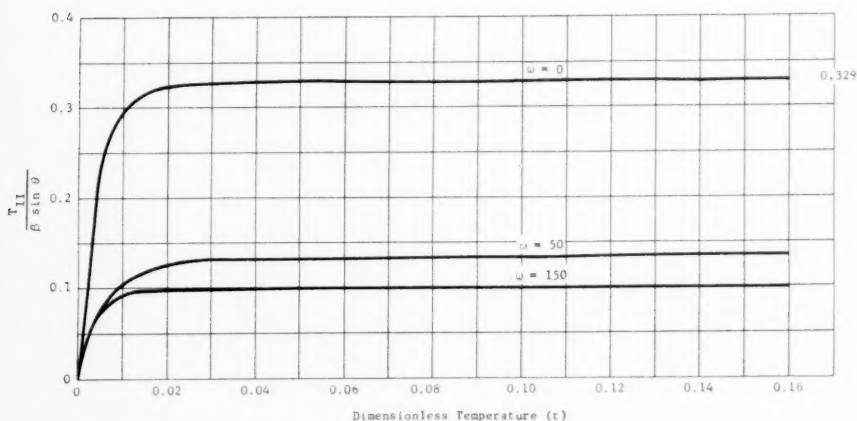


Fig. 9. Maximum spin rate dependent temperature component vs dimensionless time ( $\varphi = \omega t$ ,  $q_0 = 0.875$ ,  $q = 1$ ), isothermal case

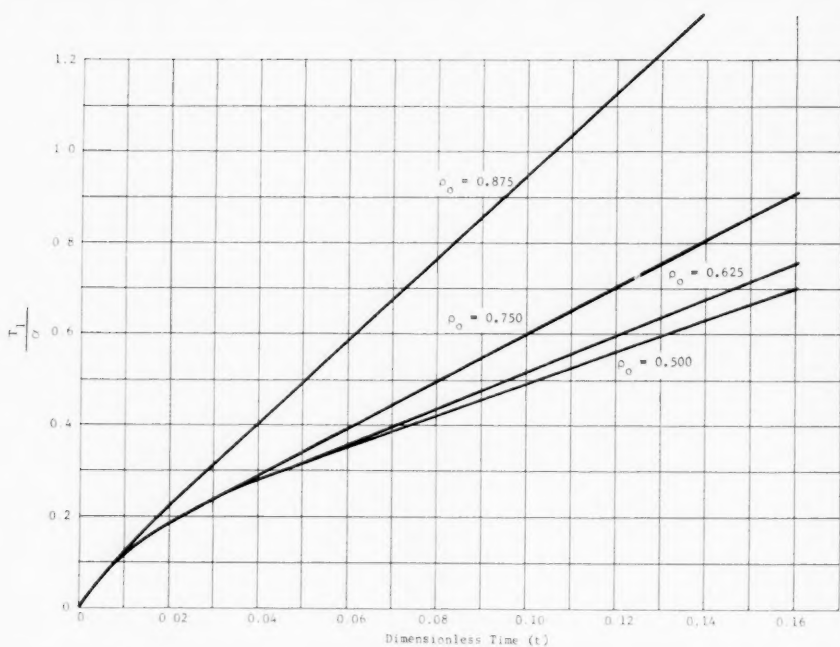


Fig. 10. Spin rate independent temperature component vs dimensionless time ( $q = 1$ ), adiabatic case

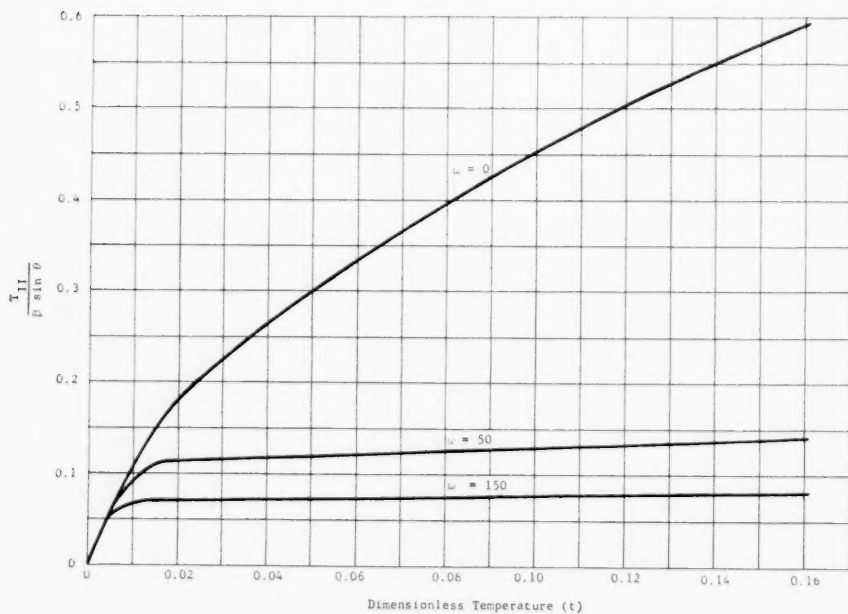


Fig. 11. Maximum spin rate dependent temperature component vs dimensionless time ( $q = \omega t$ ,  $q_0 = 0.500$ ,  $q = 1$ ), adiabatic case

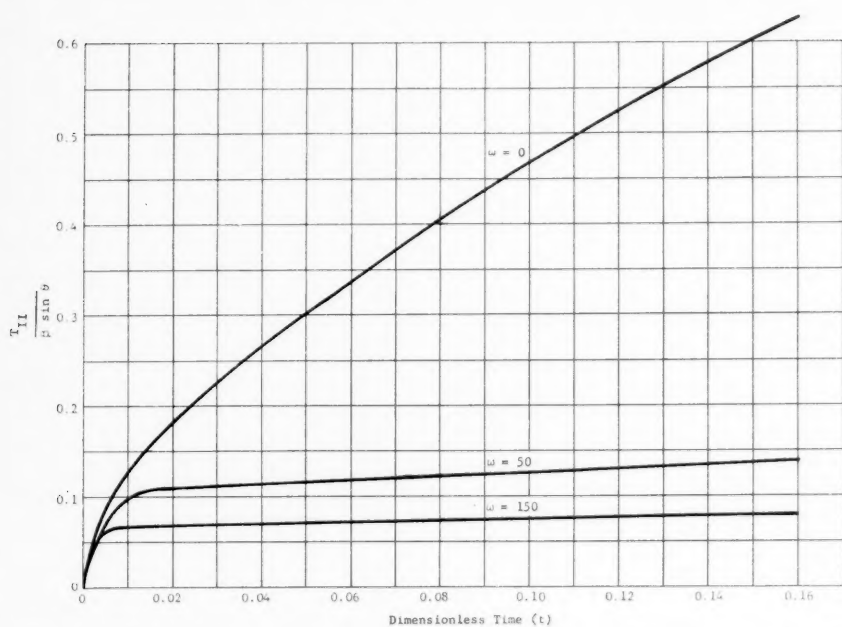


Fig. 12. Maximum spin rate dependent temperature component vs dimensionless time ( $\varphi = \omega t$ ,  $q_0 = 0.625$ ,  $q = 1$ ), adiabatic case

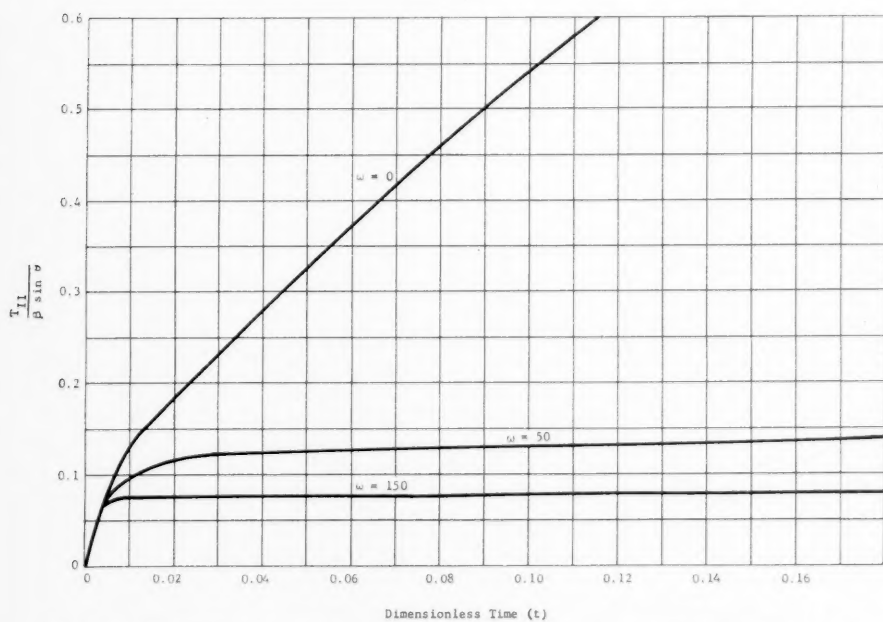


Fig. 13. Maximum spin rate dependent temperature component vs dimensionless time ( $\varphi = \omega t$ ,  $q_0 = 0.750$ ,  $q = 1$ ), adiabatic case

and when  $t = 0.16$  we have

$$\tau = \frac{R^2}{K} = \frac{(0.16)(20)^2}{0.07} = 914 \text{ sec} = 15.3 \text{ minutes.}$$

Therefore, the dimensionless time  $t = 0.16$  in Figs. 5, 6, 7, and 8 is of the order of total time required for re-entry, and  $1/\sqrt{\omega} = 1/\sqrt{597} \cong 0.041$ . Since  $\alpha \approx \beta$  we see that in this case  $T_{II}/(\beta \sin \theta)$  is negligible compared to  $T_1/\alpha$  (for values of  $t > 0.02$ ).

## 2. Adiabatic Case

Fig. 10 shows a plot of the spin-independent portion of temperature for  $q = 1$  and with inside radius  $q_0$  as a parameter. Unlike the isothermal case, these curves approach a linear asymptote  $\frac{A_1 + A_0 t}{(1 - q_0)}$  where  $A_1$  and  $A_0$  are defined by eqs. (62) and (63), respectively. For corresponding times, the value of  $T_1/\alpha$  decreases with an increase in shell thickness, unlike the isothermal case where  $T_1/\alpha$  increases with increasing shell thickness.

The value of the spin-dependent component of stagnation-point temperature  $T_{II}/(\beta \sin \theta)$  as a function of time is plotted in Figs. 11, 12, 13, and 14 for a shell with inner radius  $q_0 = 0.500, 0.625, 0.750$ , and  $0.875$ , respectively [eq. (69)]



Fig. 14. Maximum spin rate dependent temperature component vs dimensionless time ( $q = \omega t$ ,  $q_0 = 0.875$ ,  $q = 1$ ), adiabatic case

with  $T_{II} = \max(T_2 + T_3)$ . As in the isothermal case, when  $\omega$  and  $t$  are sufficiently large,  $T_{II}/(\beta \sin \theta)$  is negligible compared to  $T_1/\alpha$ . Table 2 indicates the temperature alleviation as a function of spin rate with inner radius as a parameter. For all cases considered, temperature alleviation is approximately equal to 40%. In this case the limiting value for  $T_{II}/(\beta \sin \theta)$  is  $1/\sqrt{\omega}$  when  $t \rightarrow \infty$  and  $\omega \rightarrow \infty$ , and  $q = 1$  [eq. (80)], and in practical cases this formula is applicable when  $\omega > 150$ .



Table 1. *Tabulation of Results, Isothermal Case*

$$\frac{T_I}{\alpha}$$

$q_0 \backslash t$	0.016	0.08	0.16
0.500	0.16	0.42	0.62
0.625	0.16	0.395	0.52
0.750	0.16	0.31	0.33
0.875	0.13	0.14	0.14

$$\left( \frac{T_{II}}{\beta \sin \theta} \right); \omega = 0$$

$q_0 \backslash t$	0.016	0.08	0.16
0.500	0.16	0.39	0.54
0.625	0.33	0.55	0.64
0.750	0.405	0.54	0.56
0.875	0.32	0.33	0.33

Temperature Alleviation ( $^{\circ}_0$ ),  $\omega = 150$ 

$q_0 \backslash t$	0.016	0.08	0.16
0.500	25	38	40
0.625	51	50	48
0.750	58	54	54
0.875	53	53	53

Note: % Alleviation =  $\frac{(T_{II})_{\omega=0} - (T_{II})_{\omega=150}}{T_I + (T_{II})_{\omega=0}} \times 100$ , if  $\alpha \cong \beta$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Table 2. *Tabulation of Results, Adiabatic Case*

$$\frac{T_I}{\alpha}$$

$q_0 \backslash t$	0.016	0.08	0.16
0.500	0.16	0.42	0.70
0.625	0.16	0.44	0.75
0.750	0.16	0.50	0.91
0.875	0.19	0.77	1.50

$$\left( \frac{T_{II}}{\beta \sin \theta} \right); \omega = 0$$

$\varrho_0 \backslash t$	0.016	0.08	0.16
0.500	0.16	0.39	0.59
0.625	0.16	0.40	0.63
0.750	0.16	0.46	0.765
0.875	0.18	0.71	1.26

Temperature Alleviation (%)

$\varrho_0 \backslash t$	0.016	0.08	0.16
0.500	25	38	40
0.625	25	38	40
0.750	25	40	41
0.875	27	43	43

Note: % Alleviation =  $\frac{(T_{II})_{\omega=0} - (T_{II})_{\omega=150}}{T_I + (T_{II})_{\omega=0}} \times 100$  if  $\alpha \cong \beta$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

## V. Inversion of Laplace Transforms

### 1. Inversion

The inverse LAPLACE transform of  $\bar{T}_j(z)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) is given by the complex inversion integral

$$\begin{aligned} T_j(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\bar{T}_j(z)\} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\beta_2 \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2 - i\beta_2}^{\gamma_2 + i\beta_2} e^{zt} \bar{T}_j(z) dz \quad (81) \end{aligned}$$

where  $\gamma_2$  must be greater than the real part of all the singularities of  $\bar{T}_j(z)$ . We shall use the calculus of residues to evaluate the integral in all three cases [16], [17], and [18].

In all three cases to be treated,  $\bar{T}_j$  may be considered a single-valued function of  $z$  with an enumerably infinite number of poles in the complex plane. We complete the contour by an arc of the parabola  $C_n$ :

$$r k_0^2 = \frac{2 a_n^2}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{2 a_n^2}{1 - \cos \theta} \quad (82)$$

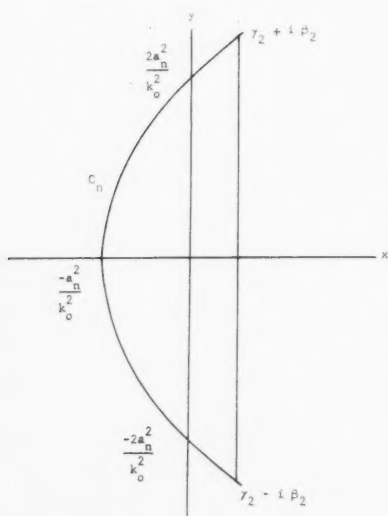


Fig. 15. Contour of integration

as shown in Fig. 15. We select for  $a_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) a sequence of values so that the arc does not pass through a pole of  $\bar{T}_j(z)$ . In each case we will show that

the integral taken along the arc tends to zero as  $a_n$  tends to infinity. A sufficient condition for this complex line integral to vanish is that whenever  $z$  is on  $C_n$

$$|\bar{T}_j(z)| < \frac{M}{|z|^k}; \quad (83)$$

where  $M$  and  $k$  are constants independent of  $n$ , and  $k > 0$ . If this condition is fulfilled, the line integral in the inversion formula, eq. (81), can be replaced by the limit, as  $n$  tends to infinity, of  $2\pi i$  times the sum of the residues of the integrand at its poles within the region shown in Fig. 15, as  $a_n \rightarrow \infty$ . This follows from CAUCHY's residue theorem.

The expressions  $\bar{T}_j(z)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) in this report are such that

$$|C z^k \bar{T}_j(z)|^2 \leq \left| \frac{g(z)}{q(z)} \right|^2 \quad (84)$$

where  $k > 0$ ,  $C$  is independent of  $z$  and

$$\begin{aligned} g(z) &= g_1(z) \sinh k_1 \sqrt{z} \pm \sqrt{z} g_2(z) \cosh k_1 \sqrt{z} \\ q(z) &= q_1(z) \sinh k_0 \sqrt{z} \pm \sqrt{z} q_2(z) \cosh k_0 \sqrt{z} \end{aligned} \quad (85)$$

with  $k_0 > k_1$ , and where  $g_1(z)$ ,  $g_2(z)$ ,  $q_1(z)$  and  $q_2(z)$  are polynomials in  $z$ .

It follows that

$$\begin{aligned} |g(z)|^2 &\leq |g_1(z)|^2 |\sinh k_1 \sqrt{z}|^2 + \\ &+ 2 |\sqrt{z}| |g_1(z) g_2(z)| |\sinh k_1 \sqrt{z} \cosh k_1 \sqrt{z}| + |z| |g_2(z)|^2 |\cosh k_1 \sqrt{z}|^2 \\ \text{and} \\ |q(z)|^2 &\geq |q_1(z)|^2 |\sinh k_0 \sqrt{z}|^2 - 2 |\sqrt{z}| |q_1(z) q_2(z)| |\sinh k_0 \sqrt{z} \cosh k_0 \sqrt{z}| + \\ &+ |z| |q_2(z)|^2 |\cosh k_0 \sqrt{z}|^2. \end{aligned} \quad (86)$$

Substituting  $z = r e^{i\theta}$  and  $\sqrt{z} = \sqrt{r} e^{i(\theta/2)}$  in (86) gives

$$\begin{aligned} |g(z)|^2 &\leq |g_1(z)|^2 \left\{ \sinh^2 \left( k_1 \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \right) + \sin^2 \left( k_1 \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \right) \right\} + 2 \sqrt{r} |g_1(z) g_2(z)| \cdot \\ &\cdot \sqrt{\sinh^2 \left( k_1 \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \right) \cosh^2 \left( k_1 \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \right) + \sin^2 \left( k_1 \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \right) \cos^2 \left( k_1 \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \right)} + \\ &+ r |g_2(z)|^2 \left\{ \sinh^2 \left( k_1 \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \right) + \cos^2 \left( k_1 \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \right) \right\} \end{aligned}$$

or

$$|g(z)|^2 \leq \cosh^2 \left( k_1 \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \right) \{ \sqrt{r} |g_2(z)| + |g_1(z)| \}^2 \quad (87)$$

and

$$\begin{aligned} |q(z)|^2 &\geq |q_1(z)|^2 \left\{ \sinh^2 \left( k_0 \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \right) + \sin^2 \left( k_0 \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \right) \right\} - 2 \sqrt{r} |q_1(z) q_2(z)| \cdot \\ &\cdot \sqrt{\sinh^2 \left( k_0 \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \right) \cosh^2 \left( k_0 \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \right) + \sin^2 \left( k_0 \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \right) \cos^2 \left( k_0 \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \right)} + \\ &+ r |q_2(z)|^2 \left\{ \sinh^2 \left( k_0 \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \right) + \cos^2 \left( k_0 \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (88)$$

We now take  $z$  on a parabola  $C_n$  as given in eq. (82) (Fig. 15), with

$$a_n = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (89)$$

If we divide the numerator and denominator by  $\cosh^2(k_0 \sqrt{r} \cos \theta/2)$ , we obtain from (84) on  $C_n$ :

$$|C z^k \bar{T}_j(z)|^2 \leq \frac{\cosh^2\left(k_1 \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}\right)}{\cosh^2\left(k_0 \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}\right)} \frac{(\sqrt{r}|g_2(z)| + |g_1(z)|)^2}{\left\{ \sqrt{r}|q_2(z)| - |q_1(z)| \left| \tanh\left(k_0 \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}\right) \right| \right\}^2} \quad (90)$$

Now,

$$\frac{\cosh^2\left(k_1 \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}\right)}{\cosh^2\left(k_0 \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}\right)} \leq 1$$

because  $\cosh u$  increases with  $|u|$ . Thus, eq. (90) becomes

$$|C z^k \bar{T}_j(z)|^2 \leq \frac{(\sqrt{r}|g_2(z)| + |g_1(z)|)^2}{(\sqrt{r}|q_2(z)| - |q_1(z)|)^2} \quad (91)$$

provided  $\sqrt{r}|q_2(z)| - |q_1(z)| > 0$  for large  $r$ .

In case  $\sqrt{r}|q_2(z)| - |q_1(z)| < 0$  for large  $r$ , we change the path of integration to the parabolas  $C_n$  with  $a_n = (2n - 1)\pi/2$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), and carry through a similar argument to obtain

$$|C z^k \bar{T}_j(z)|^2 \leq \frac{(\sqrt{r}|g_2(z)| + |g_1(z)|)^2}{(|q_1(z)| - \sqrt{r}|q_2(z)|)^2}. \quad (92)$$

Now,  $g_1(z)$ ,  $g_2(z)$ ,  $q_1(z)$  and  $q_2(z)$  depend on  $r$  and  $\theta$ , so we choose  $r$  and  $\theta$ , which maximize the right-hand member of the inequality (92). Then it is shown that this gives an inequality of the form (83) and, therefore, establishes the validity of the inversion of eqs. (22), (33), (38), (59), (66), and (68).

## 2. The Isothermal Case

In the inversion of  $\bar{T}_1(p)$ , with reference to eq. (22), it is easily established that the equation

$$q \bar{T}_1(z) e^{zt} = f(z) e^{zt} = \frac{1}{z} \frac{g(z)}{q(z)} e^{zt} \quad (93)$$

has an isolated pole at  $z = 0$  with residue

$$\frac{q_0 q T_i + \alpha (q - q_0)}{q_0} \quad (94)$$

The remaining poles of eq. (94) are given by  $q(z) = 0$ , i.e.,

$$\sinh \sqrt{z}(1 - q_0) - \sqrt{z} \cosh \sqrt{z}(1 - q_0) = 0. \quad (95)$$

The substitution  $\sqrt{z}(1 - q_0) = i \xi_n$  reduces eq. (95) to eq. (25)

$$\tan \xi_n = \frac{\xi_n}{1 - q_0}.$$

The positive roots  $\xi_n$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) of eq. (25) are tabulated and shown to

be real in Chapter VI. It follows that the roots of eq. (95) are  $z_n = -\xi_n^2/(1 - \varrho_0)^2$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), and that the residues of  $f(z) e^{zt}$  in eq. (93) are given by

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z} \cdot \frac{g(z)}{dq(z)} e^{zt} \right)_{z=z_n} \quad (96)$$

By summing the residues, eqs. (94) and (96), we obtain eq. (23).

Now consider eq. (22) in the form

$$[\varrho z \bar{T}_1(z)] = z \cdot f(z) = \varrho_0 T_1 f_1(z) - \alpha f_2(z) \quad (97)$$

with

$$\left. \begin{aligned} f_1(z) &= \frac{\sinh \sqrt{z}(1 - \varrho) - \sqrt{z} \cosh \sqrt{z}(1 - \varrho)}{\sinh \sqrt{z}(1 - \varrho_0) - \sqrt{z} \cosh \sqrt{z}(1 - \varrho_0)} \\ f_2(z) &= \frac{\sinh \sqrt{z}(\varrho - \varrho_0)}{\sinh \sqrt{z}(1 - \varrho_0) - \sqrt{z} \cosh \sqrt{z}(1 - \varrho_0)} \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

From eq. (91) it follows that

$$|f_1(z)| \leq \left( \frac{\sqrt{r} + 1}{\sqrt{r} - 1} \right)^2 < 4 \quad \text{and} \quad |f_2(z)|^2 \leq \frac{1}{(\sqrt{r} - 1)^2} < \frac{1}{4} \quad (99)$$

since  $(\sqrt{r} + 1)^2/(\sqrt{r} - 1)^2$  and  $1/(\sqrt{r} - 1)^2$  are decreasing functions for large  $r$ , with the maximum values being given for least  $r$  on any  $C_n$ , i.e.,

$$r = \frac{\pi^2}{(1 - \varrho_0)^2} \geq 4\pi^2.$$

From (97) and (99) with  $z$  on  $C_n$

$$|z \cdot \bar{T}_1(z)| \leq \frac{2 T_0 \varrho_0}{\varrho} + \frac{\alpha}{2} < 4 \varrho_0 T_0 + \frac{\alpha}{2} = M$$

or

$$|\bar{T}_1(z)| < \frac{M}{|z|}, \quad (100)$$

which establishes the inverse of  $\bar{T}_1(z)$  by means of (81).

If

$$f(z) = \frac{\varrho^2 \bar{T}_2(z)}{\beta \sin \theta \cos \varphi} = \frac{z}{z^2 + \omega^2} \frac{g(z)}{q(z)}, \quad (101)$$

from eq. (33) it is readily determined by expanding  $g(z)/q(z)$  in a LAURENT'S series, about  $z = 0$ , that  $z = 0$  is not a pole of  $f(z)$  ( $\omega \neq 0$ ). The case  $\omega = 0$  is treated as a separate case. Therefore, the poles of  $f(z)$  are at  $z = \pm i\omega$  and those given by  $q(z) = 0$ . The substitution of

$$\sqrt{z}(1 - \varrho_0) = i\xi$$

in this equation leads to eq. (45) (real roots  $= \pm \xi_n$  as shown in Chapter VI) so that  $q(z) = 0$  has only the roots  $z = -\xi_n^2/(1 - \varrho_0)^2$ .

The evaluation of the residues of  $f(z) e^{zt}$  at  $z = \pm i\omega$  and  $z = -\xi_n^2/(1 - \varrho_0)^2$  are now obtained as

$$\frac{1}{2} \frac{g(i\omega)}{q(i\omega)} e^{i\omega t} + \frac{1}{2} \frac{g(-i\omega)}{q(-i\omega)} e^{-i\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{z}{(z^2 + \omega^2) \frac{dq(z)}{dz}} e^{zt} \right\}_{z = -\frac{\xi_n^2}{(1 - \varrho_0)^2}} \quad (102)$$

and these results, when simplified, lead to eq. (35).

The application of the inequality (91) to  $\varrho^2 \bar{T}_2(z)/(\beta \sin \theta \cos \varphi) = f(z)$  as given by eq. (33) results in

$$\left| \frac{z \cdot \varrho^2 \bar{T}_2(z)}{\beta \sin \theta \cos \varphi} \right|^2 \leq \left\{ \frac{\sqrt{r+2}r+2}{\sqrt{r}(r-2)-2(r+2)} \right\}^2 < 1 \quad (103)$$

since the function  $\left\{ \frac{\sqrt{r+2}r+2}{\sqrt{r}(r-2)-2(r+2)} \right\}$  is decreasing and satisfies the specified conditions for  $r \geq 36$ . The last inequality is obtained by evaluating the expression for  $r$  less than the smallest  $r$  on any  $C_n$ , which is  $r_{\min} = (2\pi)^2$ . Since  $\varrho \geq \frac{1}{2}$ , the inequality (103) may be written as

$$|\bar{T}_2(z)| < \frac{4\beta \sin \theta \cos \varphi}{|z|} = \frac{M}{|z|} \quad (104)$$

which justifies the inverse of  $\bar{T}_2(z)$ .

By inspecting eq. (38), it is readily seen that the inverse of  $\bar{T}_3(z)$  is as given in eq. (39). The validity of the latter equation is established by noticing that

$$|\bar{T}_3(z)| < \frac{4\beta \sin \theta \sin \varphi}{|z|^2},$$

an even stronger inequality than for  $\bar{T}_2(z)$ .

### 3. Adiabatic Case

The inversion of  $\bar{T}_1(z)$ ,  $\bar{T}_2(z)$ , and  $\bar{T}_3(z)$  for this case is performed and established in an entirely analogous manner, and leads to the results given by eqs. (61) and (69).

## VI. Reality and Tabulation of Roots of Equations (25), (45), (65), and (75)

To prove that the roots of eqs. (25), (45), (65), and (75) are real we shall use the following.

### 1. Theorem

If  $p(z)$  and  $q(z)$  are polynomials of degree  $n$  and  $m$ , respectively, with no common zeros, and  $q(z)$  and  $\cos z$  have no common zeros, then, for  $k$  and  $N$  sufficiently large, the equation

$$\tan z = \frac{p(z)}{q(z)}, \quad (z = x + iy, \quad x \text{ and } y \text{ real}): \quad (105)$$

1. has the same number of roots as

$$p(z) \cdot \cos z = 0 \quad (106)$$

such that  $-N < y < N$  and  $-k\pi < x < k\pi$ , if  $n > m$ ;

2. has the same number of roots as

$$q(z) \cdot \sin z = 0 \quad (107)$$

such that  $-N < y < N$  and  $-(2K-1)\pi/2 < x < (2K-1)\pi/2$ , if  $n < m$ .

### 2. Proof

Eq. (105) is equivalent to

$$q(z) \sin z - p(z) \cos z = 0. \quad (108)$$

Let

$$\begin{aligned} p(z) &= a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \\ q(z) &= b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m \\ a_0 &\neq 0, \quad b_0 \neq 0, \end{aligned} \quad (109)$$

and for the first hypothesis ( $n > m$ ),

$$\left. \begin{aligned} f(z) &= -p(z) \cos z \\ g(z) &= q(z) \sin z \end{aligned} \right\} \quad (110)$$

then

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} \right|^2 = \left| \frac{p(z)}{q(z)} \right|^2 \frac{(\cos^2 x + \sinh^2 y)}{(\sin^2 x + \sinh^2 y)}. \quad (111)$$

When  $\sin^2 x + \sinh^2 y \neq 0$ ,

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} \right|^2 \geq \tanh^2 y \cdot \left| \frac{p(z)}{q(z)} \right|^2. \quad (112)$$

If  $C_{k,m}$  is the rectangular contour determined by  $y = \pm N$  and  $x = \pm k\pi$ , then on  $y = \pm N$

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} \right|^2 \approx \left| \frac{a_0}{b_0} z^{n-m} \right|^2.$$

Since  $\left| \frac{a_0}{b_0} z^{n-m} \right|^2$  may be made arbitrarily large, we have for sufficiently large  $N$

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} \right|^2 > 1 \quad \text{or} \quad |f(z)| > |g(z)|. \quad (113)$$

Also, on  $x = \pm k\pi$ , from eq. (111),

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} \right|^2 = \coth^2 y \cdot \left| \frac{p(z)}{q(z)} \right|^2 > \left| \frac{p(z)}{q(z)} \right|^2 > 1$$

for sufficiently large  $k$ , or  $|f(z)| > |g(z)|$ . Therefore, for sufficiently large  $k$  and  $N$ , and  $z$  on  $C_{k,N}$ ,

$$|f(z)| > |g(z)|.$$

The theorem follows for the first hypothesis ( $n > m$ ) by the application of ROUCHE's Theorem to  $f(z)$  and  $g(z)$  on the contour  $C_{k,N}$  [19].

The theorem is proved for the second hypothesis ( $n < m$ ) by a similar argument with

$$f(z) = q(z) \sin z \quad g(z) = -p(z) \cos z$$

and the closed contour  $C_{k,N}$  is defined by  $y = \pm N$ ,  $x = \pm (2k-1)\pi/2$ . The various cases of  $m = n$  may be handled in a similar manner, but are not treated here.

The theorem is used in the following way. In the first hypothesis, take values of  $k$  and  $N$ , so that  $C_{k,N}$  includes all zeros of  $p(z)$  ( $k \geq 10$  usually suffices). Then, a comparison of the number of roots of eq. (106) with the number of real roots of eq. (105) (from the tabulation of real roots inside  $C_{k,N}$ ) establishes a correspondence between the real roots of eq. (105) and the totality of complex roots of the same equation. If this correspondence is one to one, then all of the roots of eq. (105) are real.

As an example of the procedure involved, consider the equation

$$\tan z = \frac{(1 - \varrho_0)^2 z}{(1 - \varrho_0)^2 + \varrho_0 z^2}, \quad 0 < \varrho_0 < 1, \text{ [eq. (65)]}.$$

This equation has 21 real roots  $z = \xi_n$  such that  $-(19\pi)/2 < \xi_n < (19\pi)/2$ , counting the triple root at  $z = 0$  (Table 5). This is the same as the total number of complex roots of

$$\sin z \cdot \{(1 - \varrho_0)^2 + \varrho_0 z^2\} = 0 \quad (114)$$



Table 3. *Table of Roots*

The first<sup>1</sup> 40 solutions of  $\tan \xi = \frac{\xi}{1 - q_0}$

	$q_0 = 0.500$	$q_0 = 0.625$	$q_0 = 0.750$	$q_0 = 0.875$
1	1.165 553 0	1.287 336 3	1.393 241 6	1.486 918 5
2	4.604 211 4	4.631 593 0	4.658 770 5	4.685 711 4
3	7.789 878 2	7.805 970 3	7.822 026 2	7.838 029 9
4	10.949 934	10.961 369	10.972 785	10.984 185
5	14.101 720	14.110 590	14.119 457	14.128 314
6	17.249 775	17.257 023	17.264 273	17.271 515
7	20.395 833	20.401 967	20.408 094	20.414 220
8	23.540 702	23.546 015	23.551 323	23.556 632
9	26.684 797	26.689 480	26.694 167	26.698 850
10	29.828 361	29.832 554	29.836 743	29.840 933
11	32.971 553	32.975 345	32.979 136	32.982 926
12	36.114 466	36.117 925	36.121 389	36.124 849
13	39.257 163	39.260 350	39.263 532	39.266 716
14	42.399 701	42.402 651	42.405 597	42.408 545
15	45.542 108	45.544 855	45.547 598	45.550 342
16	48.684 410	48.686 975	48.689 545	48.692 112
17	51.826 626	51.829 036	51.831 450	51.833 862
18	54.968 770	54.971 043	54.973 315	54.975 589
19	58.110 853	58.113 005	58.115 154	58.117 305
20	61.252 886	61.254 929	61.256 968	61.259 008
21	64.394 883	64.396 821	64.398 760	64.400 700
22	67.536 832	67.538 684	67.540 532	67.542 383
23	70.678 753	70.680 520	70.682 291	70.684 060
24	73.820 648	73.822 339	73.824 035	73.825 729
25	76.962 517	76.964 138	76.965 766	76.967 391
26	80.104 365	80.105 925	80.107 483	80.109 043
27	83.246 189	83.247 694	83.249 193	83.250 695
28	86.388 002	86.389 451	86.390 895	86.392 345
29	89.529 797	89.531 196	89.532 591	89.533 987
30	92.671 581	92.672 931	92.674 278	92.675 626
31	95.813 351	95.814 657	95.815 960	95.817 264
32	98.955 108	98.956 373	98.957 635	98.958 898
33	102.096 86	102.098 08	102.099 30	102.100 53
34	105.238 59	105.239 78	105.240 97	105.242 16
35	108.380 33	108.381 47	108.382 63	108.383 83
36	111.522 05	111.523 17	111.524 29	111.525 41
37	114.663 76	114.664 85	114.665 94	114.667 04
38	117.805 47	117.806 53	117.807 59	117.808 65
39	120.947 17	120.948 20	120.949 24	120.950 27
40	124.088 87	124.089 88	124.090 88	124.091 89

<sup>1</sup> Not counting  $\xi = 0$  which is a root of order 1.

Table 4. *Table of Roots*

The first<sup>1</sup> 40 solutions of  $\tan \xi = \frac{\xi}{(1 - q_0) \{ \frac{2}{3} q_0 \xi^2 + 2(1 - q_0)^{3/2} \}}$

	$q_0 = 0.500$	$q_0 = 0.625$	$q_0 = 0.750$	$q_0 = 0.875$
1	1.435 624 0	1.420 093 3	1.444 818 2	1.498 218 9
2	4.707 694 4	4.678 946 1	4.676 420 2	4.689 500 9
3	7.852 950 2	7.834 533 8	7.832 627 0	7.840 299 6
4	10.995 194	10.981 802	10.980 364	10.985 810
5	14.136 983	14.126 492	14.125 349	14.129 574
6	17.278 657	17.270 038	17.269 093	17.272 550
7	20.420 288	20.412 982	20.412 177	20.415 095
8	23.561 900	23.555 558	23.554 858	23.557 390
9	26.703 501	26.697 905	26.697 285	26.699 515
10	29.845 102	29.840 088	29.839 538	29.841 533
11	32.986 701	32.982 162	32.981 659	32.983 468
12	36.128 300	36.124 153	36.123 694	36.125 340
13	39.269 892	39.266 080	39.265 656	39.267 171
14	42.411 489	42.407 952	42.407 565	42.408 967
15	45.553 081	45.549 791	45.549 425	45.550 735
16	48.694 674	48.691 597	48.691 254	48.692 480
17	51.836 266	51.833 378	51.833 056	51.834 203
18	54.977 859	54.975 136	54.974 833	54.975 914
19	58.119 456	58.116 877	58.116 590	58.117 612
20	61.261 049	61.258 598	61.258 326	61.259 301
21	64.402 641	64.400 311	64.400 052	64.400 978
22	67.544 233	67.542 012	67.541 768	67.542 649
23	70.685 825	70.683 704	70.683 467	70.684 314
24	73.827 417	73.825 388	73.825 162	73.825 967
25	76.969 013	76.967 064	76.966 846	76.967 622
26	80.110 605	80.108 733	80.108 525	80.109 266
27	83.252 197	83.250 397	83.250 197	83.250 912
28	86.393 789	86.392 055	86.391 862	86.392 550
29	89.535 381	89.533 709	89.533 522	89.534 187
30	92.676 978	92.675 358	92.675 179	92.675 820
31	95.818 570	95.817 002	95.816 831	95.817 450
32	98.960 162	98.958 644	98.958 479	98.959 079
33	102.101 75	102.100 28	102.100 12	102.100 70
34	105.243 34	105.241 92	105.241 76	105.242 33
35	108.384 94	108.383 55	108.383 39	108.383 95
36	111.526 53	111.525 19	111.525 04	111.525 57
37	114.668 12	114.666 81	114.666 67	114.667 18
38	117.809 71	117.808 44	117.808 30	117.808 80
39	120.951 31	120.950 07	120.949 93	120.950 42
40	124.092 90	124.091 69	124.091 56	124.092 03

<sup>1</sup> Not counting  $\xi = 0$  which is a root of order 3.

Table 5. *Table of Roots*

The first<sup>1</sup> 40 solutions of  $\tan \xi = \frac{(1 - \varrho_0)^2 \xi}{(1 - \varrho_0)^2 + \varrho_0 \xi^2}$

	$\varrho_0 = 0.500$	$\varrho_0 = 0.625$	$\varrho_0 = 0.750$	$\varrho_0 = 0.875$
1	3.285 998 0	3.210 071 0	3.167 671 0	3.147 250 7
2	6.360 686 6	6.318 588 4	6.296 398 3	6.286 030 3
3	9.477 202 1	9.448 532 5	9.433 611 7	9.426 679 3
4	12.605 896	12.584 228	12.573 004	12.567 799
5	15.739 663	15.722 267	15.713 270	15.709 109
6	18.876 006	18.861 486	18.853 982	18.850 509
7	22.013 842	22.001 377	21.994 942	21.991 969
8	25.152 607	25.141 697	25.136 064	25.133 459
9	28.292 003	28.282 294	28.277 286	28.274 971
10	31.431 831	31.423 091	31.418 588	31.416 503
11	34.571 980	34.564 032	34.559 938	34.558 043
12	37.712 374	37.705 088	37.701 328	37.699 592
13	40.852 948	40.846 219	40.842 750	40.841 147
14	43.993 665	43.987 417	43.984 201	43.982 712
15	47.134 501	47.128 669	47.125 667	47.124 279
16	50.275 430	50.269 967	50.267 147	50.265 846
17	53.416 443	53.411 296	53.408 642	53.407 417
18	56.557 515	56.552 654	56.550 147	56.548 990
19	59.698 642	59.694 037	59.691 662	59.690 566
20	62.839 815	62.835 440	62.833 189	62.832 143
21	65.981 029	65.976 862	65.974 718	65.973 726
22	69.122 276	69.118 303	69.116 252	69.115 302
23	72.263 554	72.259 754	72.257 791	72.256 886
24	75.404 859	75.401 217	75.399 336	75.398 470
25	78.546 190	78.542 689	78.540 884	78.540 052
26	81.687 538	81.684 171	81.682 435	81.681 635
27	84.828 904	84.825 661	84.823 990	84.823 220
28	87.970 284	87.967 158	87.965 547	87.964 805
29	91.111 681	91.108 663	91.107 111	91.106 391
30	94.253 091	94.250 173	94.248 670	94.247 977
31	97.394 512	97.391 688	97.390 237	97.389 562
32	100.535 94	100.533 20	100.531 80	100.531 15
33	103.677 38	103.674 73	103.673 37	103.672 74
34	106.818 84	106.816 26	106.814 94	106.814 32
35	109.960 30	109.957 79	109.956 50	109.955 91
36	113.101 77	113.099 33	113.098 08	113.097 50
37	116.243 24	116.240 87	116.239 65	116.239 09
38	119.384 71	119.382 41	119.381 22	119.380 68
39	122.526 20	122.523 96	122.522 79	122.522 26
40	125.667 69	125.665 50	125.664 37	125.663 85

<sup>1</sup> Not counting  $\xi = 0$  which is a root of order 3.

Table 6. *Table of Roots*

The first<sup>1</sup> 40 solutions of  $\tan \xi = \frac{2(1-q_0)^2 \xi (2(1-q_0)^2 + q_0 \xi^2)}{2(1-q_0)^4 (2-\xi^2) + q_0^2 \xi^4}$

	$q_0 = 0.500$	$q_0 = 0.625$	$q_0 = 0.750$	$q_0 = 0.875$
1	0.920 137 90	0.646 048 78	0.402 612 84	0.188 430 01
2	3.455 764 8	3.284 443 3	3.194 630 1	3.152 966 3
3	6.442 625 1	6.354 843 7	6.309 719 4	6.288 875 0
4	9.531 032 7	9.472 544 3	9.442 471 1	9.428 574 9
5	12.646 025	12.602 193	12.579 642	12.569 220
6	15.771 671	15.736 622	15.718 579	15.710 246
7	18.902 636	18.873 440	18.858 404	18.851 457
8	22.036 643	22.011 619	21.998 733	21.992 781
9	25.172 546	25.150 652	25.139 380	25.134 169
10	28.309 717	28.290 258	28.280 234	28.275 602
11	31.447 770	31.430 257	31.421 241	31.417 072
12	34.586 466	34.570 546	34.562 349	34.558 559
13	37.725 651	37.711 057	37.703 540	37.700 064
14	40.865 200	40.851 730	40.844 791	40.841 588
15	44.005 042	43.992 535	43.986 095	43.983 117
16	47.145 117	47.133 445	47.127 435	47.124 656
17	50.285 384	50.274 441	50.268 805	50.266 200
18	53.425 810	53.415 509	53.410 202	53.407 750
19	56.566 361	56.556 632	56.551 621	56.549 305
20	59.707 022	59.697 807	59.693 062	59.690 869
21	62.847 776	62.839 022	62.834 515	62.832 431
22	65.988 610	65.980 272	65.975 981	65.973 997
23	69.129 512	69.121 555	69.117 457	69.115 563
24	72.270 481	72.262 868	72.258 044	72.257 132
25	75.411 493	75.404 201	75.400 440	75.398 704
26	78.552 558	78.545 554	78.541 944	78.540 277
27	81.693 660	81.686 926	81.683 455	81.681 851
28	84.834 798	84.828 313	84.824 972	84.823 433
29	87.975 970	87.969 716	87.966 498	87.965 006
30	91.117 171	91.111 133	91.108 025	91.106 589
31	94.258 396	94.252 560	94.249 557	94.248 164
32	97.399 646	97.394 002	97.391 092	97.389 748
33	100.540 91	100.535 44	100.532 63	100.531 32
34	103.682 21	103.676 90	103.674 17	103.672 91
35	106.823 52	106.818 37	106.815 71	106.814 49
36	109.964 85	109.959 84	109.957 26	109.956 07
37	113.106 18	113.101 32	113.098 82	113.097 66
38	116.247 53	116.242 80	116.240 37	116.239 24
39	119.388 90	119.384 30	119.381 92	119.380 82
40	122.530 28	122.525 79	122.523 48	122.522 41

<sup>1</sup> Not counting  $\xi = 0$  which is a root of order 3.

inside the contour  $C_{10,N}$  if  $N$  is sufficiently large. Now the real roots of eq. (65) rapidly approach the value  $k\pi$  so that the number of roots located within the contour increases by two as the boundary is changed from  $C_{k,N}$  to  $C_{k+1,N}$ ,  $k \geq 10$ .

Therefore, by the principle of mathematical induction, a one-to-one correspondence is established between the number of real roots of eq. (65) and the totality of its roots inside any contour  $C_{k,N}$ . This completes the proof that all roots of eq. (65) are real. A similar procedure has been applied to eqs. (25), (45), and (75), establishing that all the roots of these equations are real. These roots are tabulated in Tables 3, 4, 5, and 6.

## VII. Conclusions

This study shows:

1. The temperature rise that a spherical shell experiences during hypersonic entry into the atmosphere is reduced when the shell is rotated;
2. Maximum temperature alleviation occurs when the axis of rotation is at right angles to the free-stream velocity;
3. Stagnation temperature can be reduced by as much as 50% when the shell has an isothermal internal boundary, and by as much as 40% when the shell has an adiabatic (perfectly insulated) internal boundary. Relatively low rotation rates (order of magnitude 1 rpm or greater) are required to accomplish this reduction;
4. In the adiabatic case, temperature alleviation is relatively insensitive to shell thickness, while in the isothermal case, alleviation increases moderately with decreasing shell thickness;
5. Temperature reduction due to rotation is proportional to the rate of rotation, but beyond relatively low rotation rates no appreciable decrease in temperature occurs.

## References

1. L. LEES, Laminar Heat Transfer Over Blunt-Nosed Bodies at Hypersonic Flight Speeds. *Jet Propulsion* **26**, No. 4, 259-269 (1956).
2. E. R. VAN DRIEST, The Problem of Aerodynamic Heating. *Aeronaut. Engng. Rev.* **15**, No. 10, 26-41 (1956).
3. A. J. HANAWALT, A. H. BLESSING, and C. M. SCHMIDT, Thermal Analysis of Stagnation Regions with Emphasis on Heat-Sustaining Nose Shapes at Hypersonic Speeds. *J. Aero/Space Sci.* **26**, No. 5, 257-263 (1959).
4. M. J. BRUNNER, Analysis of the Aerodynamic Heating for a Re-Entrant Space Vehicle. *J. Heat Transfer* **81**, No. 3, 223-229 (1959).
5. N. H. KEMP and F. R. RIDDELL, Heat Transfer to Satellite Vehicles Re-Entering the Atmosphere. *Jet Propulsion* **27**, No. 2, 132-137 (1957).
6. H. S. SEIFERT (ed.), *Space Technology*. New York: J. Wiley, 1959.
7. N. J. HOFF (ed.), *High Temperature Effects in Aircraft Structures*. New York: Pergamon Press, 1958.
8. D. J. MASSON and C. GAZLEY, Surface Protection and Cooling Systems for High-Speed Flight. *Aeronaut. Engng. Rev.* **15**, No. 11, 46 (1956).
9. G. W. SUTTON, The Temperature History in a Thick Skin Subjected to Laminar Heating during Entry into the Atmosphere. *Jet Propulsion* **28**, No. 1, 40-45 (1958).
10. A. DEMETRIADES, Heat Conduction in a Circular Cylinder Rotating With Its Axis Normal to the Direction of Flight. *ARS Journal* **29**, No. 9, 653-655 (1959).
11. H. REISMANN, Temperature Distribution in a Spinning Sphere During Atmospheric Entry. R-60-23. The Martin Company, Denver, Colorado, August 1960.

12. H. J. ALLEN and A. J. EGGERS, JR., A Study of the Motion and Aerodynamic Heating of Missiles Entering the Earth's Atmosphere at High Supersonic Speeds. NACA TN 4047, October 1957.
13. J. P. LEWIS and R. S. RUGGERI, Investigation of Heat Transfer From a Stationary and Rotating Ellipsoidal Forebody of Fineness Ratio 3. NACA TN 3837, November 1956.
14. M. B. GLAUERT, A Boundary Layer Theorem, with Applications to Rotating Cylinders. *J. Fluid Mechanics* **2**, 89—99 (1957).
15. CARSLAW and JAEGER, Conduction of Heat in Solids, 2nd Ed. London: Oxford University Press, 1959.
16. CARSLAW and JAEGER, Operational Methods in Applied Mathematics, 2nd Ed. London: Oxford University Press, 1948.
17. R. V. CHURCHILL, Operational Mathematics, 2nd Ed. New York: McGraw-Hill, 1958.
18. C. J. TRANTER, Integral Transforms in Mathematical Physics, 2nd Ed. London: Methuen, 1956.
19. E. C. TITCHMARSH, The Theory of Functions. London: Oxford University Press, 1932.

Vol.  
7  
1961

Vo  
7  
196



## Foreword

In this and a following issue (Vol. VIII, 1962, Fasc. 2—3) of "Astronautica Acta" there will appear the papers presented at the first international symposium sponsored by the International Academy of Astronautics of the International Astronautical Federation. The theme of the meeting was "Space Flight and Re-Entry Trajectories." It was held at *Louveciennes* outside of Paris on June 19—21, 1961. Sixteen papers by authors from nine countries were presented; attendees numbered from 80 to 100.

The organizing committee for the symposium was as follows:

Prof. PAUL A. LIBBY, Polytechnic Institute of Brooklyn, U.S.A., Chairman;

Prof. LUIGI BROGLIO, University of Rome, Italy;

Prof. B. FRAEIJIS DE VEUBEKE, University of Liège, Belgium;

Dr. D. G. KING-HELE, Royal Aircraft Establishment, Farnborough, Hants, United Kingdom;

Prof. J. M. J. KOOY, Royal Military School, Breda, Netherlands;

Prof. JEAN KOVALEVSKY, Bureau des Longitudes, Paris, France;

Prof. RUDOLF PESEK, Academy of Sciences, Prague, Czechoslovakia.

The detailed arrangements for the meeting were made in a most satisfactory manner by Dr. FRANK J. MALINA, Deputy Director of IAA and Mr. A. R. WEILLER, Acting Secretary of IAA.

Prof. THEODORE VON KÁRMÁN, Director of IAA, in his remarks closing the symposium indicated his satisfaction at the interest being shown in "the science of the future." The papers which follow will make a permanent contribution to the literature of this science.

**Paul A. Libby**

Professor of Aeronautical Engineering  
Assistant Director, Aerodynamics Laboratory  
Polytechnic Institute of Brooklyn

Vo  
7  
19

## Possible Paths for Re-Entry Into the Earth's Gravitational Field Avoiding the Radiation Belts

By

W. F. Hilton<sup>1</sup>

(With 2 Figures)

### Abstract — Zusammenfassung — Résumé

**Possible Paths for Re-Entry Into the Earth's Gravitational Field Avoiding the Radiation Belts.** Although it is quite possible to traverse the radiation belts sufficiently rapidly to avoid a lethal radiation dose to a human pilot, the vehicle itself will become radioactive, and act as a secondary source, particularly if the vehicle has thick shielding material.

Most solar system trajectories will lie close to the plane of the earth's orbit (ecliptic). However, it is suggested in this paper that re-entry into the atmosphere should take place in the polar plane, by a very slight inclination of the transfer orbit. This will enable braking ellipses to miss the outer (electron) and the inner (proton) belts altogether, by having successive apogees outside, between and inside these radiation belts. An alternative solution is to have a single intermediate braking ellipse having apogee between the belts at about 5000 miles altitude (8000 km).

Some useful re-entry trajectories have been calculated on a digital computer, both for non lifting ballistic vehicles, and for vehicles having a lift/drag ratio of unity. In the latter case the pilot is able to vary his trajectory, and incidentally to raise his perigee height by the application of positive lift followed by a 180° roll and a period of negative lift.

**Rückkehrbahnen zur Erdoberfläche unter Vermeidung der Strahlungsgürtel.** Wenn es auch durchaus möglich ist, die Strahlungsgürtel so rasch zu durchqueren, daß tödliche Strahlungsdosen für die Besatzung vermieden werden können, so wird doch das Fahrzeug selbst radioaktiv und sendet Sekundärstrahlung aus.

Die meisten Bahnen in unserem Sonnensystem sind wenig gegen die Ekliptik geneigt. Es wird nun vermutet, daß Rückkehrbahnen in die Atmosphäre ungefähr in einer Meridianebene liegen sollen. Dies verlangt „Bremsellipsen“ außerhalb, zwischen und innerhalb der Strahlungsgürtel, wobei auch die entsprechenden Apogäen außerhalb, zwischen und innerhalb dieser Strahlungsgürtel liegen sollen.

Mit Hilfe eines Digitalrechners wurden derartige Bahnen für ballistische Flugkörper ohne Auftrieb und für Fahrzeuge mit einem Auftriebs-Widerstands-Verhältnis Eins ermittelt. In letzterem Falle kann der Pilot die Bahn ändern, insbesondere die Höhe des Perigäums beeinflussen.

**Orbites possibles de rentrée dans le champ de gravitation terrestre évitant les ceintures de radiation.** Quoique cela soit tout à fait possible de traverser les ceintures de radiation suffisamment vite pour éviter au pilote une dose de radiation mortelle, l'engin lui-même deviendra radioactif, et agira comme une source secondaire, particulièrement s'il possède un épais blindage.

<sup>1</sup> D.Sc., Ph.D., F.B.I.S., F.R.Ae.S.; Head of Astronautics Division, Hawker Siddeley Aviation Ltd., Astronautics Division, Welkin House, 10/11 Charterhouse Sq., London, E. C. 1, England.

La plupart des trajectoires dans le système solaire seront dans un plan proche de celui de l'orbite terrestre (écliptique). Toutefois, il est conseillé dans cet article que la rentrée dans l'atmosphère se fasse dans un plan polaire, ce qui est possible par une légère inclinaison de l'orbite de transfert. Ceci conduira à freiner les ellipses, pour éviter simultanément la ceinture extérieure d'électrons et celle intérieure de protons, en ayant successivement des apogées à l'extérieur des deux ceintures de radiation, entre elles deux puis à l'intérieur de la plus proche. Une solution alternative serait d'avoir une seule ellipse intermédiaire de freinage ayant un apogée entre les ceintures à environ 5000 milles d'altitude (8000 km).

Quelques trajectoires utiles de rentrée ont été calculées tant pour des engins n'offrant pas de portance aérodynamique, que pour des engins possédant un rapport portance sur traînée égal à l'unité. Dans ce dernier cas, le pilote peut faire varier sa trajectoire, et incidemment faire croître son périégée, en se servant d'une portance positive, suivie d'un tonneau de  $180^\circ$  et d'une période à portance négative.

## I. Introduction

With a few minor exceptions, the whole of the solar system lies fairly closely in the plane of the ecliptic. For this reason most manned trips into space beyond a few earth diameters will be in this plane of the ecliptic. Hence the solar system and possible transfer orbits between planets are usually represented on a two-dimensional sheet of paper. Straightforward re-entry into the earth's gravitational field will necessarily involve traversing the VAN ALLEN radiation belts at their densest region. However, if the plane of the transfer orbit is tilted very slightly so as to pass above the North or South Poles of the earth, re-entry will lie approximately in the earth's polar plane and be perpendicular to the plane of the ecliptic. This permits avoidance of the VAN ALLEN radiation belts by a suitable choice of apogee heights. It is thus possible to change an interplanetary transfer orbit in the plane of the ecliptic into a re-entry orbit perpendicular to this plane, without the use of rocket fuel. Fuel will only be needed for the adjustment of errors.

The precise solution of this problem involves a solution of the three-body problem in celestial mechanics, or at least the 2-body problem. As a first approximation for the purposes of this paper, the satellite has been assumed to enter the earth's gravitational field with a finite velocity vector due to travelling in the sun's gravitational field. At a distance of about half a million miles from the earth, the effect of the sun may be neglected and the plane of the re-entry will be the plane containing both the velocity vector and the centre of the earth. We have merely postulated that this plane will be nearly perpendicular to the plane of the ecliptic. Two types of drag retarding re-entry are possible [1] namely: lifting and non-lifting. These are considered in Sections III and IV below. The non-lifting case is found to require an impossibly high degree of accuracy in navigation. It is however of interest in the case of lifting re-entry as it shows the target trajectory which we are trying to follow and leaves aerodynamic lift in reserve to make up for any errors in navigation.

The re-entry trajectories have been calculated on a Pegasus digital computer using the method described in [2]. The mass loading of the vehicle has been taken at 20 lbs. per sq. ft., the angle between the flat underside and the direction of motion as  $45^\circ$  and the angle between the shock wave and the direction of motion as  $63.5^\circ$ . The non-lifting case has been calculated by assuming that the vehicle rolls continuously at this angle, thus producing zero net lift.

The earth's atmosphere is assumed to be a perfect vacuum above 200 miles altitude. In space the satellite is assumed to move according to the ordinary equation for elliptical motion:

$$V^2 = \mu \left[ \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right] \quad (1)$$

where  $V$  is the velocity at a radius  $r$  from the centre of the earth and  $a$  is the semi major axis of the ellipse. If we put  $a$  equal to  $\infty$  this becomes the equation for a parabola.

If a satellite returns to the earth after a mission to another planet such as Mars, it will acquire a velocity due to the transfer orbit, which will correspond to a negative semi axis for the ellipse. It is convenient to express these interplanetary missions in this fashion. The resulting curve is of course a hyperbola and not an ellipse due to this change of sign. Using this method and assuming perigee heights between 50 and 60 miles, solutions have been found giving successive braking ellipses followed by landing on the earth's surface. It is necessary to have at least one braking ellipse if excessive heating of the vehicle during the final entry is to be avoided. Solutions have been sought which give the apogees of each braking ellipse above, between or below the VAN ALLEN radiation belts.

The need for a manned vehicle to avoid these belts is discussed in Section II below, together with their effect in making the vehicle itself radioactive. However, re-entry may be delayed after a long interplanetary trip to permit preliminary read-out of data etc. A method of doing this by means of aerodynamic lift is discussed in Section IV. By using a little rocket fuel the satellite could be parked indefinitely in one of these orbits avoiding the VAN ALLEN belts, where it might prove possible to put fresh fuel and a fresh crew on board and use the vehicle again. It would of course be vital that the second crew should not attempt a voyage of many months' duration in a vehicle already rendered radioactive by the VAN ALLEN belts. Hence the need for orbits having VAN ALLEN belt avoidance.

## II. Effect of Van Allen Radiation Belts

It has been known for several years that the VAN ALLEN radiation belts can cause permanent damage to solar cells and to transistors. Rapidly moving protons and electrons can also cause permanent damage to human tissues. For example, one traverse of the ellipse shown in Fig. 1 would give a dose of 177.5 Roentgen of which 7.5 R would be due to protons and 170 due to electrons. The lethal human dose is approximately 450 R.

Naturally, the vehicle itself will afford some protection, particularly against the lighter electrons. However, recent reports on the Discoverer satellites which have been recovered after flight in the VAN ALLEN belts show that the structure of the satellite itself becomes radio-active in the process of stopping these radiations. Tritium and Argon 37 were found in the shell of this satellite after recovery.

It therefore follows that an optimum thickness of protection may exist, if the vehicle is to be inhabited for some time after traversing the radiation belts.

It must also be remembered that the re-entry trajectories described in this paper will work equally well in reverse, for take-off at the start of an interplanetary mission, by replacing the drag of the atmosphere at 50 miles by the thrust of rockets at some 150 miles altitude.

It will be essential to minimize the radio-active contamination of the vehicle before setting off on a voyage of some months duration. It is therefore concluded that the orbits described in this paper will have more than academic interest.

### III. Non-Lifting Drag Retarded Re-Entry

There is nothing novel in using a digital computer to calculate re-entry trajectories. The method used in [2] was employed, using the standard atmosphere described in [3] by KING-HELE. This program will also permit elliptical or hyperbolic orbits before re-entry, as the earth's gravitational field is completely included.

An interesting and useful variation was obtained by starting at sub-orbital speed in the atmosphere, and running the orbit backwards, with negative drag, so as to discover the apogee height from which a particular successful re-entry could be made.

A value of Lift/drag = 1 was assumed in all cases, with the vehicle rolling so as to eliminate the effect of lift. The successive apogee and perigee heights are quoted in the following tables, for orbits *A* and *B* starting from 40,000 miles, *C*, *D*, *E* and *F* having infinite apogee, and orbits *G* and *H* having a "negative apogee height" of 63,902 miles corresponding to a return from a Mars mission.

*Re-Entry from 40,000 Miles Apogee*  
Orbit *A*

Apogee height in miles	40,000	8,643	688	
Perigee height in miles	55	54	46	lands

Excellent VAN ALLEN avoidance.

Orbit *B*

Apogee	40,000	6,531		
Perigee	54	52'93	lands	

As illustrated in Fig. 1.

*Parabolic Re-Entry*  
Orbit *C*  
*Velocity at Infinity is Zero*

Apogee	$\infty$	17,231	3,738	
Perigee	55	54'5	52'8	lands

Close above proton belt. First perigee should be above 55 miles.

Orbit *D*

Apogee	$\infty$	12,780	1,007	
Perigee	54	53'27	47'33	lands

Close below proton belt. First perigee should be below 54 miles. As illustrated in Fig. 2.

Orbit *E*

Apogee	$\infty$	8,958	lands
Perigee	53	51° 9'	

Single pass between VAN ALLEN belts.

Orbit *F*

Apogee	$\infty$	301	
Perigee	50	lands	

Severe heating, hardly cools between first and final re-entries.

*Mars Mission*

Velocity at infinity corresponds to "apogee height" of  $-63,902$  miles, i.e.  $V = 1.85$  miles/sec. at infinity.

Orbit *G**Unsuccessful*

Apogee	$-63,902$	$-1,302,120$	
Perigee	60	Does not return	

Fails to be captured by earth.

Orbit *H**Successful*

Apogee	$-63,902$	36,262	7,148	55
Perigee	55	54° 53'	53° 50'	lands

First true apogee outside electron belts.

Second apogee between belts. Lands without crossing proton belt.

It will be seen that the whole re-entry corridor is less than 5 miles high, if it be assumed that at least one braking ellipse is necessary to spread the kinetic heating into two equal parts, separated by a time interval to permit cooling by radiation.

The navigation problem will thus be quite severe for non-lifting re-entry. Variable geometry, leading to a variable drag coefficient would be desirable, but we must always have a bluff body shape, if excessive heating due to viscous boundary layers is to be avoided. The bulk of the drag must always be caused by shock-waves, which will heat the air at a distance from the body.



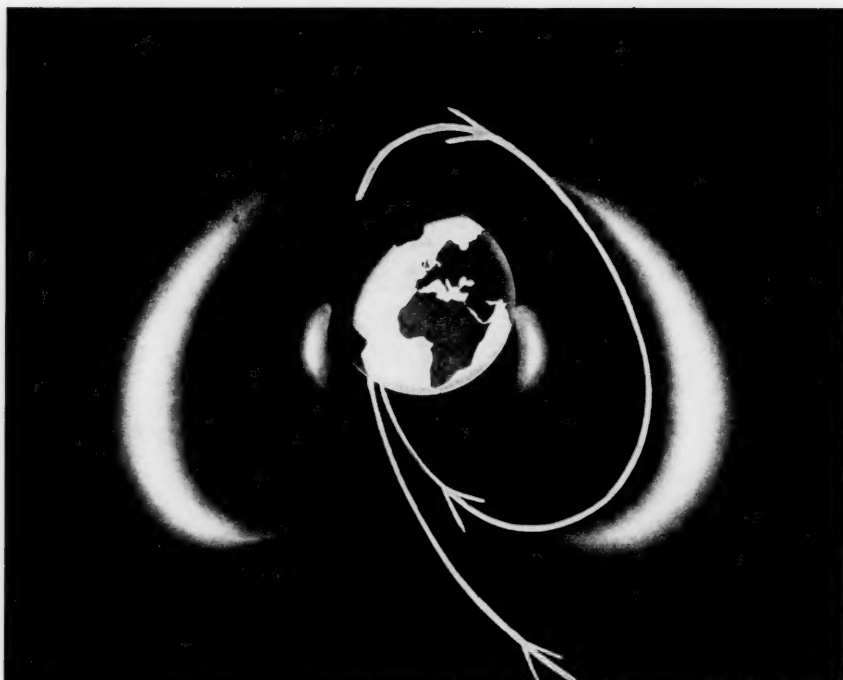


Fig. 1. The VAN ALLEN radiation fields. Orbit *B*, good radiation avoidance

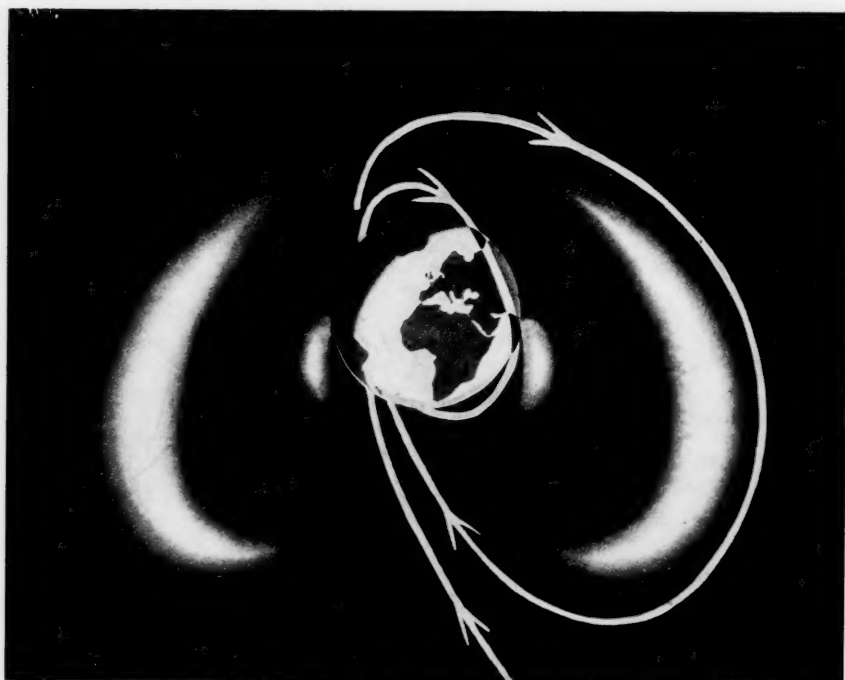


Fig. 2. The VAN ALLEN radiation fields. Orbit *D*, fair radiation avoidance

Orbit *A* shows an apogee between the radiation belts, followed by one below both belts, while this latter orbit is eliminated if we lower initial perigee height by only one mile, as in orbit *B*, and Fig. 1.

For parabolic re-entry orbit *C* makes three circuits, with both apogees too low with respect to the radiation belts. Orbit *D* is better, and is illustrated in Fig. 2, while orbit *E* makes a single pass between the belts before landing, and orbit *F* comes straight in and lands, with severe heating problems.

Returning from a Mars mission, orbit *G* fails to be captured by the earth, while orbit *H*, some five miles lower in perigee height, is ideal, making one apogee outside the belts, one between, and then lands.

#### IV. Drag Retarded Re-Entry of Lifting Vehicles

In the absence of lift, Section III shows the delicate choice of first perigee height. In addition, from interplanetary missions it is obviously desirable to kill the velocity in excess of parabolic velocity, but the figures have been included to cover the case of less successful missions, where fuel reserves have been previously depleted, but return to the earth without rocket braking is still possible.

It has already been shown in [2] how the use of positive aerodynamic lift can assist final re-entry at speeds below 4.8 miles per second, and this method has been used in all cases in this paper. It has also been shown in [1] how negative lift can assist, and indeed in some cases ensure, re-entry from hyperbolic orbits above 7 miles per second.

The question arises, can we employ lift to prolong the final descent? The application of constant lift coefficient when passing through the atmosphere at speeds between 5 and 7 miles/sec. merely results in twisting the axes of the ellipse, and produces a negligible effect on perigee height.

#### V. Increase of Perigee Height by Use of Positive and Negative Lift

It is of interest to report that perigee height can in fact be raised considerably by entering the atmosphere with positive lift, and rolling to generate negative lift after passing perigee. An example of this is shown in orbit *A'* below, which has the same initial conditions as orbit *A* during the first non-lifting re-entry. By the use of this trick it was found possible to make three or four passes between the radiation belts instead of one. It is always necessary to delay the roll manoeuvre until after perigee, since the downward lift must not be so great as to cause an actual descent and loss of altitude.

##### Orbit *A'*

##### *Re-Entry from 40,000 Miles Apogee*

As orbit *A*, but employing positive and negative lift to delay landing.

Apogee	40,000	8643	5512	4218	3549	3096
Perigee	55	54	61	66	69	73
Height of roll manoeuvre	—	62	65.2	69.9	71.3	

Since orbit  $A'$  enters radiation belt if it has an apogee height of 3549 miles, we reverse the procedure and enter the atmosphere from apogee of 4218 miles with negative lift, and roll to positive lift at 54.7 miles.

Orbit  $A''$ 

Apogee	4218	728
Perigee	66	lands
Height of reverse roll manoeuvre	54.7	

These tables show how perigee height can be raised very considerably, although necessarily remaining in the sensible atmosphere. Orbit  $A''$  shows that a great deal of decision rests with the pilot as to whether to land a lifting vehicle, or to proceed.

### VI. Conclusion

It is hoped that these exact trajectories will have indicated the large degree of control enjoyed by the pilot on re-entry. With the addition of a small amount of rocket fuel, almost any near orbit could be selected for "parking".

Finally the author is indebted to Mr. R. LOTT for the computing effort involved in preparing this paper.

### References

1. W. F. HILTON, Recovery after Re-Entry, by the Use of Aerodynamic Lift. High Altitude and Satellite Rocket Symposium, July 1957.
2. W. F. HILTON, Re-Entry Paths for Manned Satellites. Proceedings of the Xth International Astronautical Congress, London 1959, Vol. II, p. 526. Wien: Springer, 1960.
3. D. G. KING-HELE, Determination of Atmospheric Density by Means of Satellites. Nature, May 1959.

### Discussion

Mr. FERRI: You go round the earth several times and you do not know if you can avoid the VAN ALLEN belts.

Mr. HILTON: This is true for the re-entry from 40,000 miles but for the hyperbolic re-entry having a negative apogee height, as I called it in the paper, that is to say coming from Mars on a transfer orbit governed by eq. (1), then it is essential that the vehicle enters the atmosphere at about the correct height.

In the paper I show an example of an unsuccessful re-entry with perigee at 60 miles, but by lowering the first perigee to 55 miles successful re-entry is achieved.

You are successful, for instance, if you come back from Mars to the perigee of 55 miles. You then get successive apogees of 36,000, 7,000 and 55, followed by landing.

Mr. FERRI: If you go from this orbit, do you transfer to an entering orbit?

Mr. HILTON: It is quite impossible, because you see, you are at 55 miles altitude and the retardation is so high.

Mr. FERRI: Would it not be useful if the pilot used more rocket braking?

Mr. HILTON: Yes, as I said in the paper, it is very useful if the pilot has enough rocket fuel in reserve to enable him to employ rocket braking, and to reduce his velocity from hyperbolic to elliptical velocity. However, we must consider the case

of less successful missions, where the reserves of fuel have already been used in some other manoeuvre. The pilot may only have sufficient fuel to regain the earth's gravitational field, but not enough to carry out sufficient braking. The re-entry is very much easier and more certain if you can reduce velocity to an elliptical value.

Mr. FERRI: You cannot even drag in the first re-entry trajectory, you escape in an elliptic trajectory, you do not escape in a hyperbolic trajectory.

Mr. HILTON: You must lose enough velocity to reduce you to elliptical conditions, and the atmosphere has a very definite upper limit for this purpose. With regard to the pilot's comfort and heat transfer effects, 20 lb/sq.ft. is a reasonable mass loading, and the atmosphere has a top at about 55 miles for this loading. Anything about 60 miles will, as Dr. FERRI says, take a long time to re-enter, but if you make the first pass above 60 miles and at hyperbolic velocity you will be lost for ever.

Mr. FERRI: So you must transfer your trajectory to the right angle.

Mr. HILTON: I agree. I think it is the air density at perigee that is important.

Mr. FERRI: Not the re-entry angle?

Mr. HILTON: The angular re-entry is zero at perigee.

Mr. FERRI: I am talking of the angle at re-entry.

Mr. HILTON: Re-entry angle cannot be defined accurately, but perigee itself is quite precise defined as when the machine is flying tangentially.

Mr. FERRI: It is also very important to know the position in space of those radiation belts. Perhaps, sufficient information can be given in order to trace them, and do they change with the time. Then, of course it should be possible to detect movement of the belts. Perhaps this already has been done or it is going to be started.

Mr. HILTON: Naturally you are right, we know very little about the VAN ALLEN belts and they may assume a different formation at different times. They are very much affected by solar activity, particularly the electron belts, but I think by the time that man is returning from the Mars mission we are quite safe in assuming that the VAN ALLEN belts will be much more fully understood and can be forecast like the weather. This paper has shown how the pilot can avoid any known area of hazard by the use of aerodynamic lift.

Mr. STERN: You should try to avoid it, because anyhow on the border the density of electrons and protons is not the same as it is in the centre. It is less dangerous on the border than it is in the centre.

Mr. HILTON: Frankly, I used this as an exercise to show how, by using aerodynamic lift, with a given distribution of VAN ALLEN belts, it is possible to use lift and navigate without the use of rocket fuel, to enable one to accomplish a satisfactory re-entry.

## Aerodynamics of Trajectory Control for Re-Entry at Escape Speed

By

J. V. Becker<sup>1</sup>, D. L. Baradell<sup>2</sup>, and E. B. Pritchard<sup>2</sup>

(With 21 Figures)

### Abstract — Zusammenfassung — Résumé

**Aerodynamics of Trajectory Control for Re-Entry at Escape Speed.** The problems of range control during re-entry of lifting manned vehicles are analyzed from the aerodynamic point of view. The ability to reach a given destination from the extremities of the entry corridor using wholly atmospheric modes of operation is found to require moderately higher lift/drag ratios than skip modes. However, the atmospheric cases do not suffer from the inherently sensitive guidance and control problems of the skip modes. An atmospheric technique is discussed whereby lateral and longitudinal range can be varied independently, using only roll control. For the longer re-entries the earth's sphericity is found to have major influences on attainable lateral range and on the shape of the maneuver envelope.

Several types of re-entry vehicle capable of meeting the aerodynamic requirements for range control are discussed briefly. From a fixed-base simulator study for one of these vehicles it is concluded that the typical maneuvers required for range control can be performed satisfactorily by a human pilot with the aid of artificial damping.

**Aerodynamik der Bahnkontrolle beim Eintauchen in die Atmosphäre mit Fluchtgeschwindigkeit.** Die mit der Bahnkontrolle bemannter Raumfahrzeuge zusammenhängenden Probleme werden von der aerodynamischen Seite untersucht. Es wird eine Methode beschrieben, bei der Breiten- und Längenwinkel voneinander unabhängig verändert werden können, wobei nur Rollen des Fahrzeuges zugelassen wird. Für längere Eintauchbahnen muß die Kugelgestalt der Erde berücksichtigt werden.

Verschiedene Typen von Eintauchflugkörpern werden untersucht. Auf Grund von Untersuchungen an einem Simulator wird geschlossen, daß die beim Eintauchen nötigen Manöver in hinreichender Weise von einem menschlichen Piloten bewältigt werden können, wenn eine künstliche Dämpfung vorgesehen ist.

**Aérodynamique du contrôle de la trajectoire pour une rentrée à la vitesse de libération.** Les buts du contrôle de la trajectoire sont, successivement, de réduire l'angle de rentrée à une faible valeur sans dépasser les limites de la décélération tolérable, d'éviter ou de contrôler un rebondissement hors de l'atmosphère et enfin, de contrôler longitudinalement et latéralement l'atterrissage dans la zone fixée. On décrit une façon d'opérer qui permet d'obtenir le contrôle du tangage et du lacet en agissant seulement sur la commande de roulis.

Les valeurs que doit prendre le rapport portance sur traînée du véhicule, pour réussir l'atterrissage dans la zone prescrite en commençant le pilotage à l'extrémité du corridor de rentrée, sont établies pour les diverses techniques de manoeuvre envisagées. Les dimensions de la zone d'atterrissage prédéterminée depuis de longues

<sup>1</sup> Chief, Aero-Physics Division, NASA-Langley Research Center, Langley Field, Virginia, U.S.A.

<sup>2</sup> Aero-Space Technologist, NASA-Langley Research Center, Langley Field, Virginia, U.S.A.

distances, supérieures au rayon de la terre, sont analysées en employant les équations de mouvement tridimensionnelles complètes, en coordonnées sphériques polaires. On trouve que les approximations communément employées pour obtenir le point d'impact du véhicule avec le sol sont très fausses si l'on part de longues distances.

Finalement, trois véhicules-type sont comparés pour leur comportement lors des manoeuvres de rentrée. On en conclut que dans beaucoup de cas, des rentrées pilotées peuvent être réussies sans même utiliser de systèmes artificiels amortissant les mouvements du véhicule autour de ses axes.

### Notation

$A$	reference area	$t$	time
$C_D$	drag coefficient based on $A$	$T$	kinetic energy
$C_L$	lift coefficient based on $A$	$V$	velocity
$C_{L_1}, C_{L_2}$	values of $C_L$ at start and end of const. alt. maneuver (Fig. 4)	$\bar{V}$	$V\sqrt{g r_e}$
$D$	drag, component of resultant force along flight path	$\bar{V}_1$	$V$ at the end of initial pull-up and start of range-control maneuver
$D_1$	drag at start of range-control maneuver	$\bar{V}_2, \bar{V}_3$	values at start and end of constant $q$ transition maneuver (defined on Fig. 4)
$g$	acceleration due to gravity at earth's surface	$W$	gross weight of vehicle
$G$	resultant acceleration, $D/(W/g)\sqrt{1 + (L/D)^2}$	$\gamma$	path angle with respect to horizontal
$h$	altitude	$\gamma_0$	re-entry path angle at 400,000 ft altitude
$l$	lateral range measured normal to initial entry plane	$\gamma_1$	path angle at start of skip
$L$	lift, component of resultant force normal to flight path	$\lambda$	lateral displacement angle (Fig. 13)
$m$	mass	$\rho$	atmospheric density
$q$	dynamic pressure, $\rho V^2/2$	$\xi$	heading angle (Fig. 13)
$r_e$	mean radius of earth	$\phi$	roll angle (zero for unbanked vehicle)
$R$	range	$\phi_1$	roll angle at start of range-control maneuver
$AR$	range overlap for steep and shallow entries	$\psi$	range angle (Fig. 13)
$\Delta R_{E.P.}$	longitudinal range between overshoot and undershoot entry point for a given perigee location (Fig. 8)		

### I. Introduction

It is now apparent that re-entry from parabolic orbits is not only feasible but that considerable latitude exists in the choice of vehicle shape, heat protection methods, and other basic features of the re-entry system. There are, of course, many important problems remaining for research and development; the primitive solutions now envisioned lack refinement in many respects. But nevertheless the practical feasibility is clear. The researches supporting this position (some of which are covered by [1] through [14]) have naturally focused chiefly on the two prime problems of survival — deceleration and heating. Relatively little study has been devoted to the problems of successfully maneuvering the vehicle to a particular destination.

We have studied the maneuvers associated with lateral and longitudinal range control of manned lifting systems from the aerodynamic point of view. Some of the questions we have attempted to answer are: Is it possible within practical bounds of lift/drag ratio to achieve a point destination from any extremity of

the re-entry corridor? Are the  $L/D$  requirements for point destination significantly reduced if a controlled skip out of the atmosphere is permitted, and to what extent is the range control problem aggravated by such a skip maneuver? How do the various possible types of atmospheric maneuver compare as to lateral and longitudinal range, control potential, vehicle  $L/D$ , attitude control, and heat-protection requirements? While we are not concerned specifically with guidance techniques, we will examine the piloting problems associated with typical entry maneuvers with the object of answering, in a preliminary way, the question: Can a human pilot perform the types of maneuver required for range control unaided by automatic control or artificial damping systems?

## II. Uncontrolled Re-Entries

Severe restrictions are placed on the usable lift/drag ratio in trajectories which are controlled only in the sense that a fixed trim attitude is selected prior

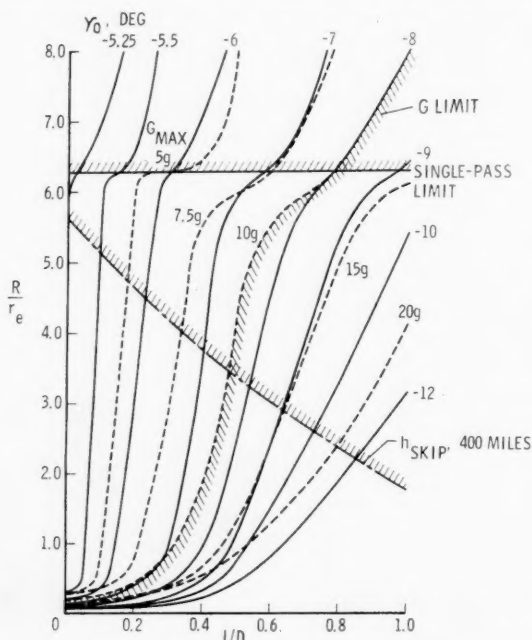


Fig. 1. Ranges for uncontrolled re-entries at constant positive  $L/D$

to contact with the atmosphere. A systematic computer study was made of such entries using the complete motion equations with the atmosphere specified in [15]. If a resultant deceleration of 10  $g$  is chosen as a nominal limit for the tolerance of human pilots and a skip apogee of 400 miles is selected to avoid penetration of the inner radiation belt, it is seen in Fig. 1 that the  $L/D$  cannot exceed 0.48. The maximum corridor depth for such entries is about  $0.8^\circ$  (14 miles), and it occurs at  $L/D \sim 0.2$ . A still more serious limitation is the very large dispersion in longitudinal range for such entries, typically of the order of 1000 miles, that results from uncertainties in the atmosphere, the vehicle aerodynamics, and in the initial position in the entry corridor. It is readily concluded that control over the trajectory must be exercised during the re-entry if reasonable entry corridor depths and range accuracy are to be achieved.

## III. Initial Re-Entry Maneuver

During the initial penetration of the atmosphere the primary objectives are to reduce the flight path angle to a value near zero without exceeding acceleration limits, and then to ascend or descend to the altitude for which the range-control maneuver is to be started. Range control is possible during the initial "pull-up" itself for noncritical entry angles. However, not much is lost in most cases by



delaying until after the pull-up is completed. Obviously the character of the initial maneuver will have a strong influence on the subsequent range potential because it determines both the path angle limits (corridor boundaries) for which range control must be provided and the energy level available at the termination of the pull-up.

Control over the  $G$  schedule and reduction of peak  $G$  near the "undershoot" or  $G$ -limited boundary of the corridor can be accomplished either by variation in vehicle attitude or geometry or both. Large changes in geometry are required to achieve the same degree of modulation by geometry control as can be obtained by attitude control of a lifting vehicle (e.g. a 20:1 change in area for a drag-modulated device is roughly equivalent to a variable-attitude vehicle with  $L/D$  of about 0.6, [16]). Attitude modulation according to GRANT's method [7] is a simple technique for either human or automatic pilot, since it involves only a continuous reduction in pitch angle to hold the resultant deceleration fixed. Maximum modulation requires reducing the drag to  $C_{D_{\min}}$  and  $C_L$  to zero. This is usually impractical from heating considerations [17] and a compromise schedule from  $C_{D_{\max}}$  to  $L/D_{\max}$  was selected for use in the present studies. The velocity at the end of this practical modulated maneuver is only slightly higher than for the corresponding fixed  $(L/D)_{\max}$  case. Thus the subsequent range capability is about the same.

The range achievable from the "overshoot" boundary of the corridor is extremely sensitive to the definition of this boundary (Fig. 2). CHAPMAN's definition (for  $-C_{L_{\max}}$ ,  $\bar{V}_{\text{exit}} = 1$ ) is impractical because it requires global range and because minute aberrations in the atmosphere or errors in entry angle will produce range variations of thousands of miles. From the piloting standpoint overshoot  $-C_{L_{\max}}$  trajectories which never develop an ascending phase appear desirable. Furthermore they mark a borderline between very long range and short range trajectories, and they have the advantage of "digging in", i.e. developing high  $G$  which is desirable for minimizing range. This definition has accordingly been adopted for the present study. It will be noted that the practical overshoot entry angle so defined is only a minor fraction of a degree smaller than CHAPMAN's value.

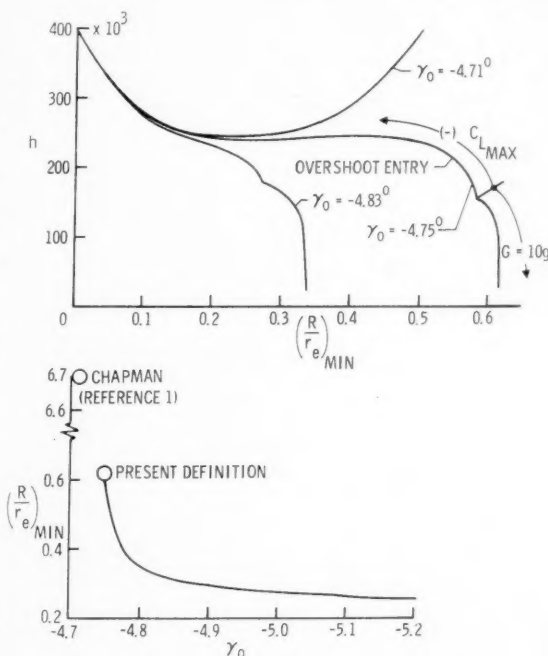


Fig. 2. Effect of entry angle on minimum range and definition of overshoot boundary used in the present study

Fig. 3 summarizes the corridor depths achievable by various initial entry maneuvers for lift/drag ratios ranging from 0 to 1. On the  $G$ -limited steep-entry boundary, with no modulation, most of the benefit of lift is realized with  $L/D$

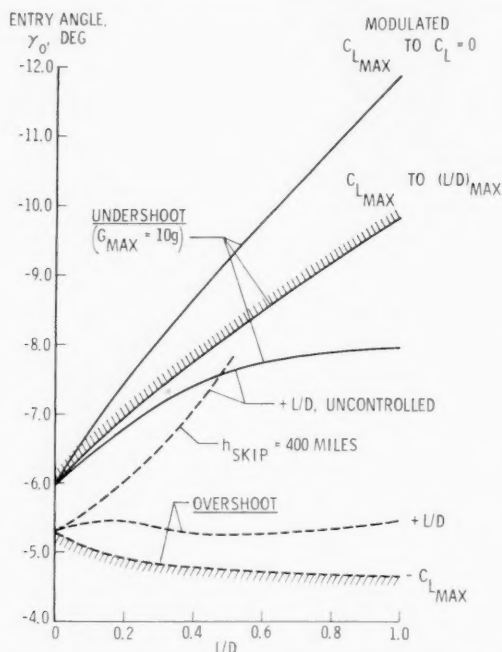


Fig. 3. Vertical boundaries of re-entry corridor as affected by  $L/D$  and type of initial maneuver. Cross-hatched boundaries were used in present range study

We will be interested in whether a given destination can be reached from both sides of the corridor or whether a reduced "usable" corridor depth is determined by this consideration.

#### IV. Aerodynamic Techniques for Range Control

The range covered during re-entry is a function of many variables: the entry velocity, entry path angle  $\gamma_0$ ,  $L/D$ ,  $W/C_D A$ , the orbit direction and inclination, the earth's rotation and oblateness, atmospheric density aberrations, and winds. Since we are concerned here with general comparisons rather than precise performance for a particular system, only the entry conditions and the vehicle parameters need be considered. It was assumed that the range control maneuver started immediately after the initial pull-up at the velocity,  $V_1$ , existing at the end of pull-up to the desired maneuver flight path (Fig. 4). The range covered during pull-up and the flight variables at the end of pull-up were determined from digital computer results. Except where noted a value of  $W/C_D A$  of 50 lb/sq ft, which is appropriate for manned vehicles in the  $L/D \approx 1/2$  to 1 category, was used.

of about one-half. Large increases in permissible entry angle result from attitude modulation. The benefits of the practical modulation technique (from  $C_{L_{max}}$  to  $(L/D)_{max}$ ) are particularly worthwhile for  $L/D > 1/2$ .

Without modulation and with the restriction of 400 miles for apogee of the skip only a very shallow corridor is available (the distance between the lowest solid curve and the uppermost dashed curve of Fig. 3). A much deeper corridor is achieved if, after an overshoot entry at fixed positive  $L/D$ , lift control is used or either avoid or control the skip. Still further expansion occurs if full negative lift is used in overshoot entries (defined as in Fig. 2) followed by lift control to avoid excessive  $G$ .

The corridor boundaries used in the subsequent range studies are indicated by the

## 1. Maximum Range

The maneuver schedules which produce the true maximum longitudinal range for a practical set of constraints are not easily determined [18]. For present

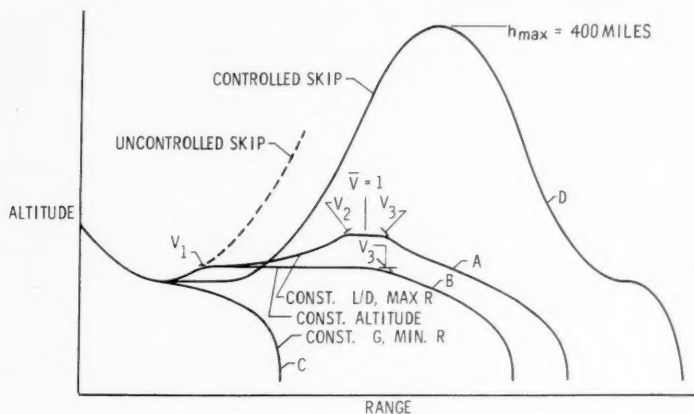


Fig. 4. Schematic comparison of trajectories used in range study

purposes, however, the constant- $L/D$  glide, modified in the vicinity of  $\bar{V} = 1$ , is a satisfactory approximation. The differential equation for range is

$$\frac{dR}{r_e} = - \frac{\cos \gamma \bar{V} d\bar{V}}{D/W} \quad (1)$$

Since all of the paths to be considered have very small angles with respect to the local horizontal over most of the glide range after the initial pull-up has been completed it is assumed that  $\cos \gamma = 1$ . The balance between the vertical aerodynamic lift, gravity force, and centrifugal force then requires that

$$\frac{L \cos \varphi}{W} = (1 - \bar{V}^2) \quad (2)$$

whence

$$\frac{dR}{r_e} = \frac{(L/D) \cos \varphi \bar{V} d\bar{V}}{\bar{V}^2 - 1} \quad (3)$$

Integration of (3) for constant  $L/D$  results in infinite range if extended to  $\bar{V} = 1$ . This is avoided by joining the supercircular and subcircular glide paths by a fixed-deceleration path, Fig. 4 (path A). Since we are interested in producing the longest possible range in these glides we choose the highest feasible altitude for this transitional phase, limited by the requirement of adequate aerodynamic control which is assumed to be met if  $q/(W/A) \geq 0.2$ . The range in the transitional maneuver itself is found to be independent of  $q/(W/A)$  and is

$$\frac{R_{\text{transition}}}{(r_e)(L/D)} = \frac{\bar{V}_2^2 - \bar{V}_3^2}{2(\bar{V}_2^2 - 1)} \approx 1 \quad (4)$$

The  $L/D$  used in (4) is the constant value applying in the glide phases of the entry and at the start and end of the transition.  $D$  is assumed constant during

transition and  $L \cos \varphi$  is varied by rolling at fixed pitch from negative values for  $\bar{V} > 1$  to positive values of  $\bar{V} < 1$ . The total range<sup>1</sup> for path A is then

$$\frac{R}{(r_e)(L/D)} = \frac{1}{2} \left[ \ln \left( \frac{1 - \bar{V}_1^2}{1 - \bar{V}_2^2} \right) + \ln \left( \frac{1}{1 - \bar{V}_3^2} \right) + 2 \right] \quad (5)$$

Since  $\bar{V}_2$  and  $\bar{V}_3$  will depend on the value of  $W/C_L A$  of the glide and thus on the design  $L/D$ , the value of eq. (5) will be independent of  $L/D$  only for sub-circular cases where  $\bar{V}_1 = \bar{V}_3$ . It is found that this equation is an adequate approximation for  $L/D$  values of about 1/2 or greater. For lower  $L/D$  values computer data were used.

The abrupt transitions in path angle at various points in the entries shown in Fig. 4 obviously represent an idealization which cannot actually be achieved. It remains for studies of the dynamic behavior of guided vehicles to determine how closely these ideal ranges can be approached.

## 2. Constant Altitude Mode

This mode is characterized by shorter maximum ranges than the constant  $L/D$  mode but it appears to offer possibly important advantages from the guidance and control standpoints. Obviously, the need for a transition maneuver in the

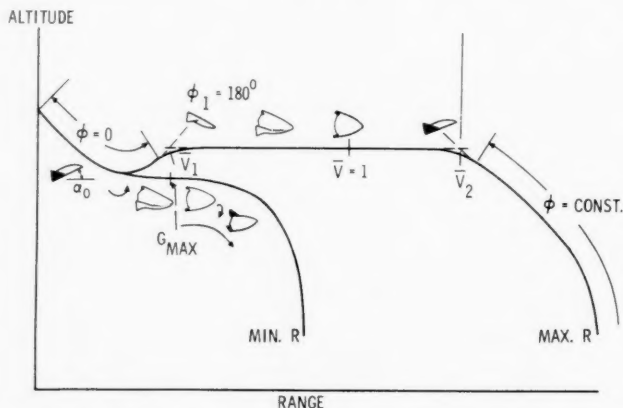


Fig. 5. Variable-roll control mode as applied to "constant altitude" trajectories

vicinity of  $\bar{V} = 1$  is eliminated (Fig. 4). The rate of change in dynamic pressure  $dq/dt$  is smaller and constant in sign. The constant altitude may prove desirable from the guidance standpoint especially if the altitude can be measured directly by on-board radar. If we take the roll mode<sup>2</sup> as shown in Fig. 5 as an example we can see that if roll is applied in one direction only, lateral range would be developed. However, if the sign of the bank angle is periodically reversed, the lateral range can be reduced to zero. Since the pitch attitude and deceleration schedule are fixed regardless of the sign of the bank angle, the distance along

<sup>1</sup> The maximum range was computed for  $\cos \varphi = 1$  in the glide phases preceding and following the transitional maneuver.

<sup>2</sup> The possible use of the fixed-pitch roll technique has been mentioned elsewhere (e.g. [21]) primarily from the point of view of simplifying the heat protection problem. We are concerned here with its use in range control.

the flight path, whatever its lateral characteristics, is essentially constant. Thus any desired lateral range from zero to the maximum for roll always in the same direction can be obtained with little effect on longitudinal range. Further details of the lateral range potentialities of this technique will be discussed later.

From the standpoint of attitude controls the roll mode is also attractive. Prior to entry a nominal pitch attitude would be selected and an aerodynamic flap type of pitch control would be set in the fixed position for this attitude. (If possible a center-of-gravity location requiring least possible control deflection would be selected.) Control of the vertical lift as required throughout the entry would be accomplished by rolling the vehicle. Longitudinal range would be controlled by initiating the constant altitude phase at the proper altitude (Fig. 5). Lateral range would be controlled as discussed previously by changing the sign of the roll angle at appropriate times during the entry.

Roll control can be accomplished economically by reaction jets because the rolling moments are low even in regions of high dynamic pressure, and the same reaction system employed for space attitude control can be used. (This is generally not possible for the pitch-control mode because of the relatively large pitching moments required for trim for longitudinally stable aerodynamic vehicles.) Artificial roll damping can be applied by the same reaction devices.

The range equation for the constant altitude mode has no discontinuity at  $\bar{V} = 1$ . For the fixed-pitch variable-roll case the lift requirements are met if

$$\cos \varphi = \cos \varphi_1 \left( \frac{1 - \bar{V}^2}{1 - \bar{V}_1^2} \right) \left( \frac{\bar{V}_1}{\bar{V}} \right)^2 \quad (6)$$

Whence, from integration of eq. (3), in terms of  $L/D$

$$\frac{R}{(r_e)(L/D)} = \frac{\cos \varphi_1 \bar{V}_1^2}{(1 - \bar{V}_1^2)} \ln \left( \frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_3} \right) + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1}{1 - \bar{V}_3^2} \right) \quad (7)$$

or, in terms of the initial deceleration rate,

$$\frac{R}{(r_e)(W/D)_1} = \bar{V}_1^2 \ln \left( \frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_3} \right) + \frac{2}{1} \frac{L_1}{W} \ln \left( \frac{1}{1 - \bar{V}_3^2} \right) \quad (8)$$

The velocity ratio for which the constant altitude portion must terminate in the fixed- $L/D$  glide, assuming  $\varphi_1 = \varphi_3$ , is given by

$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_3} = \sqrt{\bar{V}_1^2 \left( 1 - \frac{C_{L_3}}{C_{L_1}} \right) + \frac{C_{L_3}}{C_{L_1}}} = \sqrt{2 \bar{V}_1^2 - 1} \quad \text{for} \quad C_{L_1} = -C_{L_3} \quad (9)$$

If the constant-altitude mode uses fixed roll and variable pitch the deceleration and  $L/D$  schedules will depend both upon the force polar of the individual vehicle and the point on the polar where the maneuver is started. Flat-bottomed shapes were assumed in the present study and NEWTONIAN force relationships were used for vehicles having  $(L/D)_{\max}$  values of 1/2, 1, 1 - 1/2, and 2.

### 3. Minimum Range

In order to achieve the absolute minimum range for a given set of constraints complex modulated lift schedules are required. Minimum range was of interest in the present study primarily for the overshoot boundary condition. Our practical definition of the overshoot boundary involved  $-C_{L_{\max}}$  trajectories which tended to "dig in" to the atmosphere and develop high  $G$  values (Fig. 2). Minimum range could thus be approximated simply by assuming constant 10  $g$  deceleration from the point where this first occurred to the lowest altitude where 10  $g$  could still be maintained.

#### 4. Controlled Skip

For comparison with the entirely atmospheric deceleration paths a family of controlled skips were evaluated. Control consisted of negative lift modulation by the variable roll technique, starting at the bottom of the pull-up to hold a fixed altitude until the velocity had diminished to the desired value. The vehicle was then rolled to  $\varphi = 0$ , and allowed to skip. Digital computer results were used to obtain the range for these partially controlled skipping trajectories.

#### V. Longitudinal Range

The maximum ranges attainable with the various atmospheric modes are compared in Fig. 6, starting in all cases at the conditions required for equilibrium

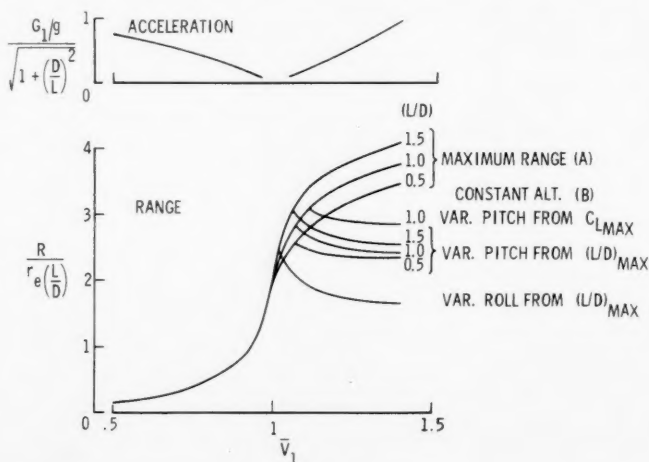


Fig. 6. Comparison of range for the various atmospheric modes starting at equal conditions at the end of the initial pull-up maneuver ( $q/(W/A)_{\min} = .2$ )

glide at the starting velocity  $\bar{V}_1$ . Also shown is the starting value of the resultant deceleration,  $G_1$ . (This is also the actual  $G$  versus  $\bar{V}$  schedule for the equilibrium glide cases.) The constant altitude cases increase in range capability as  $\bar{V}_1$  diminishes because the reduced deceleration levels (corresponding to starting from the constant  $L/D$  glide condition) more than offset the reduced initial energy levels. Since the initial values of  $G$  are of the order of 1 g or less, minimum ranges of 1/10 or less of those shown could be achieved for  $G_{1\max} = 10$  g. Of the constant altitude cases, the pitch-control mode has inherently a somewhat larger range capability than the roll-control mode, especially if the maneuver is started near  $C_{L\max}$  rather than  $L/D_{\max}$ , but the differences are not large.

Fig. 6 can be used to obtain the total range achievable as a function of entry angle if the velocity ratio existing at termination of the pull-up maneuver is known together with the range covered during the pull-up phase. The latter quantities were obtained from the computer program for the modulated pull-ups described previously. The maximum atmospheric ranges are compared in Fig. 7 with the ranges attainable in partially controlled skipping entries for  $L/D = 1$ . Ranges approximately equal to those obtained by skipping could be attained if dynamic pressures as low as about 1 lb/sq ft were permissible. Control difficul-

ties are encountered [19] at such low pressures, however, and a value of  $q/(W/A)$  of the order of 0.2 is believed to be a reasonable approximate limit for satisfactory aerodynamic control. With this limit ranges of 1/2 to 3/4 of the ranges of controlled-skip entries can be achieved with the wholly atmospheric modes for  $L/D = 1$ .

We are now in a position to answer the question of whether the returning space vehicle can reach a given destination from any extremity of the re-entry corridor. The factors involved here are sketched in Fig. 8. Basically, the question is whether the least longitudinal range achievable for an overshoot entry will overlap the maximum range for an undershoot entry having the same perigee location. The most critical case is assumed to occur when the undershoot entry

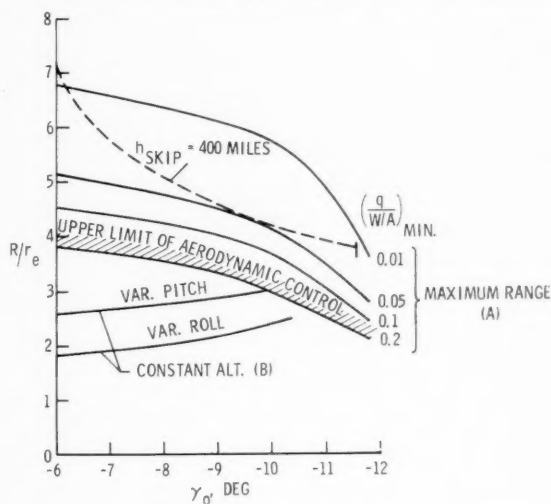


Fig. 7. Comparison of range for atmospheric and controlled skip modes.  $L/D = 1$

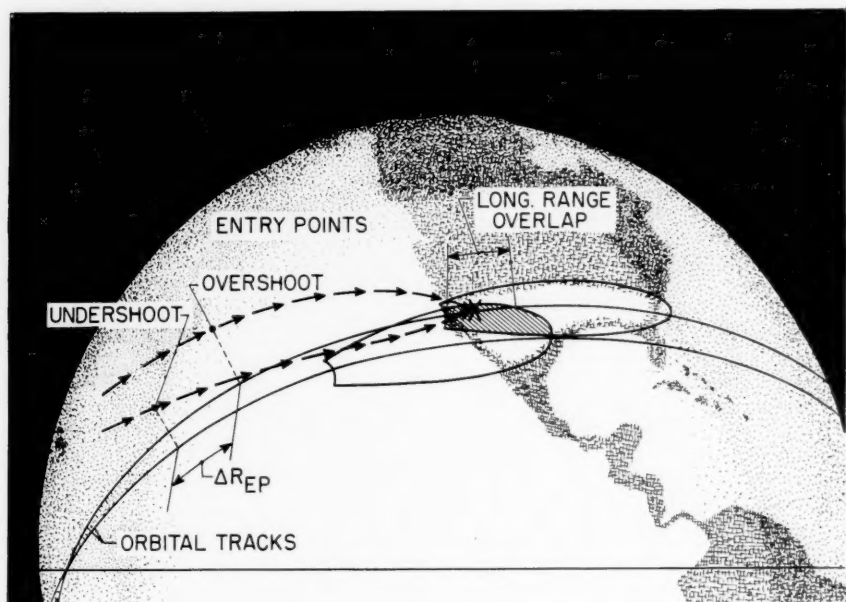


Fig. 8. Definition of longitudinal range overlap



plane does not coincide with that of the overshoot entry but is inclined so as to require a maximum lateral turn. Account is also taken of the fact that the entry point for a given perigee location lies farther down range for the overshoot case

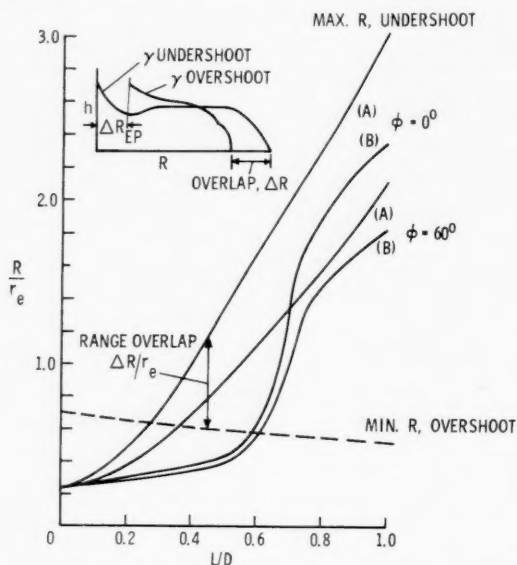


Fig. 9. Maximum and minimum ranges from corridor boundaries used to determine range overlap for atmospheric modes

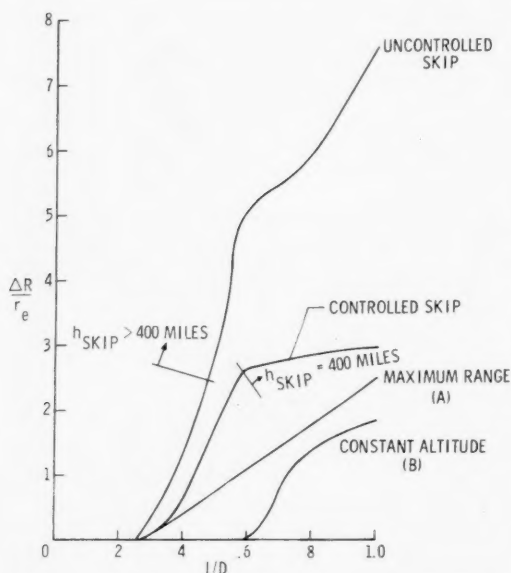


Fig. 10. Comparison of range overlap for atmospheric and skip modes

than does the entry point for the steep entry, the distance from entry point to perigee being  $R/r_e = 2\gamma$ . Fig. 9 presents the ranges achievable from overshoot and undershoot boundaries, both with and without the maximum lateral maneuver for undershoot, and for both the maximum- $L/D$  glide and constant-altitude variable-roll modes. (The condition of  $\varphi = 60^\circ$  for the "variable-roll" case assumed that this value was used in the subcircular glide phase.) The cross-over points beyond which range overlap exists occur at  $L/D = 0.36$  and  $0.61$ , respectively, for the two types of trajectories for the condition of displaced orbital planes. If a range overlap of at least 2000 miles (i.e.  $\pm 1000$  miles) or more is considered desirable for manned re-entries from parabolic orbits the minimum  $L/D$  requirements become  $L/D = 0.57$  and  $0.71$ , respectively. A comparison with the overlap capabilities of the skip modes is made in Fig. 10. The controlled-skip maneuver provides overlaps about 5000 miles greater than the best atmospheric mode, for  $L/D = 0.5$ . Equal overlaps of 2000 miles for zero lateral displacement require  $L/D$  values of 0.33 (controlled skip), 0.43 (maximum range), and 0.68 (constant altitude, variable  $\varphi$ ). For the controlled skip mode no significant gain in range occurs beyond  $L/D = 0.6$ . It is important to remember that the foregoing results apply to entries from the extremes of the deepest practicable cor-

ridors, the corridors for the atmospheric cases being deeper than that for the controlled skip because the larger  $L/D$  values permit steeper entries (Fig. 3). If the condition of equal maximum corridor depth is imposed the  $L/D$  values for the aerodynamic modes can be reduced somewhat.

If we are willing to accept smaller-than-maximum corridor depths the  $L/D$  requirements for overlap can be considerably relaxed. For illustration consider

the constant-altitude variable-roll mode for which an  $L/D$  of 0.58 is required to achieve overlap for an entry in which no lateral maneuver is involved (Fig. 9). The modulated entry corridor (Fig. 3) for this  $L/D$  extends from about  $\gamma_0 = -4.7^\circ$  to  $\gamma_0 = -8.4^\circ$ , corresponding to a depth of about 60 miles. We now inquire how much the  $L/D$  requirement for overlap can be reduced if entry is made from more shallow corridors. Initially, we keep the overshoot boundary fixed and progressively reduce the value of  $-\gamma_0$  for the undershoot boundary. Fig. 11 (solid lines) shows the effect of this on the  $L/D$  required for various overlap ranges. (The reference maximum corridor width on which the data of Fig. 11 are based is the value stated above for  $L/D = 0.58$ .) We note for this case that a large decrease in corridor width is required before any sizable reduction in  $L/D$  is possible. However, if we now hold the undershoot boundary fixed and relax the overshoot limit, large reductions in  $L/D$  can be obtained (dashed lines of Fig. 11) for the smaller range overlaps. Range overlaps significantly greater than about 1000 miles, however, can only be realized by relaxing the undershoot boundary either separately from or in conjunction with the change in the overshoot boundary.

The choice of purely atmospheric versus controlled skipping modes is influenced strongly by guidance and control considerations. The present study revealed that the range for the skipping mode hinges delicately on the velocity and path angle for which the skip is initiated. Typical values of the rate of change of range with exit path angle and exit velocity for an exit angle of  $1^\circ$  and  $\dot{V}_{\text{exit}}$  near unity were found to be

$$\frac{\partial R}{\partial \gamma_1} \approx 7500 \text{ miles/degree}$$

and

$$\frac{\partial R}{\partial V_1} \approx 50 \text{ miles/ft/sec}$$

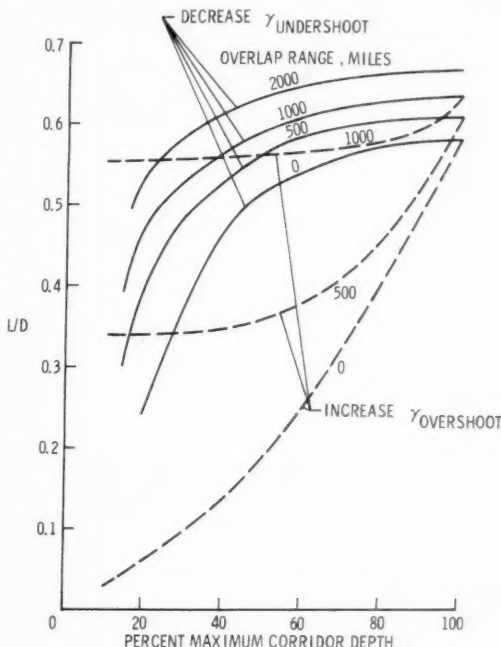


Fig. 11. Trade-off between corridor depth and  $L/D$  required for range overlap. Constant-altitude variable-roll mode

Thus, although the skipping mode has a lower  $L/D$  requirement for range overlap, it has a serious guidance and control problem. From the same point of view it is not possible during the re-entry subsequent to a skip to correct the range for sizable guidance or control errors made in the initial entry because of the large magnitude of the range errors and the low  $L/D$  usually contemplated in this type of re-entry. For example, an angle error of  $\pm 0.05^\circ$  plus a velocity error of  $\pm 10$  ft/sec would cause a range error of some  $\pm 900$  miles which is nearly twice as great as the maximum possible range correction for an  $L/D = 0.25$  vehicle reentering at  $\bar{V} \sim 1$  and  $\gamma \sim -1^\circ$ . In contrast, the atmospheric mode is both less susceptible to large initial errors and more tolerant of such errors because of the higher  $L/D$  associated with this type of re-entry and because of the capability for continuous control and correction.

### VI. Lateral Range

Previous studies of lateral range ([20] and [21], for example) have been concerned primarily with satellite or subcircular-velocity entries at shallow angles,

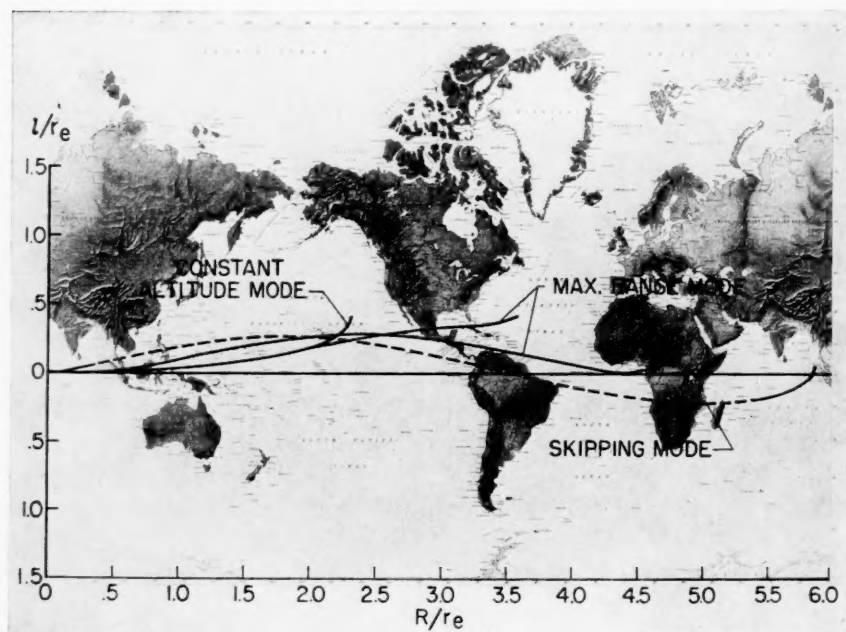


Fig. 12. Typical long-range re-entry paths for banked vehicles

usually along equilibrium fixed- $L/D$  glide paths. The nature of such entries makes it impossible to develop large changes in heading in the initial phase of the glide and the major part of the lateral range develops later after much of the longitudinal range has been covered. For a subcircular glide at  $L/D \approx 1$  or less the range covered during most of the turn is small enough that a simple approximation which neglects the spherical nature of the earth can be used for preliminary estimates [20].

Practical entry from a parabolic orbit, however, involves relatively steep initial penetration to a condition of high dynamic pressure where a significant change in heading can be accomplished early in the entry. Thus large lateral and longitudinal ranges can be developed for which it is clearly no longer permissible to neglect the earth's sphericity. An illustration of this is given in Fig. 12. The longest trajectory shown is that of a skipping vehicle which makes an uncontrolled banked pull-up (solid portion) a skip (dashed portion) followed by a second entry at the same bank angle and  $L/D$ . In the long-range skip the vehicle follows an orbital path inclined to the initial entry plane, which bends back toward the initial plane crossing it near  $R/r_e = \pi$ . The heading angle changes sign,

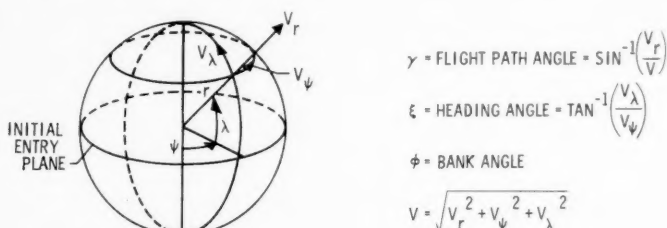


Fig. 13. Coordinate system used in particle motion analysis

twice in this particular case, before touchdown. The second entry is with a lateral displacement of opposite sign to that of the initial turn. Obviously, a greater final lateral range could have been achieved by eliminating the first turn. The constant  $L/D$  fixed-bank turns of Fig. 12 encounter a region of low dynamic pressure ( $q_{\min} = 10$  lb/sq ft) over a large part of their range and they are therefore affected similarly by the earth's sphericity, but to a lesser extent. The heading angle undergoes one or more inflections and changes sign for the longer-range case. The shortest range case which operates at a higher  $q$  level appears to follow the simple pattern visualized in the aforementioned approximation; however, it also is actually influenced to some extent by sphericity.

In order to obtain accurate evaluations of lateral range, the equations of motion were set up in spherical coordinates (Fig. 13). The position of the vehicle is determined by the three coordinates  $r$ ,  $\psi$ , and  $\lambda$  where  $r$  is the distance from the center of the earth to the vehicle,  $\psi$  is the angular distance from the re-entry point in the original entry plane, and  $\lambda$  is the angular distance measured normal to the original entry plane. The velocity of the vehicle at any point is composed of the components in these three directions:  $V_r$ , the velocity normal to the surface of the earth,  $V_\psi$ , the velocity along the surface of the earth parallel to the original entry plane, and  $V_\lambda$ , the velocity component along the surface of the earth and normal to  $V_r$  and  $V_\psi$ .

In addition we define  $\gamma$ , the flight path angle, and  $\xi$  the heading angle as indicated and use  $\phi$  to denote the bank angle and  $V$  the total velocity of the vehicle. With these coordinates and definitions the kinetic energy of the system may be written

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \cos^2 \lambda \dot{\psi}^2 + r^2 \dot{\lambda}^2) \quad (10)$$

and the LAGRANGE equations for the motion of the system, including aerodynamic forces, are

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) &= -L \cos \varphi \cos \gamma + D \sin \gamma + m g \\
\frac{\partial T}{\partial \psi} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) &= -L (\cos \varphi \sin \gamma \cos \xi + \sin \varphi \sin \xi) - D \cos \gamma \cos \xi \\
\frac{\partial T}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}} \right) &= L (\sin \varphi \cos \xi - \cos \varphi \sin \xi \sin \gamma) - D \cos \gamma \sin \xi
\end{aligned} \quad (11)$$

From these relations, the equations of motion are obtained in the form

$$\frac{1}{g} \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{2} \rho V^2 \left( \frac{C_D A}{W} \right) - \sin \gamma \quad (12)$$

$$\frac{1}{g} \frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{2} \rho V \left( \frac{C_D A}{W} \right) \frac{L}{D} \cos \varphi - \frac{\cos \gamma}{V} \left[ 1 - \frac{V^2}{g r} \right] \quad (13)$$

$$\frac{1}{g} \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{2} \rho V \left( \frac{C_D A}{W} \right) \frac{L}{D} \frac{\sin \varphi}{\cos \gamma} - \frac{V}{g r} \cos \gamma \cos \xi \tan \lambda \quad (14)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{V \cos \gamma \cos \xi}{r \cos \lambda} \quad (15)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{V \cos \gamma \sin \xi}{r} \quad (16)$$

$$\frac{dr}{dt} = V \sin \gamma$$

The approximation often used in the calculation of lateral range is to neglect the second term in eq. (14). If this approximate relation is then combined with eq. (12) and small flight path angles are postulated, the resulting relation is

$$\frac{d\xi}{dV} = -\frac{L \sin \varphi}{D V}$$

which is readily integrated for constant  $L/D$  and bank angle ( $\varphi$ ). This approximation effectively considers a cylindrical earth and can lead to large errors in lateral range, especially when the longer ranges ( $R/r_e > 1$ ) are considered.

Results of digital computer calculations of available landing area using both the complete (spherical earth) equations and the approximate (cylindrical earth) equations are presented in Fig. 14. A middle corridor re-entry ( $\gamma = -6^\circ$ ) was considered and vehicles of  $W/C_D A = 50$  lb/sq ft performed unmodulated, unbanked pull-ups followed by the constant  $L/D$  mode of operation described previously with various constant bank angles during the glide portions. It is seen that the errors become very large for the longer ranges. The "approximate" lateral range is about 1.75 radii for the  $L/D = 2$  re-entry as compared to about 0.75 radii for the complete equation. For  $L/D = 0.5$  the errors involved are small because the ranges are small. If we consider controlled skip trajectories, however, where the distances traveled are on the order of several earth radii even for low  $L/D$  ratios, the approximate equation would again lead to large errors.

The landing area available to a vehicle with a maximum  $L/D$  of 0.5, following the controlled skip type of re-entry, initiated at a shallow entry angle ( $\gamma_i = 5.5^\circ$ ) is shown on Fig. 15. The vehicle maintains  $(L/D)_{\max}$  during the entire re-entry as previously described. Some sample trajectory traces which went into the makeup of this footprint are also shown on the figures with the dashed portions

of these traces representing the time the vehicle is outside of the atmosphere ( $h > 400,000$  ft). The strong effect of the spherical curvature of the earth on these trajectories is obvious. Two interesting features of this footprint are the decrease

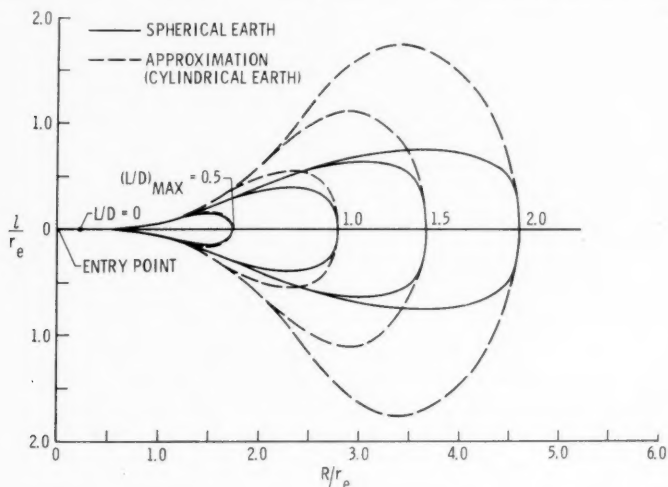


Fig. 14. Available landing area for maximum range mode as affected by earth's sphericity.  $\gamma_0 = -6^\circ$ ,  $W/C_D A = 50$  lb/sq ft

in lateral range available for longitudinal ranges about half-way around the earth from the re-entry point, and the necessity of directing the vehicle initially

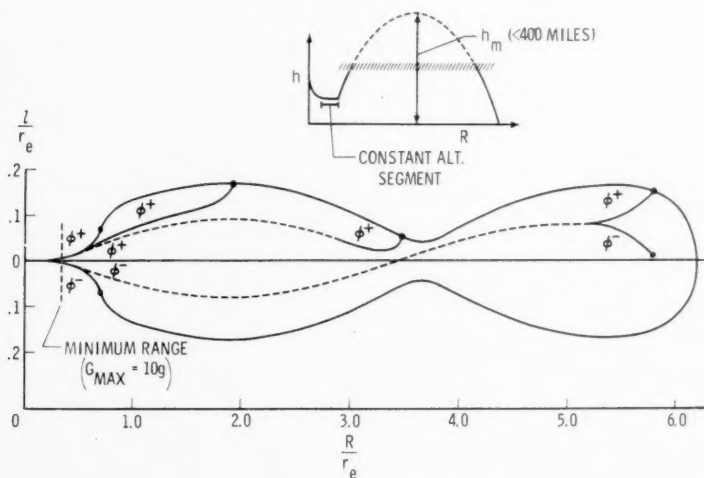


Fig. 15. Available landing area for controlled skip.  $L/D = 0.5$ ,  $\gamma_0 = -5.5^\circ$ ,  $W/C_D A = 50$  lb/sq ft

to the right of the entry plane in order to obtain sizable lateral displacements to the left of the entry plane for longitudinal distances greater than half-way around the earth.

For the atmospheric re-entry modes considered previously the lateral ranges available for vehicles with  $L/D = 0.5$  and 1 are presented in Fig. 16 as a function of the velocity at the end of the pull-up. For the  $L/D = 0.5$  vehicle a definite advantage is seen for the constant  $L/D$  mode over the constant altitude mode,

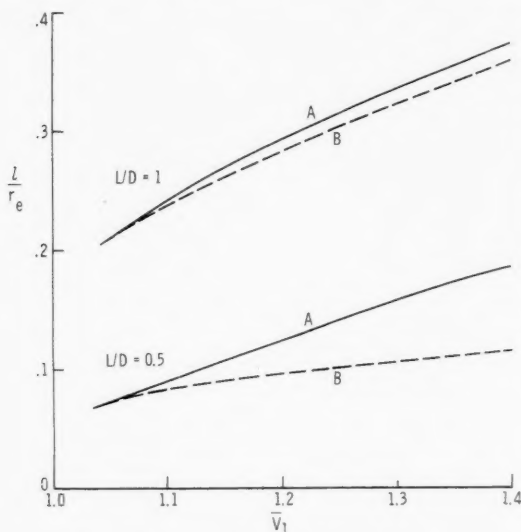


Fig. 16. Comparison of lateral range for atmospheric modes

while for the  $L/D = 1$  vehicle, the advantage is small. In considering longitudinal ranges earlier in this paper it was seen that the constant  $L/D$  mode had a decided advantage over the constant altitude mode at all  $L/D$  values. The diminishing lateral range advantage is again due to the strong effects of the earth's spherical nature over the long ranges associated with the constant  $L/D$  mode, for higher  $L/D$  vehicles.

During the constant altitude portion of flight, the direction and amount of displacement away from the original flight path can be controlled by varying the sign of the bank angle of the vehicle so as to direct the horizontal compo-

nent of the lift vector to either the right or left of the flight path. If no effective lateral deviation is desired during all or part of the constant altitude flight, this may be accomplished by banking alternately to right and left, weaving around the original flight direction. By using this technique for only a portion of the total time at constant altitude and then banking in one direction for the rest of the time it is possible to control the total lateral displacement obtained during the constant altitude flight. This displacement is given approximately by the relation

$$\frac{l_2}{l_{\max}} = \left(1 - \frac{R_1}{R_{\max}}\right)^2$$

where  $l_2$  is the lateral displacement at the end of the constant altitude portion,  $l_{\max}$  is the maximum lateral displacement that could be obtained,  $R_1$  is the distance in the original flight direction (measured from the start of the constant altitude flight), over which no lateral displacement is affected, and  $R_{\max}$  is the total distance traveled in the original flight direction.

Another scheme for controlling lateral displacement and heading angle during constant altitude flight, necessitating a minimum number of changes in direction of bank is illustrated on Fig. 17. On this sketch  $\varphi^+$  signifies banking to the left and  $\varphi^-$  to the right. It is seen that only one change in direction of bank will enable the vehicle to achieve any lateral displacement up to the maximum value attainable, as shown by curves  $OBH$  and  $OCE$  and  $OD$ . This gives no control over heading angle at the end of the maneuver, however. The heading angle, which is zero at the end of maneuver  $OCE$  in the sketch will be positive for points between  $D$  and  $E$  and negative for points between  $E$  and  $H$ . If we allow a second change in the direction of bank we also have some control over



the heading angle at the end of the maneuver. If we desire a zero heading angle at the end point, this can be achieved at any point between  $E$  and  $H$  by a two turn maneuver similar to curve  $OBFG$ . For points between  $E$  and  $D$ , however, a zero heading angle is not achievable at the end of the constant altitude phase. Heading angles other than zero can be achieved in a similar manner, with similar restrictions.

If no lateral displacement is desired during the constant altitude phase of flight, this may be achieved by either one change in direction of bank ( $OBH$ ),

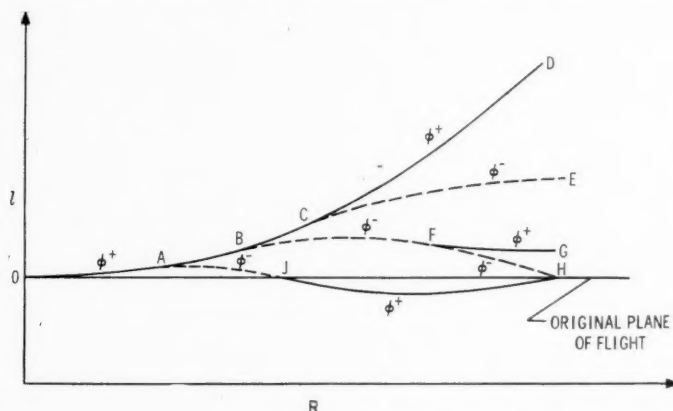


Fig. 17. Control of lateral range and final heading by change in sign of roll angle

two changes ( $OAJH$ ), or any larger number. The larger the number of turns taken, the closer to the original flight path the vehicle remains.

In discussing the roll-control technique in this and in preceding sections we have considered its application to the constant-altitude mode. It is obvious, of course, that the roll-control technique can be equally well applied to other modes, for example, ones in which a  $G$  schedule may be specified. It can also be applied in the fixed- $L/D$  mode in cases where a bank is permissible.

## VII. Aerodynamic Requirements

The choice of lift/drag ratio will obviously depend on a number of other factors in addition to those so far considered in the discussion of corridors and range. The required entry corridor dimensions may in some cases be determined by the nominal accuracy of the guidance and control system used in the space phase. Studies such as [22], however, may be interpreted to indicate that practical guidance and control techniques can probably be devised which will require corridor depths and widths only a fraction of those attainable with an  $L/D$  of one-half. But invariably it is not the nominal design capability of such systems which determines the vehicle. Rather it is the off-design or emergency conditions which establish the requirements. From this point of view the maximum practicable corridor dimensions may be none too large. Unfortunately, these off-design requirements are impossible to determine in a general study because they depend upon details of each individual system. In the absence of any clear general requirements in these other important areas, we will base our choice of maximum  $L/D$  on the necessity for achieving range overlap from the corridor extremities for atmospheric modes. Accordingly from Figs. 9, 10, and 11,

we choose maximum  $L/D$  values in the range 0.5 to 1.0 for vehicle design considerations.

Lift/drag values in this relatively low category can be achieved by a wide variety of hypersonic shapes. The chief problem for design is to develop configurations having high wave drag (as required by heating considerations) together with acceptable stability and control characteristics. Maximum flexibility in trajectory control requires operation of the vehicle in different regions of the lift-versus-drag force polar at different times during entry. Use of the low-drag portion of the polar is mandatory for initial  $G$  modulation, maximum range, and finally for tangential landing. Least heat rate is achieved by use of  $C_{L_{\max}}$ , either in the initial pull-up or in the subsequent glide. Range permitting, the high-drag part of the polar would be used after the initial pull-up in heat-absorbing designs. It




	TOP VIEW			
	A	B	C	
	SIDE VIEW			
Part of force polar used				
Max. usable hyp. $L/D$	0.5	1.0	1.0	
Lift curve slope, $dC_L/d\alpha$	—	+	+ and —	
Corridor depth, miles	41	66 (mod.)	89 (mod.)	
Range overlap, miles (const. alt. mode)	none	—	7200	
Max. lateral range, miles	550	1650	1650	
Relative heat load (middle of corridor)	1.0	2.1	2.1	
Approx. relative weight	1.0	1.2	1.3	

Fig. 18. Comparison of typical re-entry vehicle types

is not essential to achieve maximum capability in any one re-entry system; only parts of the polar are being used in a majority of current design studies. That is, limited performance and control are accepted in the interest of design simplifications or weight savings.

The blunt-nosed vehicle of Fig. 18 is similar in general concept to the orbital design for Project Mercury, the first manned orbital system developed by the United States. In this approach the brunt of the heating load is carried on a heat shield designed to absorb a major fraction of the heat load by the ablation process. The magnitude of the heat load is minimized by use of low  $L/D$  and high wave drag. The afterbody is not permitted to move out of the shadow of the heat shield so that it can be designed for relatively low heat rates for radiation cooling. The vehicle operates only in the high-drag, negative- $C_{L\alpha}$  part of the force polar and it can be considered to be a minimum-weight solution with minimum acceptable trajectory control. A sizable overlap in range can be achieved only for a reduced corridor depth for the constant-altitude deceleration mode.

The cone-shaped design operates at the opposite extreme of the force polar and accepts a higher design heat load and higher weight in exchange for larger  $L/D$  and what are believed to be more favorable dynamic properties, i. e. a positive value of  $C_{L_\alpha}$ , and a higher inherent damping factor than the minimal design. It is difficult to trim and stabilize at high angles of attack and for this reason it is usually considered only for the low-drag region of the polar, although there is no truly inherent restriction in this regard.

Vehicle  $C$  of Fig. 18 is intended to represent types capable of operation anywhere on the force polar in the re-entry environment and also capable of tangential landing. This type is somewhat heavier than the conical vehicle primarily because of the greater demands placed on its control system. In the region below  $C_{L_{\max}}$  the aerodynamics of the vehicle sketched are similar to those of the Dyna Soar type glider [23]. Our studies of vehicles of this type have indicated no important obstacle to successful operation over the polar from  $(L/D)_{\max}$  to  $C_{D_{\max}}$ . The  $C_{D_{\min}}$  area, however, tends to be characterized by a loss of hypersonic longitudinal stability and increased heating problems of the upper surfaces. A study of a piloted vehicle of this kind in the high-drag region [24] concluded that for satellite entry, the piloting problems can be readily solved through use of combined aerodynamic and reaction controls designed for the high-drag attitude.

The relative heat loads shown in Fig. 18 include consideration of only the convective component for "cold" surfaces. Radiation from the hot gas to the body is an important additional heat load which must also be considered for re-entry at escape speed [25, 26]. In any case, however, these heat loads calculated for unheated surfaces are not a satisfactory index of relative heating. The surface temperature of a majority of the materials now contemplated will be very high over much of the entry so that a major fraction of the load will be disposed of by radiation away from the body. If we assume continued future growth in temperature capability [11], it appears likely that actual heat absorption by ablation or other forms of cooling may be required only during the initial pull-up maneuver of long-range re-entries. Subsequent maneuvers, whether of the  $A$  or  $B$  type, produce environmental conditions such that radiation cooling may dispose of virtually all of the applied heat. Minimum range entries, however, will require heat absorption, but here the total heat loads will be only a small fraction of the long-range values. Obviously, materials capable of both short-term heat absorption and long-term high surface temperatures would provide a desirable solution.

Our estimates of the weight penalties for increasing aerodynamic sophistication of these re-entry vehicle types (Fig. 18) may appear surprisingly small. It should be borne in mind, however, that the launch vehicle structure and control system may involve additional weight penalties not considered here. Furthermore, at the present stage of launch vehicle development, these re-entry vehicle weight penalties are by no means insignificant. Rather, they are large enough in some cases to dictate the use of the minimum vehicle.

### VIII. Piloting Problems

The dynamic behavior of uncontrolled vehicles in the initial entry pull-up maneuver has been investigated theoretically ([27], for example). Prime factors in the motion are the large range of dynamic pressure, from zero to values comparable to those of current aircraft, and the low (or in some cases negative as for vehicle  $A$ ) inherent dynamic damping factors of typical vehicles at re-entry

speeds. The dominant effect of the increase in dynamic pressure causes the amplitude of the short period longitudinal oscillation (which develops if the vehicle is out of trim) to decrease in amplitude and increase in frequency as the bottom of the pull-up is approached. Typical peak frequencies of the short period motion of about 1 cycle per second occur for the postulated vehicle shapes for the steeper re-entries, and thus there is doubt whether a human pilot could control

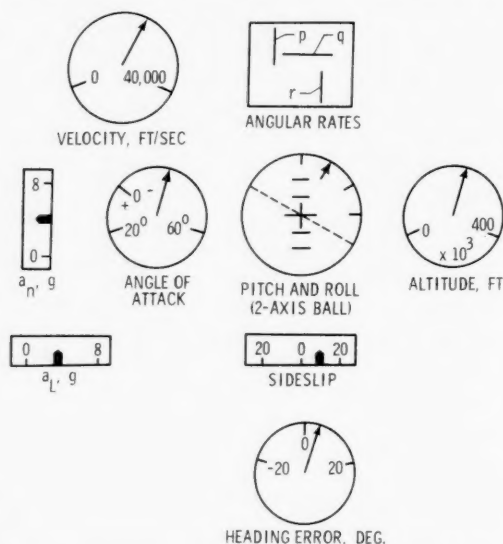


Fig. 19. Instrument panel used in simulator studies

the motion, especially in the critical region where he must also reverse the direction of the lift. On the other hand it can logically be assumed that the reaction control system can be used by the pilot to reduce any initial out of trim attitude to a small value [28, 29]. Thus the subsequent high frequency oscillations would be inherently of very small amplitude and presumably would be tolerable even if uncontrolled or undamped by artificial damping devices.

be accomplished in the presence of high but rapidly decreasing dynamic pressure, in most cases at supercircular velocity. Similar maneuvers are required later at  $\bar{V}_2$  and  $\bar{V}_3$  (Fig. 4). In the interim fixed  $L/D$  glide phase for  $\bar{V} > 1$  the vehicle is subject to the unstable phugoid oscillation. That is, for fixed  $C_L$  any departure from the equilibrium glide altitude will tend to increase. The "period" is so long, however, that there is no question that the pilot can control the vehicle, except near  $-C_{L_{max}}$  where any excess altitude cannot be corrected for because the lift cannot be increased.

A six-degree-of-freedom analog simulator has been developed at the Langley Research Center to permit investigation of a human pilot's ability to perform the basic pull-up and range-control maneuvers of re-entry from parabolic orbits. The preliminary results presented below have been obtained by Mr. A. SCHY and Mr. M. MOUL of the Langley staff.

The basic task set for the pilots was to enter at fixed  $C_L$  near  $L/D_{max}$  and to pull up to zero path angle at an altitude of 210,000 feet, starting alternately from a steep entry near undershoot, a middle corridor entry, and a shallow entry near the overshoot boundary for positive lift (Fig. 3).

A vehicle similar to *A* of Fig. 18 was used. The variable-pitch technique was employed to modulate lift. Negative lift was obtained by rolling  $180^\circ$ . Constant-gain automatic rate dampers were employed for all three axes. The pilot's display is shown in Fig. 19. A two-axis hand controller and rudder pedals were used.

The most difficult feature of the pull-up maneuver is the reversal of sign of the lift vector required to prevent a skip and to achieve a near horizontal glide path at the correct altitude. This must

Vol  
7  
1961

The pilots found all three re-entry tasks simple to perform with dampers operating after some initial orientation practice runs (Figs. 20 and 21). Satisfactory entries could be made with either the yaw or the roll dampers inoperative.

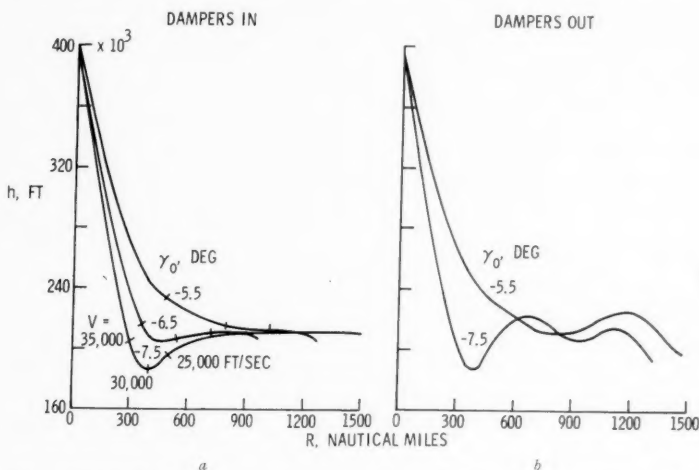


Fig. 20. Effects of dampers on piloted re-entry maneuvers for vehicle A of Fig. 18

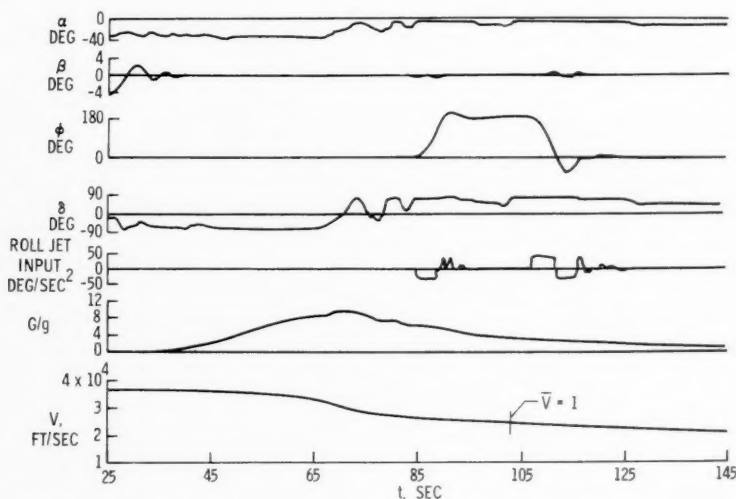


Fig. 21. Dynamic motions for steep entry of Fig. 20 a (dampers in,  $\gamma_0 = -7.5^\circ$ )

Loss of pitch damping presented greater difficulty. The steep re-entry was difficult to control with any of the dampers out since the natural frequencies were high. With all rate dampers inoperative the behavior of the vehicle was generally unacceptable to the pilots. This type of vehicle is subject to aerodynamic control cross coupling and to inertial coupling as well. Thus, in the absence of damping, any roll control input, for example, will result in serious disturbances about the other axes. One possible mode of control is to pitch the vehicle to

zero angle of attack before applying roll control, but this requires skillful action during the pull-up. Nevertheless, after considerable practice survivable entries could be achieved as shown by the typical example in Fig. 20.

In a similar series of entries using 235,000 feet as the pull-up altitude it was found that the shallow entry was difficult to control if positive flight path angles were allowed to develop. Control was somewhat more difficult for all entry angles because of the lower dynamic pressures.

No attempt was made in these preliminary tests to reach the specified glide altitude in the shortest time, as would be required for maximum range. Presumably, shorter times than those shown in Fig. 20 can be achieved. Preliminary simulated piloted entries using the fixed-pitch variable-roll technique have also been accomplished successfully.

### IX. Conclusion

For equal range-control performance, atmospheric trajectories are found to require only moderately higher lift/drag ratios than skip trajectories which are limited to an apogee altitude below the inner radiation belt. In order to achieve a given destination from any extremity of the entry corridor with  $\pm 1000$  miles margin a minimum  $L/D$  of about 0.6 is required for a wholly atmospheric re-entry at fixed  $L/D$ . Constant-altitude modes require values up to about 0.7. These atmospheric modes do not suffer from the inherently sensitive guidance and control problems of the skip mode.

Certain atmospheric modes in which roll is the only control variable are capable of essentially independent variation of lateral and longitudinal range by changes in sign of the roll angle at appropriate points during the re-entry. Among other possible advantages this technique permits the use of the space reaction systems for control throughout re-entry. (Fixed trim at the desired pitch attitude must be provided aerodynamically.)

The sphericity of the earth has a marked influence on the achievable lateral range and on the shape of the maneuver envelope. Only for the shortest ranges of interest for re-entry at escape speed is it valid to use the familiar approximation in which the earth in effect is assumed to be cylindrical.

Three aerodynamic designs which are believed capable of being developed into practical re-entry vehicles have been examined briefly. Preliminary fixed-base simulator studies for one of these vehicles indicate that a human pilot can perform satisfactorily the basic maneuvers required for range control. In some cases, with special training, successful entries were achieved without the aid of artificial rate damping, but the pilots did not consider this an acceptable mode except for emergency. The presence of rate damping about three axes made the piloting problem relatively easy.

### References

1. D. R. CHAPMAN, An Analysis of the Corridor and Guidance Requirements for Supercircular Entry into Planetary Atmospheres. NASA TR R-55 (1959).
2. L. LEES, et al., Use of Aerodynamic Lift During Entry into the Earth's Atmosphere. ARS Journal **29**, No. 9 (1959).
3. MAC C. ADAMS, Recent Advances in Ablation. ARS Journal **29**, No. 9 (1959).
4. F. C. GRANT, Importance of the Variation of Drag with Lift in Minimization of Satellite Entry Acceleration. NASA TN D-120 (Oct. 1959).
5. L. BROGLIO, Similar Solutions in Re-Entry Lifting Trajectories. Univ. of Rome, SIARgraph No. 54 (Dec. 1959).

6. K. WANG and L. TING, Analytic Solutions of Planar Re-Entry Trajectories with Lift and Drag. Polytechnic Institute of Brooklyn (PIBAL) Rep. No. 601 (April 1960).
7. F. C. GRANT, Analysis of Low-Acceleration Lifting Entry from Escape Speed. NASA TND-249 (June 1960).
8. J. D. C. CRISP and P. FEITIS, The Thermal Response of Heat-Sink Re-Entry Vehicles. PIBAL Rep. No. 576 (Juli 1960).
9. F. C. GRANT, Modulated Entry. NASA TN D-452 (Aug. 1960).
10. E. F. STYER, A Parametric Examination of Re-Entry Vehicle Size and Shape for Return at Escape Velocity. Paper presented at Third Annual Meeting, American Astronautical Society, Seattle, Washington, Aug. 8-11, 1960.
11. O. A. KELLY, JR., Parametric Study of a Manned Space Entry Vehicle. Aero-Space Engng. **19**, No. 10 (1960).
12. B. A. GALMAN, Direct Re-Entry at Escape Velocity. Paper presented at Third Annual Meeting, American Astronautical Society, Seattle, Washington, Aug. 8-11, 1960.
13. R. TEAGUE, Flight Mechanics of Re-Entry After Circumlunar Flight by Means of Various Lifting Techniques. NASA-George C. Marshall Space Flight Center, MNN-M-Aero-4-60 (Sept. 15, 1960).
14. R. B. HILDEBRAND, Manned Re-Entry at Supersatellite Speeds. IAS Rep. No. 60-83 (Sept. 1960).
15. R. A. MINZNER, et al., ARDC Model Atmosphere, 1959 Geophysics Research Directorate, ARDC, U. S. Air Force (1959).
16. J. E. HAYS, et al., Analytical Study of Drag Brake Control System for Hypersonic Vehicles. Wright Air Develop. Div., U. S. Air Force Tech. Rep. 60-267 (Jan. 1960).
17. J. V. BECKER, Heating Penalty Associated with Modulated Entry into Earth's Atmosphere. ARS Journal **30**, No. 5 (1960).
18. A. E. BRYSON, et al., Determination of the Lift or Drag Program that Minimizes Re-Entry Heating with Acceleration or Range Constraints Using a Steepest Descent Computation Procedure. IAS Paper, New York Meeting, Jan. 23-25, 1961.
19. R. C. WINGROVE and R. E. COATE, Piloted Simulator Tests of a Guidance System which Can Continuously Predict Landing Point of a Low  $L/D$  Vehicle During Atmospheric Re-Entry. NASA TN D-787.
20. R. E. SLYE, An Analytical Method for Studying the Lateral Motion of Atmosphere Entry Vehicles. NASA TN D-325, Sept. 1960.
21. D. S. MANDELL, A Study of the Maneuvering Performance of Lifting Re-Entry Vehicles. Paper presented at ARS 15th Annual Meeting, Washington, D. C., Dec. 5-8, 1960.
22. A. L. FRIEDLANDER and D. P. HARRY, III, Requirements of Trajectory Convective Impulses During the Approach Phase of an Interplanetary Mission. NASA TN D-255, 1960.
23. H. MULTHOPP, Design of Hypersonic Aircraft. Aero-Space Engng. **20**, No. 2 (1961).
24. J. M. EGGLESTON, et al., Fixed-Base Simulator Study of a Pilot's Ability to Control a Winged Satellite Vehicle During High-Drag Variable-Lift Entries. NASA TN D-228, April 1960.
25. MAC C. ADAMS, A Look at the Heat Transfer Problem at Super-Satellite Speeds. Paper presented at ARS 15th Annual Meeting, Washington, D. C., Dec. 5-8, 1960.
26. M. J. BRUNNER, The Aerodynamic and Radiant Heat Input to Space Vehicles which Re-Enter at Satellite and Escape Velocity. Paper presented at ARS 15th Annual Meeting, Washington, D. C., Dec. 5-8, 1960.
27. H. J. ALLEN, Problems in Atmospheric Entry from Parabolic Orbits. Paper presented at Conference on Aeronautical and Space Engineering, Nagoya, Japan, Nov. 8-9, 1960.
28. W. H. STILLWELL and H. M. DRAKE, Simulator Studies of Jet Reaction Controls for Use at High Altitudes. NACA RM H58G18a, 1958.



29. G. W. FREEMAN, Reaction Controls for Re-entry Vehicles. Paper presented at Third Annual Meeting, American Astronautical Society, Seattle, Washington, Aug. 8-11, 1960.

#### Discussion

Dr. FERRI offered a substantiating comment on the part of Mr. BECKER's paper dealing with the pilot's ability to make a survivable entry in an emergency situation in which the position of the vehicle in the corridor was not known prior to entry. He displayed a slide based on his work showing that the rate of build-up of resultant deceleration could be used to identify the approximate position in the corridor. If the rate of onset was low for example, the pilot would know he was in the upper part of the corridor and could then follow an appropriate lift modulation schedule for that part of the corridor.

## L'étagement optimum des groupes de fusées en fonctionnement parallèle

Par

B. M. Fraeijs de Veubeke<sup>1</sup>

(Avec 4 Figures)

### Résumé — Zusammenfassung — Abstract

**L'étagement optimum des groupes de fusées en fonctionnement parallèle.** Etude théorique du cas limite où les moteurs et les réservoirs, indéfiniment fractionnés, sont largables de façon continue. Il est établi que dans un champ de gravitation uniforme les trajectoires optimales sont composées d'arcs à poussée constante, d'arcs à poussée monotone décroissante et éventuellement de discontinuités de poussée séparant deux arcs à poussée constante.

Pour une charge utile donnée ainsi qu'une vitesse terminale fixée en module et en inclinaison, on établit la synthèse des trajectoires minimales par rapport à la masse initiale ou à la poussée initiale. Les modifications dues à la présence d'un second étage sont discutées.

**Bahn- und Stufenoptimierung mit gekoppelten Boostern.** Es wird der Grenzfall untersucht, wo bei gekoppelten Boostern Tanks und Maschinen kontinuierlich abgeworfen werden können. Es zeigt sich, daß bei einem uniformen Gravitationsfeld die Bahnen aus mit konstantem Schub sowie mit abnehmendem Schub durchlaufenen Bögen bestehen, wobei endliche Unstetigkeiten zwischen den konstanten Schubabschnitten auftreten können.

Optimale Bahnen werden für gegebene Nutzlast sowie gegebene Größe und Richtung der Endgeschwindigkeit unter Berücksichtigung der Anfangsmasse oder des Anfangsschubes für ein- oder zweistufige Systeme angegeben.

**Trajectory and Staging Optimization with Clustered Boosters.** Theoretical analysis of the limiting case where engines and tanks in a clustered booster system can be jettisoned continuously. For a uniform gravitational field the trajectories are shown to consist of constant thrust and decreasing thrust arcs with possible finite thrust discontinuities between constant thrust segments.

Under given payload and given intensity and inclination of the terminal velocity vector, the minimal trajectories are determined with respect to initial mass or initial thrust, with or without second stage.

### I. Introduction

Pour la mise en orbite de charges importantes ou la réalisation de trajectoires très énergétiques, la considération des pertes de gravitation domine celle de la traînée aérodynamique et la poussée requise au départ est très élevée.

Cette poussée peut s'obtenir en groupant un certain nombre de fusées en parallèle (*Saturne*). Une telle solution a l'avantage de se prêter en principe au largage successif de moteurs (*Atlas*) aussi bien que de réservoirs suivant les nécessités d'une optimisation de type donné.

<sup>1</sup> Professeur aux Universités de Liège et de Louvain, Belgique.

L'étude théorique entreprise ici considère le cas limite de l'étagement parallèle continu, c'est-à-dire le fractionnement de la poussée en une infinité de moteurs infinitésimaux alimentés par des réservoirs infinitésimaux largués au rythme de la consommation des ergols.

Les programmes de réduction de la poussée sont analysés pour les trajectoires naturellement incurvées dans un champ de gravitation uniforme, la vitesse et l'angle terminal d'injection sur orbite étant imposés.

De grandes différences dans les caractéristiques de la programmation optimale apparaissent suivant que l'on cherche à rendre la masse initiale ou la poussée initiale minimum, la charge utile étant fixe. Les modifications apportées par la présence d'un second étage sont aussi examinées.

Un grand nombre de considérations techniques et technologiques interviennent pour déterminer la mesure dans laquelle ces solutions idéales sont transposables en pratique. Elles sortent du cadre de cette étude mais l'importance des gains en jeu indique dans certains cas qu'elles méritent un examen approfondi.

## II. Hypothèses et notations

- a) Le champ de gravitation est uniforme;
- b) la poussée est constamment tangente à la trajectoire;
- c) la trainée aérodynamique est négligée;
- d) le poids des moteurs à ergols liquides est à chaque instant proportionnel à la poussée  $F$  réalisée;

$$g M_e = \frac{F}{K} \quad (1)$$

Cette relation implique une correspondance entre la réduction de la poussée et une réduction du poids des moteurs. Ceux-ci sont donc fractionnés au point de pouvoir être largués de façon continue.

- e) Le poids des réservoirs est à chaque instant proportionnel au poids d'ergols  $g M_p$  restant à consommer

$$g M_s = \zeta g M_p \quad (2)$$

Cette relation implique également un fractionnement indéfini des réservoirs qui sont largués au rythme de la consommation en ergols.

- f) Toutes les variables physiques sont considérées comme des fonctions d'une variable descriptive indépendante à croissance monotone entre une valeur initiale fixe  $\sigma_1$  et une valeur fixe  $\sigma_3$  correspondant à la consommation complète des ergols du premier étage. Les dérivées par rapport au paramètre descriptif sont notées

$$\frac{df(\sigma)}{d\sigma} = f^0$$

Le temps étant également à croissance monotone on aura en particulier

$$t^0 \geq 0$$

L'égalité à zéro sur un intervalle fini de variation de  $\sigma$  peut se produire. Elle correspond aux discontinuités dans le temps que peuvent subir certaines variables lors de la séparation d'une masse finie du système propulsif.

## III. Equations fondamentales

$M^*$  désignant la masse propulsée par le groupement en parallèle des fusées du premier étage, la masse totale à un instant quelconque est

$$M(\sigma) = M^* + M_p(\sigma) + M_s + M_e$$

soit, en vertu de (1) et (2)

$$M(\sigma) = M^* + (1 + \zeta) M_p(\sigma) + \frac{F(\sigma)}{K g} \quad (3)$$

Différentions cette relation par rapport à  $\sigma$  et éliminons le débit massique d'ergols par l'équation de la poussée

$$F = -c \frac{dM_p}{dt} = -c \frac{M^0}{t^0}$$

où  $c$  est la vitesse effective d'éjection, que nous supposons constante; il vient

$$M^0 = -\frac{(1 + \zeta) F}{c} t^0 + \frac{F^0}{K g} \quad (4)$$

Il est essentiel d'exprimer analytiquement le fait que la poussée ne peut que décroître. L'équation

$$F^0 = -a^2 \frac{g}{c} M t^0 \quad (5)$$

convient à cet effet. La variable  $a$ , dont la connaissance fixe la programmation de réduction de la poussée et qui n'interviendra pas dans sa dérivée, est notre variable de guidage, au sens général que nous avons donné à ce terme.

L'équation du mouvement le long de la tangente à la trajectoire est, suivant les hypothèses admises

$$M \frac{dV}{dt} = F - M g \sin \gamma \quad (6)$$

où  $\gamma$  est l'angle que fait le vecteur vitesse avec l'horizontale. L'équation correspondante suivant la normale est

$$V \frac{d\gamma}{dt} = -g \cos \gamma \quad (7)$$

Les quatre équations fondamentales du problème sont représentées par les équations (4) à (7). Elles gouvernent quatre fonctions inconnues du temps  $M$ ,  $V$ ,  $\gamma$  et  $F$  et forment un système qui requiert pour être intégré la connaissance de la fonction  $a$ , c'est-à-dire du programme de guidage. Celui-ci sera déterminé par le calcul des variations de façon à retirer certaines performances optimales du système. Auparavant il est avantageux pour la simplicité de l'écriture et pour le calcul numérique d'introduire des variables sans dimensions

$$\omega = \frac{V}{c} \quad \tau = \frac{g}{c} t \quad \beta = \frac{F}{M g} \quad \mu = \frac{M}{M_u} \quad (8)$$

L'unité de masse  $M_u$  est la masse dite "utile" qui sera à définir dans chaque cas particulier.

Notant que, suivant la définition du facteur d'accélération instantanée  $\beta$ , on a

$$\frac{\beta^0}{\beta} = \frac{F^0}{F} - \frac{M^0}{M} = \frac{F^0}{F} - \frac{\mu^0}{\mu} \quad (9)$$

le système fondamental peut s'écrire

$$[G]_1 = \omega^0 + (\sin \gamma - \beta) \tau^0 = 0 \quad (10)$$

$$[G]_2 = \gamma^0 + \frac{\cos \gamma}{\omega} \tau^0 = 0 \quad (11)$$

$$[G]_3 = \frac{\mu^0}{\mu} - \frac{\beta^0}{K - \beta} + (1 + \zeta) \frac{K \beta}{K - \beta} \tau^0 = 0 \quad (12)$$

$$[G]_4 = -\beta^0 - a^2 \tau^0 + \frac{a^2}{K} \beta \tau^0 + \beta^2 (1 + \zeta) \tau^0 = 0 \quad (13)$$

L'avant dernière équation a été obtenue en éliminant  $a$ , la dernière en éliminant  $\mu^0$  entre les équations primitives.

#### IV. Equations d'Euler et conditions de transversalité

Désignons par  $G(q, q^0, a)$  la fonction

$$G = \sum_{i=1}^4 \lambda_i [G]_i$$

construite à l'aide de quatre multiplicateurs lagrangiens  $\lambda_i$ ;  $q$  désignant l'une des cinq fonctions  $(\omega, \gamma, \mu, \beta, \tau)$ . Les équations d'EULER du problème variationnel

$$\delta \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} G d\sigma = 0$$

sont

$$[G]_q = -\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\partial G}{\partial q^0} \right) + \frac{\partial G}{\partial q} = 0$$

et

$$[G]_a = \frac{\partial G}{\partial a} = 0$$

c'est-à-dire explicitement

$$[G]_\omega = -\lambda_1^0 - \lambda_2 \frac{\cos \gamma}{\omega^2} \tau^0 = 0 \quad (14)$$

$$[G]_\gamma = -\lambda_2^0 + \lambda_1 \tau^0 \cos \gamma - \lambda_2 \frac{\sin \gamma}{\omega} \tau^0 = 0 \quad (15)$$

$$[G]_\mu = -\frac{1}{\mu} \lambda_3^0 = 0 \quad (16)$$

$$[G]_\beta = \lambda_4^0 + (1 + \zeta) \left( \frac{K}{K - \beta} \right)^2 \lambda_3 \tau^0 - \lambda_1 \tau^0 + \lambda_4 \frac{a^2}{K} \tau^0 + 2\beta \lambda_4 (1 + \zeta) \tau^0 = 0 \quad (17)$$

$$[G]_\tau = U^0 = 0 \quad (18)$$

où

$$U = \lambda_1 (\sin \gamma - \beta) + \lambda_2 \frac{\cos \gamma}{\omega} + \lambda_3 (1 + \zeta) \frac{K \beta}{K - \beta} - \lambda_4 a^2 + \lambda_4 \frac{a^2}{K} \beta + \lambda_4 \beta^2 (1 + \zeta)$$

et

$$[G]_a = 2 \lambda_4 a \tau^0 \left( \frac{\beta}{K} - 1 \right) = 0 \quad (20)$$

La condition de transversalité est

$$\left[ \lambda_1 \delta \omega + \lambda_2 \delta \gamma + \lambda_3 \frac{\delta \mu}{\mu} - \left( \lambda_4 + \frac{\lambda_3}{K - \beta} \right) \delta \beta + U \delta \tau \right]_{\sigma_1}^{\sigma_2} = 0 \quad (21)$$

On sait par la théorie générale du problème de MAYER sous forme paramétrique [2] que les équations d'EULER sont liées par une identité qui est ici

$$\omega^0[G]_{\omega} + \gamma^0[G]_{\gamma} + \mu^0[G]_{\mu} + \beta^0[G]_{\beta} + \tau^0[G]_{\tau} + \sum_{i=1}^4 \lambda_i^0[G]_i \equiv 0$$

Ceci montre que pour toute extrémale le long de laquelle une des variables  $q$  ne serait pas constante, l'équation d'EULER correspondante  $[G]_q = 0$  est automatiquement vérifiée quand on satisfait aux autres et aux équations fondamentales (10) à (13).

### V. Nature des extrémales

Les équations (16) et (18) montrent déjà que  $\lambda_3$  et  $U$  sont des constantes le long de toute extrémale. De plus comme les conditions de raccord des extrémales (conditions de WEIERSTRASS et ERDMANN) demandent que les grandeurs  $\partial G / \partial q^0$  soient continues, les multiplicateurs et la grandeur  $U$  sont des fonctions continues. Par conséquent  $\lambda_3$  et  $U$  assument une valeur constante tout le long d'une trajectoire optimale.

Nous n'envisagerons que des problèmes d'optimum sans imposition de contraintes sur la durée de description de la trajectoire. Alors, comme la condition de transversalité comporte le terme  $U \delta(\tau_3 - \tau_1)$  avec variation arbitraire sur la durée (on peut comparer des trajectoires de durées différentes), elle ne peut être satisfaite que par

$$U = 0. \quad (22)$$

La valeur de la constante  $U$  sera donc nulle tout le long de la trajectoire ce qui, par (19), fournit une relation algébrique homogène entre les multiplicateurs. Ces derniers n'étant définis qu'à un facteur d'échelle près, la valeur effective de la constante  $\lambda_3$  est sans importance; pour le calcul numérique il sera commode de lui assigner la valeur 1.

Les différentes extrémales possibles résultent des différentes façons de remplir la condition d'EULER (20) relative à la variable de guidage. La solution  $\beta = K$  est à rejeter car cette valeur du facteur d'accélération ne peut être atteinte que par un moteur se propulsant lui-même à l'exclusion de toute autre masse, même du propergol qui lui est nécessaire. En fait on a toujours  $K - \beta > 0$ . Par contre trois autres possibilités conduisent à des solutions valables.

#### a) L'arc à poussée constante

Solution correspondant à

$$a \equiv 0 \quad (23)$$

ce qui, eu égard à (5), revient à maintenir la poussée constante. Dans ces conditions (12) et (13) s'intègrent facilement en

$$\frac{1}{\beta} + (1 + \zeta) \tau = cte \quad (24)$$

$$\beta \mu = cte \quad (25)$$

Les équations (10) et (11) doivent être intégrées numériquement ainsi que (14) et (15) pour le calcul des multiplicateurs  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Pour le calcul de  $\lambda_4$  on

peut, en vertu de l'identité entre équations d'EULER et du fait que  $\beta$  n'est pas constant, négliger (17) et se servir de (22) qui se réduit ici à

$$\lambda_1(\sin \gamma - \beta) + \lambda_2 \frac{\cos \gamma}{\omega} + \lambda_3(1 + \zeta) \frac{K\beta}{K - \beta} + \lambda_4(1 + \zeta)\beta^2 = 0. \quad (26)$$

b) *L'arc à poussée décroissante*

Solution de (20) correspondant à

$$\lambda_4 \equiv 0. \quad (27)$$

Dans ces conditions (17) se réduit à

$$(1 + \zeta) K^2 \lambda_3 = (K - \beta)^2 \lambda_1 \quad (28)$$

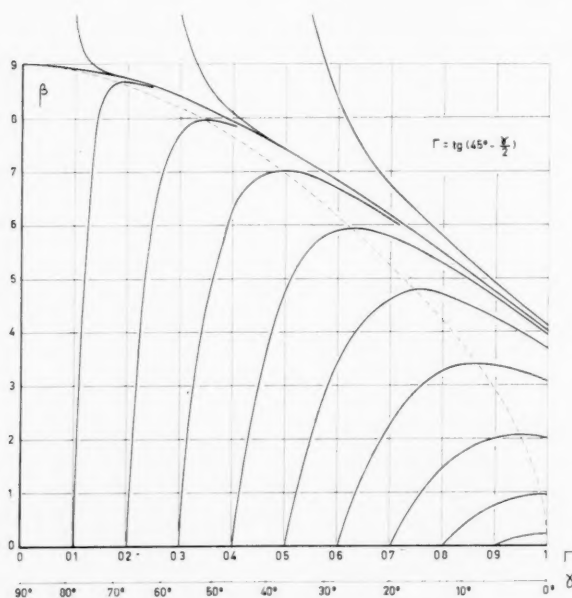


Fig. 1. Arcs à poussée décroissante. Famille de relations optimales entre le facteur d'accélération  $\beta$  et l'angle d'inclinaison  $\gamma$  de la trajectoire avec l'horizontale

Différentions cette relation en tenant compte de (16) et remplaçons  $\lambda_1^0$  par sa valeur tirée de (14), il vient

$$2\lambda_1\beta^0 + \lambda_2 \cdot \frac{(K - \beta) \cos \gamma}{\omega^2} \tau^0 = 0. \quad (29)$$

Les équations (28) et (29) ainsi que (22) qui se réduit à

$$\lambda_1(\sin \gamma - \beta) + \lambda_2 \frac{\cos \gamma}{\omega} + \lambda_3(1 + \zeta) \frac{K\beta}{K - \beta} = 0 \quad (30)$$

forment un système linéaire et homogène dans les multiplicateurs  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$ . En annulant le déterminant du système on trouve pour condition de compatibilité

$$\beta^0 = - \frac{K - \beta}{2\omega} \left( \frac{\beta^2}{K} - \sin \gamma \right) \tau^0.$$

En y substituant  $\beta^0$  par sa valeur tirée de (13) on trouve la loi de guidage explicite

$$a^2 = (1 + \zeta) \frac{K\beta^2}{K - \beta} + \frac{\beta^2 - K \sin \gamma}{2\omega} \quad (31)$$

La condition de compatibilité prend une forme remarquable quand on y élimine encore  $\omega$  à l'aide de (11) et que l'on prend  $\gamma$  comme variable indépendante:

$$\frac{d\beta}{d\gamma} = \frac{K - \beta}{2 \cos \gamma} \left( \frac{\beta^2}{K} - \sin \gamma \right). \quad (32)$$



Ainsi le facteur d'accélération  $\beta$  ne dépend que de l'inclinaison de la trajectoire sur l'horizontale et des conditions initiales de description de l'arc. Une famille de courbes intégrales de (32) a été calculée pour la valeur  $K = 81$  à l'ordinateur électronique. Le point ( $\beta = \sqrt{K}$ ,  $\gamma = \pi/2$ ) (ou encore  $\Gamma = \tan(\pi/4 - \gamma/2) = 0$ ) est un point singulier (Fig. 1) d'où part une des courbes de la famille et au voisinage duquel les autres courbes sont violemment incurvées et tendent à rejoindre la première pour  $\gamma = 0$  (ou  $\Gamma = 1$ ).

Le long d'un tel arc de courbe on peut intégrer l'équation différentielle

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{\sin \gamma - \beta}{\cos \gamma} d\gamma \quad (33)$$

déduite de (10) et (11) et l'on obtient alors le rapport entre les vitesses atteintes aux deux extrémités de l'arc. Par exemple

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \exp \int_{\gamma_3}^{\gamma_2} \frac{\beta - \sin \gamma}{\cos \gamma} d\gamma \quad (34)$$

Au facteur d'échelle  $\lambda_3$  près, les multiplicateurs sont complètement déterminés par les relations (27), (28) et (29).

### c) L'arc à temps constant

Posons

$$a = \frac{A}{\sqrt{\tau^0}} \quad (35)$$

et faisons tendre maintenant  $\tau^0$  vers zéro. Comme

$$\lim a \tau^0 = 0$$

l'équation (20) est encore satisfaite. Comme d'autre part

$$\lim a^2 \tau^0 = A^2$$

le système ne reste pas statique; on trouve

$$\beta^0 = A^2 \left( \frac{\beta}{K} - 1 \right) < 0$$

ce qui correspond, dans le temps, à une discontinuité possible du facteur d'accélération. D'autre part (12) s'intègre ici en

$$\mu (K - \beta) = cte. \quad (36)$$

Rapprochant ce résultat de (3) qui peut s'écrire

$$\mu (K - \beta) = \frac{K}{M_u} [M^* + (1 + \zeta) M_p(\sigma)]$$

on en déduit qu'il n'y a pas de consommation d'ergols. Cette solution doit donc bien être interprétée comme une séparation à un instant donné d'une partie finie du système propulsif. Enfin les équations (10) et (11) se réduisent à

$$\omega = cte \quad \gamma = cte. \quad (37)$$

En ce qui concerne les multiplicateurs on observera que  $a^2$  devenant infini, l'équation (22) ne peut être satisfaite que pour

$$\lambda_4 \equiv 0. \quad (38)$$

Comme  $\tau^0 = 0$ , ce résultat est bien compatible avec (17) tandis que (14) et (15) donnent

$$\lambda_1 = cte \quad \lambda_2 = cte. \quad (39)$$

## VI. L'arc à temps constant comme arc intermédiaire

Sur la base des résultats précédents des conclusions importantes peuvent être tirées concernant l'existence possible d'un arc à temps constant comme arc intermédiaire. Soient

$$\beta = \alpha_1 \quad \text{et} \quad \beta = \alpha_2$$

les valeurs du facteur d'accélération aux extrémités d'un tel arc. En ces extrémités (38) impose la nullité de  $\lambda_4$ ; il en découle l'identité des équations (26) et (30) qui demandent toutes deux de satisfaire aux extrémités les conditions

$$\lambda_1 (\sin \gamma - \alpha_1) + \lambda_2 \frac{\cos \gamma}{\omega} + \lambda_3 (1 + \zeta) \frac{K \alpha_1}{K - \alpha_1} = 0 \quad (40)$$

$$\lambda_1 (\sin \gamma - \alpha_2) + \lambda_2 \frac{\cos \gamma}{\omega} + \lambda_3 (1 + \zeta) \frac{K \alpha_2}{K - \alpha_2} = 0. \quad (41)$$

D'autre part il découle de (37) et (39) que les valeurs de  $\omega$ ,  $\gamma$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les mêmes dans ces deux conditions. Dès lors, après soustraction et simplification par  $(\alpha_1 - \alpha_2)$  il vient

$$\lambda_1 = (1 + \zeta) \frac{K^2}{(K - \alpha_1)(K - \alpha_2)} \lambda_3 \quad (42)$$

pour valeur constante du premier multiplicateur le long de l'arc intermédiaire à temps constant. Cette expression est valable en principe quelle que soit la nature de l'arc auquel on se raccorde (poussée constante ou décroissante) de part et d'autre. On constate cependant qu'elle est incompatible avec les valeurs

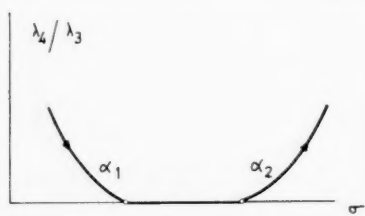


Fig. 2. Raccord d'un arc à temps constant avec deux arcs à poussée constante

$$(1 + \zeta) \frac{K^2}{(K - \alpha_1)^2} \lambda_3 \quad (1 + \zeta) \frac{K^2}{(K - \alpha_2)^2} \lambda_3$$

qui devraient être réalisées en vertu de (28) pour un raccord à gauche ou à droite avec un arc à poussée décroissante. On en déduit que "un arc à temps constant ne peut constituer une transition qu'entre deux arcs à poussée constante".

Par contre un arc à temps constant peut terminer une trajectoire en faisant suite aussi bien à une poussée décroissante qu'à une poussée constante. En effet s'il n'est plus suivi d'un autre arc il n'y a plus lieu de satisfaire à la condition (41).

Une autre indication importante concerne le signe de  $\lambda_4$  immédiatement avant et après l'arc intermédiaire. Suivant (17) on aura

$$\lambda_4^0 = \left( \lambda_1 - (1 + \zeta) \frac{K^2}{(K - \alpha_1)^2} \right) \tau^0$$

pour valeur terminale de la dérivée le long de l'arc venant se raccorder à gauche à l'arc à temps constant. Remplaçant  $\lambda_1$  par sa valeur (42) il vient

$$\lambda_4^0 = - (1 + \zeta) \frac{K^2 (\alpha_1 - \alpha_2)}{(K - \alpha_1)^2 (K - \alpha_2)} \lambda_3 \tau^0. \quad (43)$$

On trouve de même pour valeur initiale de la dérivée le long de l'arc à poussée constante quittant à droite l'arc intermédiaire

$$\lambda_4^0 = + (1 + \zeta) \frac{K^2 (\alpha_1 - \alpha_2)}{(K - \alpha_1) (K - \alpha_2)^2} \lambda_3 \tau^0. \quad (44)$$

Comme  $(\alpha_1 - \alpha_2) > 0$  et que  $\lambda_4$  est nul le long de l'arc intermédiaire on en déduit que le rapport  $\lambda_4/\lambda_3$  conserve immédiatement après l'arc intermédiaire la valeur positive qu'il avait immédiatement avant de l'aborder (Fig. 2).

### VII. Raccord entre un arc à poussée constante et un arc à poussée décroissante

Par (17) nous avons le long d'un arc à poussée constante ( $a = 0$ )

$$\frac{d\lambda_4}{d\tau} = - (1 + \zeta) \frac{K^2}{(K - \beta)^2} \lambda_3 + \lambda_1 - 2 (1 + \zeta) \beta \lambda_4. \quad (45)$$

A hauteur du raccord avec l'arc à poussée décroissante  $\lambda_4$  doit s'annuler et d'après (28)  $\lambda_1$  a exactement la valeur requise pour que

$$\frac{d\lambda_4}{d\tau} = 0 \quad \text{au raccord.} \quad (46)$$

Pour décider du signe de  $\lambda_4$  au voisinage du raccord nous différencions (45), remplaçons  $\lambda_1^0$ ,  $\lambda_3^0$  et  $\beta^0$  par leurs valeurs générales tirées de (14), (16) et (13) (avec  $a = 0$ ), puis évaluons l'expression au niveau du raccord à l'aide des résultats (27), (28), (29) et (46), il vient

$$\frac{d^2\lambda_4}{d\tau^2} = - (1 + \zeta) \frac{2K}{(K - \beta)^2} \left[ (1 + \zeta) \frac{K\beta^2}{K - \beta} + \frac{\beta^2 - K \sin \gamma}{2\omega} \right] \lambda_3.$$

Le crochet est positif car, en vertu de (31), il correspond exactement à la valeur prise par  $a^2$  à l'extrémité de l'arc à poussée décroissante (soulignons ici que, contrairement aux autres variables, la variable de guidage a subi des discontinuités). Par conséquent

$$\frac{1}{\lambda_3} \frac{d^2\lambda_4}{d\tau^2} < 0 \quad \text{au raccord.}$$

Il en résulte que le rapport  $\lambda_4/\lambda_3$  est négatif au voisinage immédiat du raccord comme l'indique la Fig. 3.

### VIII. Le critère de variation forte

Une discontinuité de la variable de guidage, faisant sauter sa valeur de  $a$  à  $\bar{a}$ , reste compatible avec la continuité des variables  $q$  du système fondamental. Comme le montrent les équations (7) à (10), seules les dérivées  $q^0$  subissent des discontinuités qui font passer leur valeur à  $\bar{q}^0$ .

Comme la fonction  $G$  est homogène dans les dérivées  $q^0$ , la fonction excès  $E$  de WEIERSTRASS peut être calculée par l'expression simplifiée

$$E = G(q, \bar{q}^0, \bar{a}) - G(q, \bar{q}^0, a).$$

Dans le cas présent on trouve

$$E = \lambda_4 \bar{\tau}^0 (\bar{a}^2 - a^2) \left( \frac{\beta}{K} - 1 \right). \quad (47)$$

Si une grandeur, dont la variation figure dans la condition de transversalité, est à rendre minimum,  $E$  doit être nul ou d'un signe opposé au coefficient de

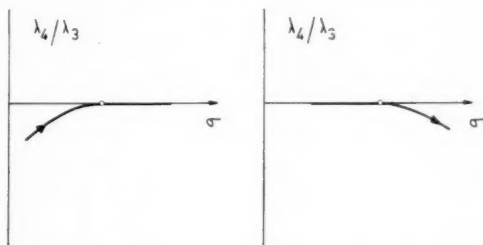


Fig. 3. Raccord entre un arc à poussée constante et un arc à poussée décroissante

cette variation; nul ou de même signe pour le cas d'un maximum. C'est la forme prise ici par le critère de variation forte.

### IX. Fusée de poids initial minimum

Cherchons à rendre  $M_1 = M(\sigma_1)$  minimum pour une masse utile  $M_u$  donnée, c'est-à-dire  $\mu(\sigma_1)$  minimum, dans les conditions suivantes

$$\omega(\sigma_1) = \omega_1 \quad \omega(\sigma_3) = \omega_3 \quad \gamma(\sigma_3) = \gamma_3$$

toutes valeurs imposées. Les variations de ces grandeurs sont donc nulles a priori et, eu égard à (22), la condition (20) de transversalité se réduit à

$$-\lambda_2(\sigma_1) \delta\gamma_1 + \lambda_3 \frac{\delta\mu_3}{\mu_3} - \lambda_3 \frac{\delta\mu_1}{\mu_1} - \left( \lambda_4(\sigma_3) + \frac{\lambda_3}{K - \beta_3} \right) \delta\beta_3 + \left( \lambda_4(\sigma_1) + \frac{\lambda_3}{K - \beta_1} \right) \delta\beta_1 = 0$$

Les variations qui subsistent aux limites ne sont pas indépendantes car l'équation (3), appliquée en  $\sigma_3$  quand les ergols sont épuisés, fournit

$$M(\sigma_3) = M^* + \frac{F(\sigma_3)}{Kg}. \quad (48)$$

Nous commencerons par supposer qu'en  $\sigma_3$  la trajectoire ne se prolonge pas en réalité par la mise à feu d'un second étage. Dans ces conditions nous pouvons assimiler  $M^*$  à  $M_u$ . D'où, divisant (48) par  $M(\sigma_3)$  et résolvant pour  $\mu_3$

$$\mu_3 = \frac{K}{K - \beta_3}. \quad (49)$$

Cette relation permet d'exprimer la variation de  $\beta_3$  en fonction de celle de  $\mu_3$ . Après substitution dans la condition de transversalité, nous pouvons annuler les coefficients des variations arbitraires sur  $\gamma_1$ ,  $\mu_3$  et  $\beta_1$  et obtenons les conditions aux limites naturelles du problème, qui sont

$$\lambda_2(\sigma_1) = 0 \quad (50)$$

$$\lambda_4(\sigma_3) = 0 \quad (51)$$

$$\lambda_4(\sigma_1) = -\frac{\lambda_3}{K - \beta_1}. \quad (52)$$

Il ne subsiste de la condition de transversalité que le terme

$$-\lambda_3 \frac{\delta\mu_1}{\mu_1}.$$

Si le coefficient de la variation est différent de zéro, c'est bien la condition nécessaire pour que  $\mu_1$  soit minimum. En fixant l'échelle des multiplicateurs par le choix

$$\lambda_3 = 1 \quad (53)$$

le coefficient en question est négatif et le critère de variation forte s'écrit

$$E \geq 0 \quad (54)$$

Il reste à déterminer la synthèse des arcs constituant une trajectoire minimale. Elle doit respecter la continuité des variables physiques et des multiplicateurs.

Puisque l'on a toujours  $K - \beta > 0$ , la condition (52) demande une valeur initiale négative de  $\lambda_4$ . Par conséquent le premier arc est à poussée constante ( $a = 0$ ) et, par (48), on constate que le critère (54) est bien vérifié. D'autre part la condition terminale (51) doit être satisfaite et ceci peut avoir lieu de deux façons distinctes:

a)  $\lambda_4$  s'annule pour la première fois en fin de trajectoire ( $\sigma_3$ ). Celle-ci est alors simplement constituée de l'arc à poussée constante.

b)  $\lambda_4$  s'annule en un point intermédiaire  $\sigma = \sigma_2$ . On ne pourra remplir la condition terminale (51) qu'en maintenant  $\lambda_4$  nul. Car, en prolongeant encore l'arc initial, ou  $\lambda_4$  deviendra positif et le critère de variation forte sera violé, ou il deviendra négatif, supprimant toute possibilité ultérieure de raccorder un nouvel arc et de remplir la condition (51).

On peut écarter le cas  $\tau_2 = \tau_3$ , car alors l'arc initial à poussée constante est simplement prolongé par un arc à temps constant. Ceci veut dire qu'en fin de propulsion, une fois la vitesse et l'angle d'injection atteints, on sépare la masse utile de la totalité ou d'une partie du système propulsif restant. Ce n'est qu'une variante technique secondaire du cas a).

Pour  $\tau_2 < \tau_3$ , il n'est pas question de prolonger l'arc initial par un arc à temps constant qui serait nécessairement de caractère intermédiaire car, suivant l'analyse faite à la section VI, ceci exigerait une valeur positive de  $\lambda_4$  antérieure au raccord. Il ne subsiste en définitive que la possibilité de raccorder directement un arc à poussée décroissante et ceci apparaît compatible avec les conclusions tirées à la section VII. Encore une fois une variante technique secondaire consiste à terminer la trajectoire par un arc à temps constant.

Ce qui décide en pratique de l'occurrence du cas a) de celle du cas b) est l'importance du gain de vitesse  $\omega_3 - \omega_1$  requis. Ceci apparaîtra clairement sur l'exemple de la fusée sonde, traité à la section suivante.

Quelle que soit la procédure suivie, le problème de l'intégration complète d'une trajectoire comporte un double jeu d'approximations successives. La procédure que nous allons décrire et qui s'applique au cas b), est simplement destinée à montrer le caractère cohérent du problème. Supposons que nous disposions en  $\sigma_2$  d'une première approximation aux valeurs prises par  $\beta$  et  $\gamma$ . Par intégration de (32) jusqu'à la valeur  $\gamma_3$  imposée, nous sommes en mesure de calculer (34) et, comme  $\omega_3$  est connu, nous en déduisons la valeur de  $\omega_2$ . Les valeurs prises en  $\sigma_2$  par les multiplicateurs découlent alors de (27), (28), (30) et (53). Nous disposons alors des valeurs initiales nous permettant d'intégrer à rebours le long de l'arc à poussée constante jusqu'à ce que, par exemple, la condition initiale (50) soit remplie. En général la vitesse initiale n'aura pas la valeur  $\omega_1$  requise et la condition (52) ne sera pas remplie. Il faudra procéder par perturbation des deux estimations de  $\beta_2$  et  $\gamma_2$  pour arriver à remplir ces deux dernières conditions.

L'intégration de (12) peut être différée jusqu'à établissement de la trajectoire exacte. Elle fournira le rapport  $\mu_1/\mu_3$  et le minimum  $\mu_1$  sera connu par utilisation de (49).

Une procédure analogue mais évidemment simplifiée s'applique au cas a).

### X. Fusée de poids initial minimum en vol vertical (fusée-sonde)

Pour  $\gamma = \pi/2$ ,  $\cos \gamma = 0$ ,  $\sin \gamma = 1$ , le problème précédent s'intègre sous forme finie, fournissant un guide précieux pour le cas des trajectoires incurvées.

On peut éliminer l'équation (11) du système fondamental et faire  $\lambda_2 \equiv 0$ , supprimant de ce fait la nécessité de se préoccuper de la condition (50). Il en découle de plus que (28) et (30) forment déjà un système homogène aux inconnues  $\lambda_1$  et  $\lambda_3$ , dont la condition de compatibilité fournit

$$\beta^2 = K \quad \text{ou} \quad \beta = \sqrt{K} \quad (55)$$

Ici l'arc à poussée décroissante est aussi un arc à accélération constante. Le point représentatif dans le diagramme de la Fig. 1 se maintient au point singulier.

a) Le long de l'arc à poussée constante les équations fondamentales ont les intégrales suivantes

$$\mu \beta = \mu_1 \beta_1 \quad (56)$$

$$(1 + \zeta) (\omega - \omega_1) = \ln \frac{\beta}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta} \quad (57)$$

$$(1 + \zeta) \tau = \frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta} \quad (\text{avec } \tau_1 = 0). \quad (58)$$

Il découle de (14) que  $\lambda_1$  reste constant, sa valeur étant fixée par le raccord à l'arc à accélération constante. Celle-ci se déduit de (28) et (55)

$$\lambda_1 = (1 + \zeta) \frac{K}{(\sqrt{K} - 1)^2} \quad (\text{avec } \lambda_3 = 1) \quad (59)$$

On en déduit par (26) la valeur initiale de  $\lambda_4$

$$\lambda_4(\sigma_1) = \frac{K}{\beta_1^2} \left[ \frac{\beta_1 - 1}{(\sqrt{K} - 1)^2} - \frac{\beta_1}{K - \beta_1} \right]. \quad (60)$$

Dès lors la condition aux limites (52) fournit la valeur initiale du facteur d'accélération qui, fait remarquable, ne dépend pas de la performance demandée mais uniquement de la constante  $K$

$$\beta_1 = \frac{K}{2\sqrt{K} - 1}. \quad (61)$$

Notons que cette valeur est relativement élevée; pour  $K = 81$ , par exemple, on trouve  $\beta_1 = 4.765$ .

b) A l'aide de (56), (57) et (58) on obtient les valeurs suivantes au début de la phase d'accélération constante

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \mu_1 \frac{\sqrt{K}}{2\sqrt{K} - 1} \\ (1 + \zeta) (\omega_2 - \omega_1) &= \ln \frac{2\sqrt{K} - 1}{\sqrt{K}} - \frac{\sqrt{K} - 1}{K} \\ (1 + \zeta) \tau_2 &= \frac{\sqrt{K} - 1}{K} \end{aligned}$$

Pour la même valeur de  $K$  les seconds membres valent respectivement 0.529, 0.537 et 0.0988.

Le gain de vitesse est à ce moment de l'ordre de la moitié de la vitesse effective d'éjection. Ce n'est que pour des gains plus faibles qu'il y a lieu d'étudier les trajectoires qui sont simplement à poussée constante et la valeur initiale du facteur d'accélération dépend alors du gain demandé.

La durée de la phase à poussée constante est relativement courte; de l'ordre du dixième de l'impulsion spécifique  $c/g$ .

c) Le long du segment à accélération constante  $\lambda_4$  reste nul; le facteur d'accélération conserve sa valeur (55) et les équations fondamentales s'intègrent sans difficultés

$$\mu_2 = \mu_3 \exp \left\{ (1 + \zeta) \frac{K}{\sqrt{K} - 1} (\tau_3 - \tau_2) \right\} \quad (62)$$

$$\omega_3 - \omega_2 = (\sqrt{K} - 1) (\tau_3 - \tau_2) \quad (63)$$

Tandis que (49) devient

$$\mu_3 = \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{K} - 1} \quad (64)$$

et permet de remonter jusqu'à la valeur de  $\mu_1$ .

### XI. Fusée de poussée initiale minimum

Le problème de rendre minimum

$$\frac{F(\sigma_1)}{g M_u} = \mu_1 \beta_1$$

est probablement plus significatif du point de vue technique. En effet la conception et la mise au point de moteurs-fusée entre pour une part très importante dans le coût total et dans les délais de réalisation d'un projet.

On substituera alors

$$\delta \beta_1 = \frac{1}{\mu_1} \delta(\beta_1 \mu_1) - \frac{\beta_1}{\mu_1} \delta \mu_1$$

dans la condition de transversalité (20) en même temps que l'on continue à se servir de (49) pour éliminer la variation de  $\beta_3$ . L'annulation des variations arbitraires sur  $\gamma_1$ ,  $\mu_3$  et  $\mu_1$  fournit le nouveau jeu de conditions naturelles (50), (51) et

$$\lambda_4(\sigma_1) = - \frac{K}{\beta_1(K - \beta_1)} \quad (52')$$

qui remplace maintenant (52). La condition de transversalité exprime maintenant la condition de minimum nécessaire

$$\delta(\beta_1 \mu_1) = 0$$

pour autant que le coefficient de cette variation qui est  $-\lambda_3/(\beta_1 \mu_1)$  soit réellement différent de zéro.

Le choix  $\lambda_3 = 1$  donne à nouveau une valeur négative à ce coefficient et conserve la validité du critère (54). La nouvelle condition (52') exige encore une valeur initiale négative de  $\lambda_4$ . Par conséquent rien n'est à changer qualitativement aux discussions de la section IX. La section suivante montrera l'étendue des modifications quantitatives en jeu.

### XII. Fusée de poussée initiale minimum en vol vertical

Les résultats (55), (56), (57), (58), (59) et (60) restent valables. La nouvelle condition (52') fournit maintenant

$$\beta_1 = 1 \quad (61')$$

si bien que l'accélération nette de la fusée au départ est maintenant nulle. Les valeurs en début de phase d'accélération constante deviennent

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \mu_1 \sqrt{K} \\ (1 + \zeta)(\omega_2 - \omega_1) &= \ln \sqrt{K} - \frac{\sqrt{K} - 1}{\sqrt{K}} \\ (1 + \zeta) \tau_2 &= \frac{\sqrt{K} - 1}{\sqrt{K}} \end{aligned}$$



soit respectivement 0.111, 1.308 et 0.889 pour  $K = 81$ . La phase de poussée constante est donc beaucoup plus longue, étant de l'ordre de 85% de l'impulsion spécifique et à ce moment le gain de vitesse dépasse d'environ 30% la vitesse effective d'éjection. Les résultats (62), (63) et (64) restent valables.

### XIII. Modifications introduites par l'addition d'un second étage

La masse  $M^*$  devient celle d'un second étage

$$M^* = M_u + M_s^* + M_e^* + M_p^*$$

Pour simplifier le calcul nous adoptons des indices constructifs

$$\sigma = \frac{M_s^*}{M^*} \quad \varepsilon = \frac{M_e^*}{M^*}.$$

Autrement dit nous maintenons la masse structure (y compris les réservoirs) et la masse du moteur proportionnelles à la masse totale de l'étage. Dans ces conditions

$$M^*(1 - \varepsilon - \sigma) = M_u + M_p^*.$$

L'accroissement de vitesse donné par le dernier étage est évalué sans tenir compte des pertes de gravitation, ceci étant d'autant plus exact que l'angle  $\gamma_3$  se rapproche de zéro:

$$\Delta\omega = \frac{c^*}{c} \ln \frac{M^*}{M^* - M_p^*} = \frac{c^*}{c} \ln \frac{\mu^*}{1 + (\varepsilon + \sigma)\mu^*}$$

où

$$\mu^* = M^*/M_u.$$

L'équation (49) est maintenant à remplacer par la suivante

$$\mu^* = \mu_3 \frac{K - \beta_3}{K}$$

toujours déduite de (48). Par conséquent

$$\Delta\omega = \frac{c^*}{c} \ln \frac{\mu_3(K - \beta_3)}{K + (\varepsilon + \sigma)\mu_3(K - \beta_3)}. \quad (65)$$

Pour une vitesse terminale  $\omega_3$  imposée on aura maintenant pour valeur de la vitesse en fin de combustion du premier étage

$$\omega(\sigma_3) = \omega_3 - \Delta\omega.$$

Nous en prenons la variation que nous substituons dans la condition de transversalité

$$\delta\omega(\sigma_3) = K \frac{c^*}{c} \frac{1}{K + (\varepsilon + \sigma)\mu_3(K - \beta_3)} \left[ \frac{\delta\beta_3}{K - \beta_3} - \frac{\delta\mu_3}{\mu_3} \right]$$

a) Dans le problème du minimum de  $\mu_1$

Les conditions (50) à (52) sont conservées. La condition supplémentaire

$$K \frac{c^*}{c} \lambda_1(\sigma_3) = \lambda_3 [K + (\varepsilon + \sigma)\mu_3(K - \beta_3)] \quad (66)$$

remplace (49) pour le calcul de  $\mu_3$  et par conséquent de  $\mu_1$ . Dans le cas de la fusée-sonde par exemple

$$\mu_3 = \frac{1}{\varepsilon + \sigma} \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{K} - 1} \left[ \frac{c^*}{c} (1 + \zeta) \frac{K}{(\sqrt{K} - 1)^2} - 1 \right] \quad (64')$$

remplace (64) avec dès lors

$$\Delta\omega = \frac{c^*}{c} \left[ \ln \frac{1}{\varepsilon + \sigma} - \ln \left( 1 + \frac{1}{\frac{c^*}{c} (1 + \zeta) \frac{K}{(\sqrt{K} - 1)^2} - 1} \right) \right].$$

Pour qu'un second étage améliore les performances ( $\Delta\omega > 0$ ) il faut que

$$\varepsilon + \sigma < 1 - \frac{c(\sqrt{K} - 1)^2}{c^* K (1 + \zeta)}.$$

Cette condition devient difficile à tenir pour les valeurs élevées de  $K$  et faibles de  $\zeta$ , à moins que la vitesse effective d'éjection du second étage ne soit nettement supérieure à  $c$ .

*b) Dans le problème du minimum de  $\beta_1\mu_1$*

Les conditions (50), (51) et (52') de la section XI sont conservées et la condition additionnelle (66) s'applique également. Nous pouvons en tirer les mêmes conclusions quant à l'efficacité d'un second étage.

#### XIV. Conclusions et remarques finales

Les exemples illustrés à la Fig. 4 et relatifs au cas d'une fusée-sonde, permettent peut être de tirer certaines conclusions ayant une valeur générale. Pour les caractéristiques

$$K = 81 \quad \zeta = 0.05 \quad \omega_1 = 0 \quad \text{et} \quad \omega_3 = 4.7$$

la courbe 1 représente en fonction du temps réduit la poussée  $\beta\mu$  par unité de poids utile, dans le cas où le minimum cherché est celui ( $\mu_1$ ) de la masse initiale par unité de masse utile. La courbe 2 représente la masse réduite  $\mu$  en fonction du temps dans les mêmes conditions.

Les courbes 3 et 4 correspondent respectivement à 1 et 2 quand le minimum cherché est  $\beta_1\mu_1$ , la poussée initiale par unité de poids utile.

Les courbes 5, 6, 7 et 8 correspondent respectivement à 1, 2, 3 et 4 lorsqu'on ajoute un second étage ayant les caractéristiques

$$\varepsilon + \sigma = 0.1 \quad c^* = 1.5c$$

(environ le rapport entre vitesses effectives d'éjection pour la combinaison Lox-Hydrogène liquide contre Lox-Kérosène) donnant un accroissement de vitesse réduite

$$\Delta\omega = 2.414$$

(soit environ la moitié de la performance totale requise).

On observera combien dans le cas 7, la présence d'un second étage noble réduit aussi bien la durée que l'importance de la phase de réduction de poussée du premier étage. On observera aussi l'écart considérable qui se manifeste entre les poussées initiales, les masses initiales et par conséquent les consommations d'ergols, suivant que l'on adopte l'un ou l'autre type de minimum. Ceci suffit à souligner l'importance des études conduisant à une définition correcte du type de minimum à adopter.

Enfin il faut bien reconnaître que dans la solution idéale pour une trajectoire incurvée, telle qu'elle a été exposée, on n'est pas maître de l'altitude terminale. Pour certaines applications il suffit que cette altitude soit supérieure à un minimum. Cette condition a plus de chances d'être réalisée pour un minimum de poussée initiale que pour un minimum de masse initiale. Si elle n'était pas réalisée, le traitement du problème devrait être élargi en incorporant l'équation du

gain d'altitude avec un cinquième multiplicateur, ce qui compliquerait fort la nature de l'arc à poussée décroissante. La distance couverte horizontalement peut aussi devenir telle qu'il faille tenir compte de la courbure du champ de gravitation.

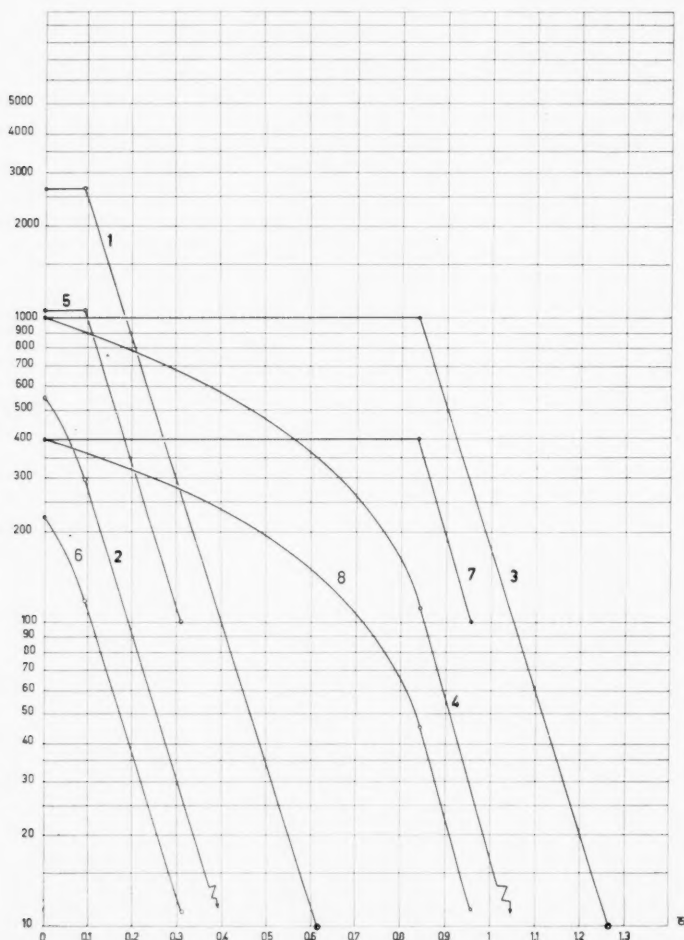


Fig. 4. Programmes optimaux pour une fusée-sonde en fonction du temps réduit  $\tau = tg/c$ . 1. Le rapport poussée/charge utile pour une fusée de poids minimum à l'envol. 3. Pour une fusée de poussée minimum à l'envol. 5. Comme sub 1, mais avec second étage. 7. Comme sub 3, mais avec second étage. Les courbes 2, 4, 6 et 8 donnent dans les mêmes conditions le rapport de la masse instantanée à la masse utile

#### Références

1. M. BARRÈRE, A. JAUMOTTE, B. FRAEIJIS DE VEUBEKE et J. VANDENKERCKHOVE, *Rocket Propulsion*, Chapter 12. Amsterdam: Elsevier, 1960.
2. B. FRAEIJIS DE VEUBEKE, Méthodes variationnelles et performances optimales en aéronautique. *Bull. soc. math. Belg.* 2 (1957).

### Discussion

M. ROY: Je vous remercie pour cette présentation volontairement raccourcie et qui me paraît parfaitement claire. Je voudrais vous poser une petite question. Vous avez dit qu'on détermine les deux termes fondamentaux par intégration en remontant à l'origine et à l'aide de deux conditions, dont l'une est une inégalité.

M. FRAEIJIS DE VEUBEKE: Non, l'inégalité était là pour montrer que la valeur demandée au multiplicateur est négative, ce qui explique la constitution qualitative de la trajectoire, mais la valeur demandée au multiplicateur est de plus déterminée.

M. CROCCO: Je voudrais demander ceci: vous avez, si je ne me trompe pas, employé la poussée dans la direction tangentielle. Evidemment, ceci constitue une limitation, peut-être pas pour le cas de fusée-sonde mais bien pour les autres cas.

M. FRAEIJIS DE VEUBEKE: Le Professeur LAW DEN a étudié le problème de l'optimisation de l'orientation d'une poussée constante pour obtenir le maximum de rayon d'action d'un engin balistique. Je crois qu'il confirmera l'affirmation que par rapport à une poussée tangentielle les gains sont faibles. Je pense que ce sera le même cas ici.

(s'adressant à M. LAW DEN) You optimized the range with respect to thrust orientation for a ballistic missile and you found gains which are small compared to the case of tangential thrust.

M. LAW DEN: That is true. The gain in range was about 7%.

M. FRAEIJIS DE VEUBEKE: If my memory is correct, you find that the thrust must be held constant in orientation in space, but the velocity vector's inclination changes with respect to the thrust orientation and at the end of the flight both are coincident. The gain on range is very small. Presumably this will also be true in the present case.

M. LAW DEN: No. The two vectors are coincident at the termination of the powered flight only when the final energy of the vehicle is being maximized, not the total range.

## Aspects analytiques du problème des perturbations d'un satellite artificiel

Par

Jean Kovalevsky<sup>1</sup>

(Avec 1 Figure)

### Résumé — Zusammenfassung — Abstract

**Aspects analytiques du problème des perturbations d'un satellite artificiel.** L'auteur décrit les effets d'origine non gravitationnelle, (principalement frottement atmosphérique et pression de radiation). Il semble cependant possible, de généraliser la méthode de VON ZEIPPEL jusqu'à inclure ces effets. Bien que la solution obtenue n'ait plus les caractéristiques d'une théorie générale au sens de la Mécanique Céleste classique, on peut néanmoins conduire les calculs de manière parallèle et obtenir des solutions formelles. Le problème de la convergence des séries obtenues reste entier.

En conclusion, il semble qu'on puisse d'ores et déjà considérer que le problème principal du mouvement d'un satellite autour d'une planète non sphérique ait reçu une solution satisfaisante. La famille d'orbites ainsi obtenue pourrait maintenant être considérée comme une famille d'orbites intermédiaires, chaque orbite étant caractérisée par ses éléments moyens. Les effets des forces d'origines différentes devraient être calculés à partir de ces orbites intermédiaires et il serait avantageux que les efforts soient maintenant concentrés sur les perturbations subies par ces orbites.

**Über die Anwendung der Störungsrechnung bei Satelliten.** Der Autor beschreibt die Effekte, die nicht von der Gravitation bewirkt werden (Widerstand, Strahlungsdruck). Es scheint möglich zu sein, die VON-ZEIPPEL-Methode auch auf diese Effekte anzuwenden. Allerdings gestatten diese Lösungen dann nicht mehr so allgemeine Aussagen wie diejenigen der klassischen Himmelsmechanik. Nichtsdestoweniger kann man aber analoge Überlegungen anstellen und zumindest formale Lösungen erhalten. Das Konvergenzproblem bleibt jedoch ungelöst.

Im Zusammenhang damit kann geschlossen werden, daß das Problem der Bewegung eines Satelliten um einen nicht kugelförmigen Planeten hinreichend genau gelöst werden kann. Die Klasse der so erhaltenen Bahnen kann als eine Familie von Zwischenbahnen aufgefaßt werden, wobei jede Bahn durch Mittelwerte ihrer Elemente bestimmt ist. Die Kraftwirkungen verschiedenen Ursprungs können dann mit Hilfe dieser Bahnen bestimmt werden und es erscheint möglich, damit Aussagen über die Störungen dieser Bahnen zu gewinnen.

**Analytical Approach of the Perturbation Problem for an Artificial Satellite.** The author describes the effects of non-gravitational origin (chiefly atmospheric drag and radiation pressure). It seems possible, however, to generalize the VON ZEIPPEL method to include these effects. Although the solution attained no longer has the characteristics of a general theory in the sense of classic celestial mechanics, one can nevertheless make parallel calculations and obtain formal solutions. The problem of the convergence of the series obtained remains unsolved.

<sup>1</sup> Bureau des Longitudes, 3, rue Mazarine Paris 6<sup>e</sup>, France.

In conclusion, it seems that one can now consider the principal problem of the movement of a satellite around a non-spherical planet as having been satisfactorily solved. The family of orbits thus obtained could be considered as a family of intermediate orbits, each orbit having the characteristics of its mean elements. The effects of forces of different origins would have to be calculated on the basis of these intermediate orbits and it would be advantageous to concentrate efforts on the perturbations undergone by these orbits.

### I. Introduction

Le problème du mouvement d'un satellite artificiel autour de la Terre a, au cours des quatre dernières années, été l'objet de très nombreuses études. Il n'est sans doute pas exagéré d'évaluer à plus de mille, le nombre de rapports, articles, etc. — distribués ou publiés à ce sujet depuis le lancement du premier objet dans l'espace.

C'est en effet le premier problème à résoudre que de trouver, à partir des observations visuelles, photographiques, radioélectriques (radar ou effet DOPPLER), une trajectoire dont les particularités permettent de déterminer le système de forces auquel a été soumis l'objet étudié. La connaissance de ce système de forces permet alors de calculer la trajectoire précise et fournit des prévisions sous forme d'éphémérides.

Par suite de la complexité de ces forces, d'origines très diverses, on a été conduit souvent à fractionner le problème en isolant les difficultés et à étudier séparément les effets des forces d'origines différentes. Cette procédure fournit une première approximation des perturbations. Elle ne peut, cependant, s'appliquer indéfiniment, dès que les effets secondaires (ou mixtes) provenant de l'effet de l'une des forces sur les perturbations produites par une autre, ne sont plus négligeables. C'est ce qui se produit notamment dans la conjonction du frottement atmosphérique et de l'aplatissement terrestre, et ceci complique singulièrement le problème.

Dès lors, si l'on désire produire une théorie de toutes ces perturbations, avec une précision de l'ordre de celle des meilleures observations photographiques, on est conduit à écrire des équations très complètes, donc très compliquées, dont la solution analytique est longue et difficile. A vrai dire, cette solution n'existe pas encore. Pressés par le temps, devant fournir très rapidement des résultats, la plupart des auteurs se sont contentés de théories simplifiées, lorsqu'ils n'ont pas, tout simplement, intégré numériquement les équations différentielles du mouvement, au risque de ne plus distinguer les effets suivant leurs causes.

D'ailleurs, on a pu objecter que la recherche d'une solution analytique du problème du mouvement d'un satellite artificiel n'est qu'un exercice purement académique, inutile, puisqu'une fois les équations écrites, leur intégration numérique fournit les éphémérides et même peut améliorer les valeurs numériques des forces en présence. Cependant, tout effet de force dont on n'aurait pas tenu compte, ne peut être isolé et reconnu que grâce à la connaissance analytique de sa forme possible. La découverte des termes du troisième ordre dans le potentiel terrestre n'est qu'un exemple de ceci. La solution analytique est donc, en fait, un instrument essentiel de recherche dans l'étude dynamique de l'espace environnant. Seule (à condition d'être complète dans ses hypothèses), elle peut fournir une preuve irréfutable de l'origine d'un effet, en excluant les coïncidences numériques, d'autant plus probables que les effets à discerner sont faibles.

Il semble bien maintenant que, grâce aux très nombreuses tentatives faites de traiter analytiquement le problème principal du mouvement d'un satellite

artificiel (perturbations dues à l'aplatissement de la Terre), et aux quelques solutions analytiques partielles publiées sur les autres causes de perturbations, il soit possible de discerner un caractère commun à ces méthodes et de distinguer celles qui sont les plus puissantes et sont susceptibles, sinon de fournir une solution analytique du problème complet, du moins de tenir compte du plus grand nombre possible de forces simultanément.

Il apparaît en effet nettement que toutes les théories n'ont pas la même puissance. De nombreuses solutions proposées, si elles permettent d'atteindre rapidement l'objectif poursuivi (en général une théorie du premier ordre et souvent avec l'hypothèse d'une faible excentricité), deviennent d'un maniement très délicat sinon difficile dès que l'on désire poursuivre les calculs au delà. Les difficultés proviennent soit d'une définition peu adéquate des constantes d'intégration, dépendant parfois de l'ordre de la solution, soit d'hypothèses simplificatrices portant sur certains effets, sinon sur le champ de forces lui-même. En fait la poursuite de ces théories jusqu'à la limite de précision des observations ne serait possible qu'avec des modifications plus ou moins grandes du mode de résolution proposé.

## II. Perturbations dues à l'aplatissement terrestre

### a) Le potentiel terrestre

Le développement en harmoniques sphériques du potentiel terrestre est le suivant:

1) Si on suppose que le potentiel est de révolution autour de l'axe des pôles, on a:

$$V = \frac{\mu}{a_e} \left[ \frac{a_e}{r} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{J_n P_n(\sin \varphi) a_e^n}{r^n} \right] \quad (1)$$

où  $a_e$  est le rayon équatorial terrestre,  $\mu$  est le produit de la constante de la gravitation par la masse de la Terre,  $P_n$  est le polynôme de LEGENDRE d'ordre  $n$  et  $\varphi$  la latitude du point considéré, situé à une distance  $r$  du centre de la Terre ( $\sin \varphi = z/r$ ). Les coefficients  $J_n$  sont sans dimension et décroissent rapidement lorsque  $n$  croît.

Les déterminations récentes des coefficients  $J_n$  sont nombreuses, mais souvent incompatibles si l'on compare les erreurs probables données par leurs auteurs. Les deux plus récentes, basées chacune sur les mouvements de 3 satellites: celle de KOZAI [1] à l'aide de Vanguard 1, Explorer 7 et Vanguard 3 et celle de KING-HELE [2] à l'aide de Vanguard 1, Spoutnik 2 et Explorer 7 sont résumées dans le Tableau 1.

Tableau 1

Coefficient	Résultats de KOZAI	Résultats de KING-HELE
$10^6 J_2$	$1082,49 \pm 0,024$	$1082,79 \pm 0,15$
$10^6 J_3$	$- 2,29 \pm 0,02$	$- 2,4 \pm 0,3$
$10^6 J_4$	$- 2,12 \pm 0,04$	$- 1,4 \pm 0,2$
$10^6 J_5$	$- 0,23 \pm 0,02$	$- 0,1 \pm 0,1$
$10^6 J_6$	0	$+ 0,9 \pm 0,8$



Il est probable que les erreurs moyennes indiquées — qui sont des erreurs internes provenant des résidus — ne représentent pas, surtout dans le premier cas, la précision avec laquelle on connaît ces constantes. Certes il est souhaitable d'utiliser plus complètement et sur un nombre plus grand de satellites les observations de haute précision (notamment les photographies à l'aide de chambres de BAKER-NUNN) pour améliorer ces erreurs externes. Il ne faut cependant pas négliger la part que les théories peuvent avoir dans ces différences. Nous avons déjà indiqué autre part (3) pourquoi l'interprétation de certaines constantes d'intégration pour certaines théories pouvait être délicate et peut-être à l'origine d'erreurs systématiques. La facilité d'interprétation des observations en fonction des constantes d'intégration doit être un critère fondamental dans le choix des théories.

2) Si l'on ne suppose plus que l'équateur soit circulaire, le potentiel dépend alors de la longitude géographique  $\lambda$  du point étudié. Au potentiel donné par (1), il faut encore ajouter les termes:

$$\mu \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{q=1}^n J_{nq} \frac{a_e^q}{r^{n+1}} P_{nq}(\sin \varphi) \sin q(\lambda + \beta_{nq}) \quad (2)$$

$P_{nq}(\sin \varphi)$  est une fonction de LEGENDRE associée,  $J_{nq}$  et  $\beta_{nq}$  sont des constantes donnant la magnitude et le déphasage par rapport au méridien, origine des perturbations.

On a détecté jusqu'à présent  $J_{22}$  à l'aide des observations de Vanguard 2 et Vanguard 3 [4, 5] et  $J_{41}$  [5].

#### b) Équations dans le problème gravitationnel principal

Par suite de la faiblesse des corrections au potentiel introduites par les termes de la formule (2), il suffit de ne considérer, comme on l'a fait d'ailleurs, dans tous les travaux relatifs à ce problème, que le potentiel (1) limité de  $J_2$  à  $J_5$ .

Les équations du mouvement en coordonnées rectangulaires à direction fixe, centrées au centre de la Terre supposée fixe (ce qui revient à négliger les perturbations luni-solaires) sont:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial z} \quad (3)$$

soit encore, tout système équivalent à celui-ci, utilisant tel ou tel système classique de variables utilisé en Mécanique Céleste: voir par exemple MOULTON [6], TISSERAND [7] ou tout autre ouvrage de Mécanique Céleste.

On aura ainsi le système d'équations de LAGRANGE, où les inconnues sont les six éléments osculateurs classiques:

$a$ : demi-grand axe

$e$ : excentricité

$i$ : inclinaison

$\Omega$ : longitude du noeud

$\omega$ : argument du périée

$M$ : anomalie moyenne.

$R$  est la fonction perturbatrice,  $R = V - \mu/r$  et  $n$ , le moyen mouvement est une écriture abrégée de  $\sqrt{\mu a}^{-3/2}$

$$\begin{cases}
 \frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M} \\
 \frac{de}{dt} = \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \omega} \\
 \frac{di}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \operatorname{tg} i} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} \\
 \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} \\
 \frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \operatorname{tg} i} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} \\
 \frac{dM}{dt} = n - \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial i} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a}
 \end{cases} \quad (4)$$

On aura aussi le système classique d'équations canoniques de DELAUNAY, si l'on pose:

$$\begin{aligned}
 L &= \sqrt{\mu a}; & l &= M \\
 G &= \sqrt{\mu a (1-e^2)}; & g &= \omega \\
 H &= \sqrt{\mu a (1-e^2) \cos i}; & h &= \Omega \\
 \text{et si } F &= \frac{\mu^2}{2L^2} + R & \text{on a:}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
 \frac{dL}{dt} = \frac{\partial F}{\partial l}; & \frac{dG}{dt} = \frac{\partial F}{\partial g}; & \frac{dH}{dt} = \frac{\partial F}{\partial h} \\
 \frac{dl}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L}; & \frac{dg}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial G}; & \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial H}
 \end{cases} \quad (5)$$

c) *Analogie avec les problèmes de Mécanique Céleste classique*

Dans les systèmes d'équations (3), (4) ou (5), les seconds membres sont des fonctions des coordonnées  $x, y, z$  seulement. Si l'on tient compte de (2), il s'y introduit  $\lambda$ , qui est une fonction linéaire du temps.

Cette fonction perturbatrice  $R$  peut s'exprimer en fonction des six variables choisies (canoniques, de LAGRANGE etc.) à l'aide de séries de FOURIER de la forme:

$$\sum A_{jk} \cos(jM + k\omega) \quad (6)$$

où  $A_{jk}$  dépend des variables  $a, e, i$  (ou  $L, G, H$ ) et  $j$  et  $k$  sont des nombres entiers. Si l'on tient compte des termes (2), un troisième argument linéaire, contenant  $\Omega + \lambda$  s'introduit dans le cosinus.

Or, il se trouve que telle est exactement la forme des équations que l'on rencontre dans les divers types de problèmes de 3 corps ou plus qui sont l'objet, depuis plus de 200 ans, de l'étude des astronomes. Que ce soit la théorie des planètes ou celle des satellites, les équations du mouvement ont une des formes (3), (4) ou (5) et la fonction perturbatrice  $R$  prend la forme générale:

$$\sum A_{jklm_1m_2} \cos(jM + k\omega + l\Omega + m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \dots) \quad (7)$$

où  $\lambda_1, \lambda_2$  sont des fonctions linéaires du temps, très analogues, mais en général plus complexes que la forme (6).

A titre d'exemple, pour la théorie de la Lune, cette fonction perturbatrice se développe sous la forme (7) avec une seule fonction linéaire du temps supplémentaire, l'anomalie moyenne du Soleil.

Il s'ensuit que toutes les méthodes ayant été essayées avec succès en Mécanique Céleste, soit pour la Lune, soit dans d'autres cas, seront valables pour le problème gravitationnel principal d'un satellite artificiel. Un certain nombre de ces méthodes sont décrites par BROWN [8] et toutes peuvent convenir pour traiter le problème qui nous concerne. Pratiquement d'ailleurs, la plupart de ces méthodes ont été essayées.

La méthode de DELAUNAY par BROUWER [9]. La lourdeur du procédé paraît inutile pour ce problème simple. Le mouvement d'un satellite artificiel offre cependant un exemple permettant d'étudier à fond le mécanisme de cette méthode, ce qu'est en train de faire MORANDO à Paris.

La méthode de HILL-BROWN par BROUWER [9] ou GREBENIKOV [10];

La méthode de HANSEN, par MUSEN [11];

La méthode des équations de LAGRANGE a été souvent utilisée. Elle m'a permis de retrouver, jusqu'au second ordre les résultats de BROUWER [3]. KOZAI l'a utilisée aussi sous une forme évitant l'emploi de l'anomalie moyenne afin d'obtenir des formules finies [12]. Citons encore MERSON et PLIMMER [13].

Parmi les méthodes utilisant une orbite intermédiaire citons celles de STERNE [14] ou de GARFINKEL [15] qui recherchent des Hamiltoniens partiels donnant une solution sous forme finie.

Enfin, appliquant une méthode proposée par VON ZEIPPEL en 1916 [16], D. BROUWER a fourni une remarquable solution de ce problème [17]<sup>1</sup>.

En conséquence, l'énoncé du problème étant similaire à l'énoncé des principaux problèmes classiques de Mécanique Céleste, les méthodes mises au point dans la résolution de ces problèmes, devaient donner pour le mouvement d'un satellite artificiel une solution. Cette solution, en général, apparaît beaucoup plus rapidement et à la suite de calculs moins nombreux, puisque le problème gravitationnel principal dépend essentiellement de deux paramètres angulaires ( $M$  et  $\omega$ ) seulement.

#### d) Analogie avec la théorie de la Lune

L'analogie, en fait, est encore beaucoup plus précise entre le problème principal de la théorie de la Lune et le problème qui nous préoccupe. Elle ne repose pas seulement sur l'analogie entre les formes (6) et (7) de la fonction perturbatrice, mais aussi entre les moyens et le formulaire permettant d'arriver à ces développements.

En effet, dans le problème principal de la théorie de la Lune (perturbations par le Soleil supposé se mouvoir suivant les lois de KEPLER), la fonction perturbatrice  $R$  est:

$$R = k^2 m' \left[ \frac{1}{A} - \frac{x x' + y y' + z z'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \right] \quad (8)$$

où  $x', y', z'$  sont les coordonnées géocentriques du Soleil (masse  $m'$ )

$x, y, z$  sont les coordonnées géocentriques de la Lune,

$A$  est la distance Lune-Soleil.

<sup>1</sup> Je dois signaler que pendant que je rédigeais cette communication, j'ai reçu un exemplaire avant tirage d'un excellent travail de W. M. KAULA, discutant de façon beaucoup plus détaillée qu'il ne m'a été possible de le faire ici, les diverses questions relatives aux aspects géodésiques du problème des satellites artificiels et décrivant en particulier la plupart des théories que je cite. "Celestial Geodesy" paraîtra dans le volume 9 de "Advances in Geophysics".

Si nous appelons  $r'$  et  $r$  les distances de la Terre respectivement au Soleil et à la Lune (Fig. 1) et si  $S$  est l'angle  $(\vec{TL}, \vec{TS})$  on a:

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos S$$

Or  $r'$  est beaucoup plus grand que  $r$ , et on peut écrire:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} &= \frac{1}{r'} \left[ 1 - 2 \frac{r}{r'} \cos S + \left( \frac{r}{r'} \right)^2 \right]^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r'} \left[ 1 - \frac{r}{r'} P_1(\cos S) + \left( \frac{r}{r'} \right)^2 P_2(\cos S) + \dots + \left( \frac{r}{r'} \right)^n P_n(\cos S) + \dots \right] \end{aligned} \quad (9)$$

où  $P_n$  représente le polynome de LEGENDRE d'ordre  $n$ . Si on remarque encore que  $P_1(\cos S) = \cos S = (xx' + yy' + zz')/rr'$  et qu'on n'utilise que les dérivées partielles de  $R$  par rapport aux quantités relatives à la Lune, on peut omettre le terme  $1/r'$  et écrire

$$R = V - \frac{\mu}{r} = k^2 m' \sum_{n=2}^{\infty} \frac{r^n}{r'^{n+1}} P_n(\cos S) \quad (10)$$

formule qui ressemble à la formule (1) où les petites quantités  $J_n$  seraient remplacées par  $A_n = (k^2 m')/a'^{n+1}$  où  $a'$  est le demi-grand axe fixe de l'orbite solaire, qui est grand par rapport à  $z$ . Les quantités  $A_n$  diminuent donc rapidement avec  $n$ . Mise sous la forme suivante:

$$R = \sum \frac{k^2 m'}{a'^{n+1}} \times \frac{r^n}{\left( \frac{r'}{a'} \right)^{n+1}} P_n(\cos S) \quad (11)$$

nous voyons que dans la théorie du satellite artificiel la latitude  $\varphi$ , qui ne dépend que de  $\omega$  et de  $M$ , joue le rôle de  $S$  qui, lui, dépend aussi de la longitude du noeud de la Lune et de l'anomalie moyenne du Soleil. De même le coefficient  $1/r^n$  joue le rôle de  $r^n/r'^{n+1}$  qui, en plus de  $M$ , dépend aussi de l'anomalie moyenne du Soleil.

Ainsi, les développements (1) et (11) sont-ils très voisins et peuvent-ils *essentiellement* se traiter de la même façon, bien que formellement, les expressions de l'angle ou du coefficient soient différents. En particulier, dans les deux cas on envisagera, dans une première approximation, de négliger tous les termes de  $R$ , sauf le premier, puis, à chaque approximation, on tiendra compte des puissances successives du petit paramètre.

### III. Autres perturbations d'origine gravitationnelle

Comme pour la théorie de la Lune où, en plus des perturbations solaires, il faut également tenir compte de perturbations d'origine planétaire, ou encore dues à l'aplatissement de la Terre, un satellite artificiel subit d'autres perturbations d'origine gravitationnelle ou non.

Les perturbations d'origine gravitationnelle, comme toutes les perturbations rencontrées en Mécanique Céleste, proviendront d'une fonction perturbatrice. Dans le cas qui nous occupe, il s'agira principalement des perturbations luni-solaires, et aussi les perturbations dues à l'ellipticité de l'équateur terrestre.

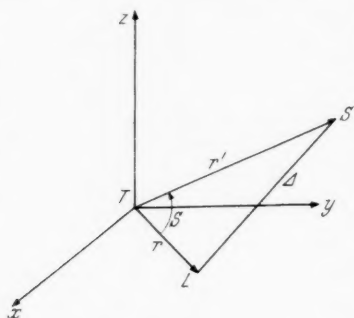


Fig. 1

Soit  $R_0$  la fonction perturbatrice du problème principal et  $R$ , la fonction perturbatrice provenant de la considération d'une autre force. Les systèmes 3, 4 ou 5 restent vrais; il suffit d'écrire:  $R = R_0 + R_1$ .

Rigoureusement, on est donc conduit à résoudre un problème analogue au problème principal, mais avec une fonction perturbatrice  $R$  plus compliquée, pouvant dépendre du Temps et de la longitude du noeud du satellite (par l'intermédiaire des coordonnées de la Lune et du Soleil et la distance Satellite-Lune ou Satellite-Soleil par exemple). Ici encore, essentiellement nous retrouvons un problème typique de Mécanique Céleste qu'on peut attaquer par les mêmes méthodes. Le problème des perturbations luni-solaires d'un satellite artificiel est le même que celui des perturbations par un autre satellite et par le Soleil de tout satellite naturel comme il s'en trouve dans les systèmes de Saturne ou de Jupiter.

Toutefois il est, dans certains cas, possible de linéariser le problème, ce qui permet d'étudier séparément les perturbations d'origines différentes. Raisonnons sur le système (4) qu'on écrira sous la forme:

$$\frac{dE_i}{dt} = \sum_j A_{ij} \frac{\partial R}{\partial E_j} \quad 1 \leq i, j \leq 6 \quad (12)$$

où  $E_i$  est un élément,  $A_{ij}$  un coefficient dépendant des éléments.

Si  $R = R_0 + R_1$ , on a:

$$\frac{dE_i}{dt} = \sum_j A_{ij} \frac{\partial R_0}{\partial E_j} + \sum_j A_{ij} \frac{\partial R_1}{\partial E_j} \quad (13)$$

Si  $E_{0j}$  sont des éléments elliptiques fixes dans le temps (par exemple les éléments moyens) et si nous écrivons que la solution est

$$E_j = E_{0j} + \delta E_j \quad (14)$$

(13) peut s'écrire:

$$\frac{d\delta E_i}{dt} = \sum_j A_{ij} \frac{\partial R_0}{\partial E_j} + \sum_j A_{ij} (E_{0k} + \delta E_k) \frac{\partial R_1}{\partial E_j} (E_{0k} + \delta E_k) \quad (15)$$

Si la contribution à  $\delta E_i$  de la variation du second membre provenant des variations  $\delta E_k$  est négligeable, c'est-à-dire si l'intégrale

$$\sum_j \int_0^t \sum_k \left( \frac{\partial A_{ij}}{\partial E_k} \delta E_k \frac{\partial R_1}{\partial E_j} + A_{ij} \frac{\partial^2 R_1}{\partial E_j \partial E_k} \delta E_k \right) dt \quad (16)$$

est bornée par une quantité faible par rapport aux erreurs d'observations, on peut remplacer le système (13) par:

$$\frac{dE_i}{dt} = \sum_j A_{ij} \frac{\partial R_0}{\partial E_j} + \sum_j A_{ij} (E_{0k}) \frac{\partial R_1}{\partial E_j} (E_{0k}) \quad (17)$$

Les coefficients de la 2<sup>ème</sup> partie étant indépendants de  $E_i$  et ne dépendant, par conséquent que du temps, on a leur contribution  $\Delta E_k$  directe à  $E_i$  en intégrant par rapport au temps la deuxième expression.

Si cette contribution est telle que l'addition de  $\Delta E_k$  à  $E_k$  dans l'expression  $\sum A_{ij} (\partial R_0) / (\partial E_j)$  introduit une variation des éléments  $E_i$  non négligeable, nous dirons qu'on a ainsi une *perturbation indirecte*. Si, par contre, cette variation

est négligeable, les perturbations dues à  $R_1$  seront entièrement connues en intégrant le système:

$$\frac{dE_i}{dt} = \sum_j A_{ij}(E_{0k}) \frac{\partial R_1(E_{0k})}{\partial E_j} \quad (18)$$

C'est la méthode employée pour le calcul des perturbations planétaires de la Lune et pour la plupart des théories des planètes. Elle est valable pour un satellite artificiel en ce qui concerne les perturbations dues à l'ellipticité de l'équateur terrestre et, à l'intérieur même du problème principal, étant donnée la précision actuelle des observations, pour les perturbations provenant de tous les termes de (1) sauf  $J_2$ , pour lequel il est indispensable de poursuivre les calculs au second ordre.

En ce qui concerne les perturbations luni-solaires, la séparation est légitime tant que ces perturbations ne sont pas trop grandes. Il n'en est pas toujours ainsi. MUSEN [18] a montré que pour certains satellites à forte excentricité, l'effet pouvait être très grand, au point de modifier entièrement l'aspect du mouvement.

#### IV. Perturbations d'origine non gravitationnelle

Les perturbations d'origines diverses, introduisent dans les équations, des termes parfois prédominants ayant une structure essentiellement différente des termes d'origine gravitationnelle. Les deux causes les plus importantes sont le frottement atmosphérique et la pression de radiation, sans que l'on puisse considérer comme négligeable dans *tous les cas* d'autres effets possibles.

##### 1. Frottement atmosphérique

De façon générale, on convient que l'accélération de frottement

$$\vec{\gamma} = -K S \varrho |\vec{v}| \vec{v} \quad (19)$$

où  $S$  est la surface de la maîtresse section du corps, perpendiculaire à la vitesse  $\vec{v}$  prise par rapport à l'air supposé fixe,  $\varrho$  est la densité et  $K$  un coefficient dépendant de la forme du satellite. En fait  $K$  dépend de la nature des chocs (élastiques, avec diffusion, etc.) et par suite, dans une certaine mesure de  $\varrho$ . Pratiquement, les divers auteurs considèrent  $K$  comme une constante, ce qui revient à reporter sur  $\varrho$  les variations de  $K$  et considérer une densité dynamique qui peut être différente de la densité physique du milieu.

De plus, il est nécessaire d'avoir une loi pour  $\varrho$ . La loi exponentielle est choisie en général:

$$\varrho = \varrho_0 e^{(r-r_0)/H} \quad (20)$$

où  $\varrho_0$  est la densité à l'altitude  $r_0$  prise souvent proche du rayon vecteur au périhélie et  $H$  étant un certain facteur de réduction ayant la dimension d'une altitude. Cependant JACCHIA [19] a été conduit à considérer que  $H$  lui-même dépendait du  $r - r_0$

$$H = H_0 + \beta(r - r_0) \quad (21)$$

$\beta$  étant de l'ordre de 0,2. De plus, pour tenir compte de l'aplatissement de l'atmosphère,  $r_0$  devrait dépendre de la latitude  $\varphi$

$$r_0 = r_0' - s \cos \varphi \quad (22)$$

$s$  étant de l'ordre de 20 kilomètres.

Enfin, la rotation de l'atmosphère a pour effet que la vitesse  $\vec{v}$  dans l'équation (19) n'est pas exactement celle du satellite par rapport aux axes de la théorie du mouvement. Une manière approchée d'en tenir compte c'est de multiplier la

force par un facteur dépendant de l'inclinaison du satellite et de la vitesse de rotation de la Terre [20].

Enfin, on a pu montrer déjà l'existence d'un effet de l'éclairement solaire sur le frottement atmosphérique [21], effet qui est compliqué par des variations aléatoires dont certaines sont des conséquences des grosses éruptions solaires [22].

La complexité de ces forces, leur aspect parfois aléatoire, rend pratiquement impossible tout traitement analytique complet du problème. Les très nombreux travaux s'y rapportant traitent le problème sous une forme semi-empirique, seule la forme des termes perturbateurs étant déterminée par des considérations analytiques. L'analyse et l'intégration numérique se montrent les seuls instruments capables de traiter ce problème avec la précision requise par les observations. Cependant pour les théories de haute précision, dans les travaux d'ordre géodésique ou d'analyse gravitationnelle, il est indispensable d'avoir une possibilité d'exprimer analytiquement ces perturbations afin d'en tenir compte sur tout un long intervalle de temps. Ceci exclut évidemment toute étude de ce genre sur des satellites bas, mais pour les satellites élevés, lorsque les effets atmosphériques sont faibles, la recherche d'une théorie analytique est indispensable pour tout travail de précision. Les travaux de BROUWER et HORI [23] sont un premier pas vers une telle théorie.

## 2. Pression de radiation

En principe, le problème est plus simple que celui du frottement atmosphérique, par suite de la constance de l'énergie de radiation. La pression dépend évidemment de la section maîtresse éclairée, mais, comme pour la résistance de l'air, c'est moyenné par la rotation rapide du satellite, à moins que, pour la théorie, on ne considère un satellite sphérique. Dans ce dernier cas, la pression est une force constante en valeur absolue. Ceci conduit à une théorie du type de ceux que traite la Mécanique Céleste [24] où l'on peut introduire une fonction perturbatrice. Lorsque le satellite n'a pas un rapport surface sur masse trop grand, un calcul de perturbations du type de celui décrit à la fin du paragraphe III est suffisant. Pour les satellites ayant une faible masse pour un gros volume, l'effet est prépondérant et peut être mélangé à l'effet gravitationnel dans les équations.

Cependant, une discontinuité dans l'expression de la force est introduite par les éclipses de ces satellites. Pendant le passage du satellite dans l'ombre de la Terre, cette force est réduite à zéro. Cette discontinuité rend impossible tout traitement purement analytique du problème. Encore une fois, seule une solution numérique, comme celle de KOZAI [25] peut donner une solution précise dans les cas pratiques.

## 3. Autres effets; traitement des faibles perturbations

Les forces d'origine électro-magnétiques ont été évaluées, mais jamais explicitement décelées, surtout par suite de l'incertitude où l'on est sur la magnitude du frottement atmosphérique.

Pour le traitement de tous ces effets, la méthode analytique ou numérique qui s'impose est la considération séparée des perturbations et l'addition des variations des éléments ainsi calculées à la solution du problème principal. La même méthode s'appliquera en fait pour la pression de radiation sur les satellites denses, sauf les cas de résonance du mouvement du noeud ou du périégée avec celui du Soleil. Enfin, pour les satellites denses de très haute altitude (périégée au delà de 1500 kilomètres), les seuls qui aient un intérêt astrométrique ou géodésique, la résistance de l'air pourra être traitée ana-



lytiquement de cette façon, à condition que l'effet de l'activité solaire ne soit pas prédominant, ce qui reste encore à démontrer. Pour ce type de satellite, il est donc de la plus haute importance de concevoir une méthode unique permettant de traiter les perturbations d'origines les plus diverses.

### V. Possibilité d'une théorie unifiée

En ce qui concerne le problème gravitationnel principal, les diverses théories présentent chacune certains avantages. Néanmoins le volume de calculs nécessaires pour atteindre la solution varie dans une grande mesure d'une méthode à l'autre. J'ai personnellement essayé, en relation avec la préparation de cours à la Faculté des Sciences de Paris, de comparer le travail nécessaire pour arriver à une théorie du second ordre, en utilisant successivement la méthode des équations de LAGRANGE [3], la méthode de DELAUNAY [9] et celle de VON ZEIPPEL [16].

La première méthode est la plus rapide et peut-être la plus facilement mise en oeuvre, si l'on dispose d'une calculatrice électronique pour traiter les séries de FOURIER à coefficients littéraux que l'on rencontre. Conduisant à des expressions identiques à celles de la méthode de DELAUNAY, elle est beaucoup plus simple à mettre en oeuvre et exige bien moins de calculs. Ces deux méthodes conduisent à exprimer les éléments osculateurs (ou les coordonnées) sous forme de séries de FOURIER, dont les coefficients sont des séries dépendant des éléments moyens. Le désavantage de ces méthodes réside dans le fait que les expressions trouvées sont infinies. Cependant le traitement des équations de LAGRANGE, de KOZAI évite ce dernier inconvénient [12].

Une autre méthode, permettant d'arriver aux mêmes résultats avec les éléments moyens est celle de BROUWER [17]. La somme de calculs demandée est équivalente à la méthode de KOZAI. Mais, comme l'a montré G. HORI [26] la méthode de VON ZEIPPEL conduit à une solution valable dans le cas de l'inclinaison critique  $i$  (telle que  $\cos^2 i = 1/5$ ;  $i = 62^\circ 26'$  environ), pour laquelle la méthode de LAGRANGE et la solution de DELAUNAY ne sont plus valables. La solution ainsi proposée est d'ailleurs dans la ligne des théories de la libration en Mécanique Céleste (théorie du satellite de Saturne, Hyperion, par exemple). En fait d'autres théories, comme celle de GARFINKEL [15] permettent d'attaquer le problème de l'inclinaison critique [27] et si ce critère élimine certaines méthodes, pour le choix de la théorie la plus complète, il ne peut être seul. Il est d'ailleurs probable que plusieurs théories (celles de BROUWER et de GARFINKEL en particulier) soient de puissance analogue pour attaquer les perturbations autres que celles du problème principal.

Cependant, il faut, dans la mesure du possible, utiliser une théorie où les constantes d'intégration ont une signification intrinsèque, indépendante de la notion d'origine de Temps. Seules de telles constantes pourront être ensuite aisément transformables en variables par la méthode de la variation des constantes par exemple, pour tenir compte d'autres perturbations. A puissance égale pour le problème principal, il faut adopter les théories utilisant les éléments moyens (valeur moyennée sur un intervalle de temps infini) de préférence aux éléments à un instant donné. Ce sont elles qui permettent d'inclure le plus directement les effets gravitationnels ou non qui nécessitent un traitement plus complet que l'isolement pur et simple que nous avons décrit.

A l'heure actuelle, la méthode de VON ZEIPPEL est celle qui répond le mieux à ces critères. C'est aussi celle qui a été le plus travaillée dans le sens indiqué ici et pour laquelle on a pu montrer qu'il est possible de traiter d'autres effets.

En particulier, BROUWER et HORI ont montré [23] qu'il est possible d'inclure le frottement atmosphérique dans les équations avec les variables de DELAUNAY. Etant donnée la solution du problème principal, on peut par la méthode des substitutions dans les seconds membres et approximations successives, mettre la solution sous forme d'une série de FOURIER avec termes séculaires et mixtes en plus des termes périodiques classiques. En particulier, dépendront du coefficient  $K$  de frottement, seuls des termes périodiques et séculaires aussi bien dans les variables angulaires, que dans les variables métriques  $(a, e, i)$ , contrairement aux résultats des solutions générales de tous les problèmes gravitationnels. Il s'introduira aussi des termes mixtes [(périodiques dont les coefficients dépendent du Temps)], qui seront proportionnels à  $K$  et à  $J_2$ . On arrive ainsi à une généralisation de la forme des séries dans une théorie générale. Les calculs sur ces séries peuvent se faire suivant les mêmes méthodes (approximations successives) que pour les séries classiques en Mécanique Céleste. Elles s'apparentent d'ailleurs du point de vue forme, à la théorie des planètes, quoique l'origine des termes séculaires soit ici physique et ne provienne pas seulement d'un artifice de calcul.

Ce problème de la mise sous forme analytique des perturbations dues au frottement atmosphérique n'est pas encore entièrement résolu. Il est probable — comme c'est le cas dans la théorie des planètes — que les séries obtenues ne soient pas convergentes pour de grandes valeurs du temps. BROUWER et HORI n'ont encore donné la solution que dans l'hypothèse d'une atmosphère sphérique avec une densité répartie suivant une loi exponentielle. Cependant, le fait même qu'ils aient pu mettre les équations sous une forme qui peut se traiter comme des équations canoniques est un grand pas vers la solution analytique du problème complet du mouvement d'un satellite artificiel. Peut-être des méthodes de Mécanique Céleste autres que celle de VON ZEIPPEL se prêtent-elles à la solution de ce problème. Celle-ci, en tous cas, a tous les avantages requis pour être adoptée comme base de départ aux futures théories du mouvement.

## VI. Conclusion

Le nombre de solutions concordantes au problème principal de la théorie d'un satellite artificiel est tel qu'on peut considérer ce problème comme entièrement résolu. Les solutions ont été publiées sous formes finies, qui suffisent à la quasi-totalité des besoins. Il semble que ces orbites (dépendant seulement de deux paramètres angulaires) doivent maintenant être considérés comme des données de base au même titre que le mouvement elliptique dans un stade moins avancé de la théorie. Il est maintenant temps de s'attaquer au problème fondamental de la solution analytique de toutes les perturbations non gravitationnelles, de caractère non aléatoire. Cette solution sera indispensable dans un court laps de temps pour les satellites géodésiques. Elle le sera davantage encore lors des lancements de satellites destinés à vérifier la relation qui existe entre le temps atomique et le temps gravitationnel. Lancés à une altitude de 40.000 kilomètres, quoique très massifs, ces satellites subissent des forces non gravitationnelles sensibles. Il faudra en faire une théorie analytique valable avec une précision de quelques millièmes de seconde par an. Les difficultés d'élaboration de telles théories, provenant du caractère très divers des forces en présence, doivent être attaquées dès maintenant, profitant de l'acquit en Mécanique Céleste et plus particulièrement dans l'étude du problème principal. Il n'est pas encore certain que toutes ces difficultés soient vaincues avant que les progrès techniques rendent possibles ces réalisations.

## Références

1. Y. KOZAI, The Gravitational Field of the Earth Derived from the Motion of Three Satellites. *Astronom. J.* **66**, 8 (1961).
2. D. G. KING-HELE, The Earth's Gravitational Potential, Deduced from the Orbits of Artificial Satellites. *Geophysic. J.* **4**, 3 (1961).
3. J. KOVALEVSKY, Influence des termes du second ordre sur la théorie du mouvement d'un satellite artificiel. *Space Research, Proceedings of the First International Space Science Symposium, Nice*, p. 458 (1960).
4. I. G. IZSAK, A Determination of the Ellipticity of the Earth's Equator from the Motion of Two Satellite Observations. *Smithsonian Institution Astrophysical Observatory Special Report no. 56*, p. 11 (1961).
5. W. M. KAULA, Analysis of Satellite Observations for Longitudinal Variations of the Gravitational Field. *Proceedings of the Second International Space Science Symposium, Florence (1961)* — sous presse.
6. F. R. MOULTON, *An Introduction to Celestial Mechanics*. New York: Mac Millan Co., 1947.
7. F. TISSERAND, *Traité de Mécanique Céleste*, Tome I. Paris: Gauthier-Villars, 1960.
8. E. W. BROWN, *An Introductory Treatise on the Lunar Theory*. New York: Dover Publications Inc., 1960.
9. D. BROUWER, Outlines of General Theories of the Hill-Brown and Delaunay Types of Orbits of Artificial Satellites. *Astronom. J.* **63**, 433 (1958).
10. E. A. GREBENIKOV, Sur l'application de la méthode de Hill dans l'étude du mouvement d'un satellite artificiel de la Terre. *Bull. Inst. Astronomie théor. Leningrad* **7**, 811 (1960).
11. P. MUSEN, Application of Hansen's Theory to the Motion of an Artificial Satellite in the Gravitational Field of the Earth. *J. Geophysic. Res.* **64**, 2271 (1959).
12. Y. KOZAI, The Motion of a Close Earth Satellite. *Astronom. J.* **64**, 367 (1959).
13. R. H. MERSON, The Motion of a Satellite in an Axi-symmetric Gravitational Field. *Geophysic. J.* **4**, 17 (1961).
14. T. E. STERNE, The Gravitational Orbit of a Satellite of an Oblate Planet. *Astronom. J.* **63**, 28 (1958).
15. B. GARFINKEL, The Orbit of a Satellite of an Oblate Planet. *Astronom. J.* **64**, 353 (1959).
16. H. VON ZEIPPEL, *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik* **11**, 1 (1916).
17. D. BROUWER, Solution of the Problem of Artificial Satellite Theory Without Drag. *Astronom. J.* **64**, 378 (1959).
18. P. MUSEN, Contributions to the Theory of Satellite Orbits. *Proceedings of the First International Space Science Symposium, Nice*, p. 437 (1960).
19. L. G. JACCHIA, The Effect of a Variable Scale Height on Determination of Atmospheric Density from Satellite Acceleration. *Smithsonian Institution Astrophysical Observatory Special Report no. 46*, p. 1 (1960).
20. T. E. STERNE, Effect of the Rotation of a Planetary Atmosphere Upon the Orbit of a Close Satellite. *ARS Journal* **29**, 777 (1959).
21. L. G. JACCHIA, A Variable Atmospheric Density Model from Satellite Accelerations. *Smithsonian Institution Astrophysical Observatory Special Report no. 39*, p. 1 (1960).
22. L. G. JACCHIA, The Atmospheric Drag of Artificial Satellites During the November 1960 Events. *Proceedings of the Second International Space Science Symposium, Florence (1961)* — sous presse.
23. D. BROUWER et G. HORI, The Drag Problem Treated with Delaunay Variables. *Notes of the Summer Institute in Dynamical Astronomy*. Edité par Mac Donnell Aircraft Co., Saint Louis, p. 247 (1961).
24. P. MUSEN, The Influence of the Solar Radiation Pressure on the Motion of an Artificial Satellite. *J. Geophysic. Res.* **65**, 1391 (1960).

25. Y. KOZAI, Effects of Solar Radiation Pressure on the Motion of an Artificial Satellite. Smithsonian Institution Astrophysical Observatory Special Report no. 56, p. 25.
26. G. HORI, The Motion of an Artificial Satellite in the Vicinity of the Critical Inclination. *Astronom. J.* **65**, 291 (1960).
27. B. GARFINKEL, On the Motion of a Satellite in the Vicinity of the Critical Inclination. *Astronom. J.* **65**, 624 (1960).

### Discussion

M. MORANDO demande quelle est celle, parmi les théories citées, qui serait la plus aisée à programmer sur des machines électroniques. M. KOVALEVSKY pense que c'est celle de DELAUNAY dont la procédure se répète indéfiniment à chaque pas, contrairement à celle de VON ZEIPPEL qui se traite différemment à chaque approximation. Il souligne le fait qu'on peut, ainsi qu'il l'a fait sur des machines moyennes comme l'IBM 650, programmer les calculs algébriques littéraux qui entrent dans la résolution des équations de la mécanique et qu'il serait bon qu'un grand calculateur soit employé à de telles recherches.

M. MACÉ demande des précisions sur l'importance du frottement atmosphérique dans l'ensemble de la théorie d'un satellite artificiel. Il apparaît, dans la discussion qui suit, qu'elle devient prépondérante en deçà de 300 kilomètres. M. KOVALEVSKY fait remarquer qu'on utilise une formule de frottement en  $V^2$ , ce qui conduit à la définition d'une densité dynamique qui, suivant les conditions où se font les chocs avec les molécules, peut ne pas correspondre à la densité physique.

D'une discussion engagée par M. DÉSVEAUX, il se dégage l'idée générale que dans les problèmes de satellites — contrairement aux problèmes de rentrée — on ne tient pas compte de la portance. Il est probable que cet effet soit difficile à dégager des autres effets secondaires.

Vol.  
7  
1961

# The Effect of Atmospheric Oblateness on a Satellite Orbit

By

D. G. King-Hele<sup>1</sup>

(With 9 Figures)

## Abstract — Zusammenfassung — Résumé

**The Effect of Atmospheric Oblateness on a Satellite Orbit.** The most serious perturbations to the orbit of an earth satellite are usually those caused by air drag. The simplest equations to specify the evolution of an orbit under the action of air drag are given; then, after a survey of the upper atmosphere which indicates that the atmosphere shares the ellipticity of the earth beneath it, the corresponding equations for an oblate atmosphere are formulated. Finally, numerical results are given which show that the effect of atmospheric oblateness can alter the spherical-atmosphere results by up to 30% for some orbits, though for the majority of orbits the effect is much smaller, and 5% would be a more representative figure.

**Der Einfluß der atmosphärischen Abplattung auf Satellitenbahnen.** Die bekannteste Bahnstörung wird durch den Luftwiderstand hervorgerufen. Stark vereinfachte Gleichungen für die Bahn eines Satelliten unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes werden angegeben, wobei nachher auch die atmosphärische Abplattung berücksichtigt wird. Schließlich werden numerische Resultate angegeben, die zeigen, daß der Effekt der atmosphärischen Abplattung Änderungen der Bahn gegenüber der kugelsymmetrischen Atmosphäre bis zu 30% bewirken kann. Allerdings ist für den Großteil der Bahnen der Effekt viel kleiner und kann größenordnungsmäßig etwa mit 5% angenommen werden.

**Effet de l'aplatissement de l'atmosphère sur les orbites des satellites.** Les perturbations les plus sérieuses du mouvement orbital ont été celles causées par la résistance de l'air, qui enlève au satellite un peu d'énergie à chaque révolution, pour éventuellement anéantir le mouvement orbital. Du fait que la résistance de l'air est plus grande dans la section de l'orbite proche du périée, son effet principal est de retarder le satellite chaque fois qu'il passe au périée, avec comme résultat que le satellite ne va pas être lancé aussi loin dans le côté opposé de la terre, qu'à sa révolution précédente. Des résultats numériques sont fournis montrant comment la contraction de l'orbite sous l'influence du frottement de l'air peut être affectée par l'aplatissement de l'atmosphère. Les résultats obtenus avec l'hypothèse d'une atmosphère sphérique sont peu modifiés par l'introduction de l'hypothèse de son aplatissement; toutefois des changements atteignant 30% peuvent survenir pour des orbites particulièrement sensibles à ce phénomène.

## I. Introduction

For the majority of artificial satellites so far launched, the most serious orbital perturbations have been those caused by air drag, which deprive the satellite of a little energy on each revolution and eventually destroy its orbit altogether. The effects of air drag are most important for satellites with perigee

<sup>1</sup> Royal Aircraft Establishment, Farnborough, Hants, England.

heights lower than 300 km, but still need to be taken into account for perigee heights up to about 1,000 km; at heights above 1,000 km solar radiation pressure is greater than air drag. The results given in this paper therefore apply primarily to orbits with perigee heights of less than, say, 600 km; and the method is also limited to orbital eccentricities less than 0.2. Most of the satellites so far launched comply with these two conditions.

The other major perturbation to the orbit of a near satellite [1] is the effect of the earth's oblateness, which causes the orbital plane of the satellite to rotate about the earth's axis and makes the major axis of the orbit rotate in its own plane so that the perigee latitude changes. Neither of these two motions has any first-order effect on the orbital changes caused by air drag in a spherically-symmetrical atmosphere; but the change in the perigee latitude must be taken into account when the atmosphere is assumed to be oblate. The changes in perigee distance from the earth's centre caused by the odd harmonics in the earth's gravitational field amount to less than 10 km and can usually be allowed for separately.

Luni-solar perturbations [2] are very small for near-satellites with orbital eccentricity less than 0.2, and can also be considered separately.

In this paper the equations specifying the contraction of a satellite orbit under the influence of air drag are first given in their simplest form, in section II. Then, in section III, the properties of the upper atmosphere are briefly surveyed. In section IV the equations for an orbit contracting in an oblate atmosphere are stated, and section V gives numerical results.

## II. General Effect of the Atmosphere on Elliptic Orbit, with Simplest Results

Since the air drag is greatest over the section of the orbit near perigee, where the ambient air is most dense, the chief effect of drag is to retard the satellite each time it passes perigee, with the result that the satellite does not swing out so far on the opposite side of the earth as it did on its previous revolution. The apogee height is therefore steadily reduced while the perigee height remains almost constant: the orbit contracts and becomes more nearly circular.

In deriving the simplest mathematical formulae to describe this contraction, we assume that the atmosphere is spherically symmetrical and does not vary with time. We also assume that the air drag  $D$  acts in the direction opposite to the satellite's velocity  $V$  relative to the ambient air and is expressible as

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D, \quad (1)$$

where  $\rho$  is the air density,  $S$  the mean cross-sectional area and  $C_D$  a drag coefficient. An uncontrolled satellite tends to rotate about an axis of maximum moment of inertia, and the direction in space of this axis changes only slowly.  $S$  is therefore taken as the mean of the cross-sectional areas in the two extreme modes of motion, which, for a long thin satellite, are tumbling end-over-end and rotating exactly like an aeroplane propeller.  $C_D$  remains almost constant during a satellite's life, its numerical value [3] being near 2.2.  $S C_D$  is not likely to vary by more than about 10% even for satellites of large length/diameter ratio, and in developing the theory it is assumed constant.

We further assume that the air density  $\rho$  varies exponentially with height  $y$  in the height-band of perhaps 100 km above perigee where drag is important, so that

$$\rho = \rho_p \exp\left(-\frac{y - y_p}{H}\right), \quad (2)$$

where suffix  $p$  denotes perigee and  $H$  is a constant, representing the height in which density falls off by a factor of 2.718.

Under these assumptions, it can be shown that, if the eccentricity  $e$  lies between 0.02 and 0.2, the variation of perigee distance  $r_p$  from the earth's centre with  $e$  is given [4], to the first order, by

$$r_p \simeq r_{p_0} - \frac{H}{2} \ln \frac{e_0}{e}, \quad (3)$$

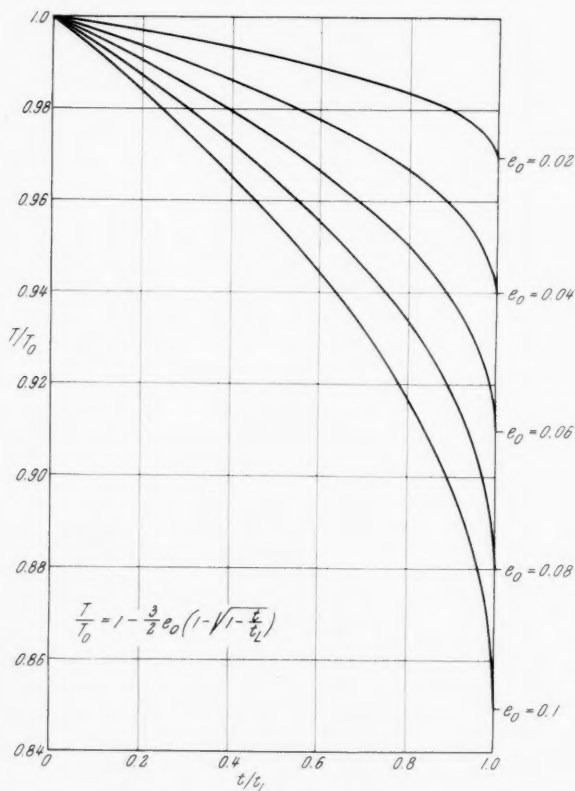


Fig. 1. Variation of orbital period with time as given by eq. (8).  $T$  period of revolution,  $T_0$  initial value of  $T$ ,  $e_0$  initial eccentricity,  $t$  time,  $t_L$  life-time of satellite

where suffix  $o$  denotes initial values. Orbital period  $T$  can then be expressed in terms of  $e$  as

$$T \simeq T_0 \left( \frac{1-e_0}{1-e} \right)^{3/2}. \quad (4)$$

The variation of eccentricity with time  $t$  is given by

$$e \simeq e_0 \sqrt{1 - t/t_L}, \quad (5)$$

where  $t_L$  is a constant which represents, very nearly, the lifetime of the satellite. Hence the equation for period in terms of time is



$$T \simeq T_0 \left\{ 1 - \frac{3}{2} e_0 (1 - \sqrt{1 - t/t_L}) \right\}. \quad (6)$$

On differentiating (6) with respect to  $t$  and putting  $t = 0$ , we obtain a formula for lifetime in terms of the initial rate of change of  $T$ :

$$t_L \simeq - \frac{3 e_0 T_0}{4 \dot{T}_0}. \quad (7)$$

These five equations provide the simplest mathematical description of how an elliptic satellite orbit ( $e < 0.2$ ) contracts under the influence of air drag until the time, usually very near the end of its life, when  $e$  falls to 0.02.

Forgetting, for the moment, that these equations are approximate rather than exact, we see from eq. (5) that  $e^2$  varies linearly with time, decreasing towards zero at the end of the satellite's life. Eq. (6) gives the characteristic form of a satellite's period-versus-time curve, with increasing slope towards the end, as shown in Fig. 1. Eq. (7) allows the lifetime to be found from the initial elements  $e_0$ ,  $T_0$  and the rate of change of period  $\dot{T}_0$ , which can usually be measured after a few days in orbit. The orbital period  $T$  of a satellite can be found simply and accurately, merely by timing its transits; eq. (4) is therefore particularly powerful because, if the initial orbit is known, the eccentricity  $e$  at any later time can be found from  $T$ . Since the semi major axis can also be found directly from  $T$ , the size and shape of the orbit are directly determinable from  $T$ . Once  $e$  is known, the change in perigee height can be found from (3), with error less than 10 km, since  $H$  is quite small, of order 50 km.

These simplest equations suffer from various inaccuracies, which can be eliminated by including smaller terms of order  $e$ ,  $H/ae$ , etc. [5]. The assumption of a spherically symmetrical atmosphere is, however, questionable, and, in the next section, the properties of the upper atmosphere are briefly surveyed, with a view to specifying more realistic assumptions for the theory.

### III. The Upper Atmosphere, at Heights from 200 to 700 km

It is now established [6-11] that the atmosphere at heights above 200 km responds vigorously to solar disturbances: there is a tendency towards the 27/28-day periodicity characteristic of solar influence [7]; day-to-day fluctuations in density, of up to  $\pm 20\%$  at 200 km height, are found to be linked with solar activity [6, 8, 9] (the density being highest when the sun is most active); exceptional solar outbursts lead to very great temporary increases in density [10]; and at heights above 400 km the density decreased considerably [11] (by a factor of  $2\frac{1}{2}$  at 500 km) between 1958 (sunspot maximum) and 1960.

Furthermore, the air density is higher by day than by night. At heights of 200-300 km this effect is small, not more than 10%, but at heights above 400 km it is the dominant feature of the atmosphere. The maximum daytime density, attained 2 to 3 hours after noon, is 4 to 8 times higher than the minimum night-time density, attained between midnight and dawn, at heights of 500-600 km. These results are summed up in Fig. 2, which presents data obtained [11] from the orbits of 29 satellites.

The slopes of the curves in Fig. 2 give values of the quantity  $H$  defined in eq. (2). It is found [11] that  $H$  increases from about 45 km at a height of 200 km to about 90 km (by day) and 55 km (by night) at a height of 600 km. Since there is some scope for artistic licence in drawing the curves of Fig. 2, the value

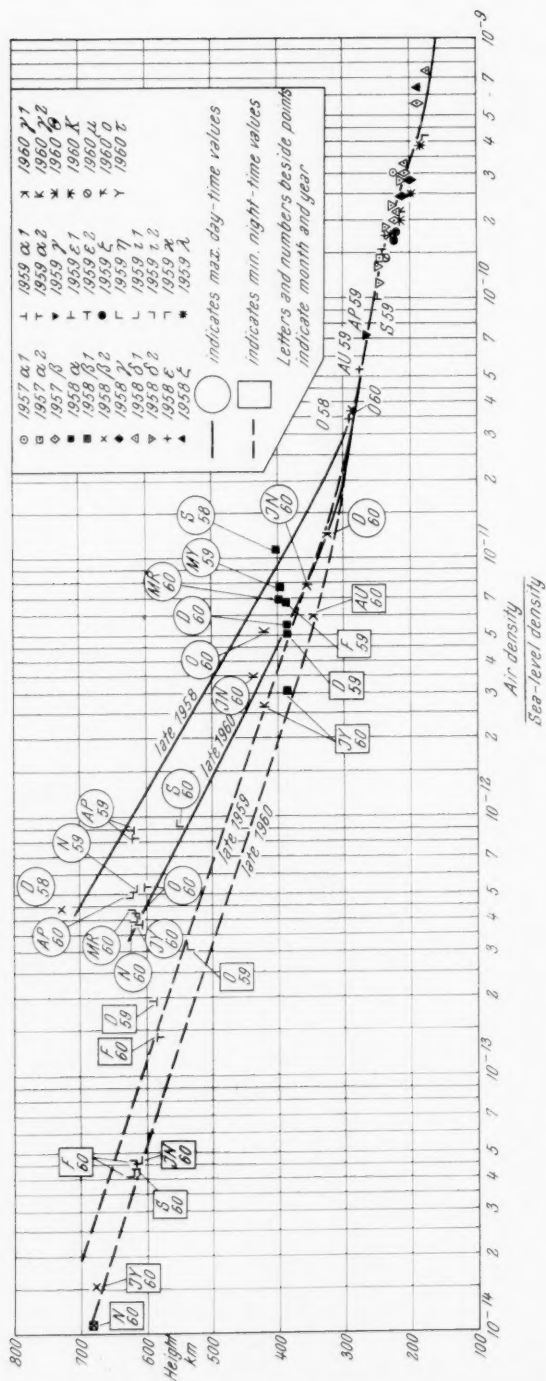


Fig. 2. Upper-atmosphere density obtained from the orbits of 29 satellites launched before January 1961

of  $H$  at any particular height is subject to an error (s. d.) of perhaps 15%. Consequently the variation of  $H$  with height cannot be exactly specified, and it is therefore not yet worth considering any more accurate assumption about the variation of density with height than eq. (2). The average value of  $H$  over a height-band of 50–100 km, and hence the value of  $H$  for use in (2), should, however, not be in error by more than about 10%.

The air density certainly varies between day and night, and fluctuates in response to solar activity: does it also vary systematically with latitude? The best evidence on this question has come from Sputnik 3, whose perigee moved slowly from 50° N to 65° S and back again to north of the equator. Fig. 3 shows the air density at a height of 235 km above the earth's surface as found from the orbit of this satellite [11]: the full line gives the calculated values, but a

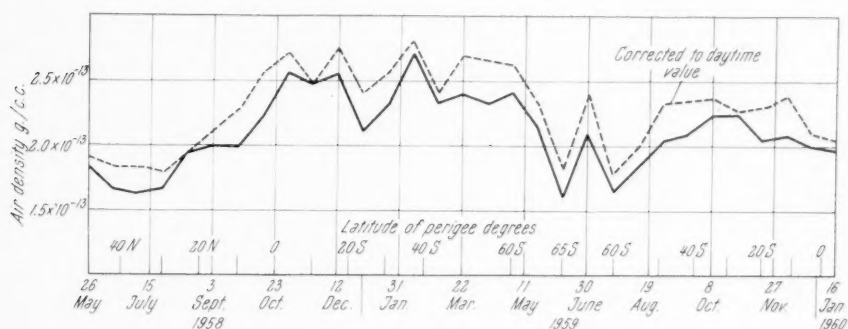


Fig. 3. Air density at height of 235 km, as given by Sputnik 3

better comparison is obtained from the broken line, for which the values are corrected to daytime conditions. From Fig. 3 we can conclude that the density at a height of 235 km did not depart from its average value by a factor of more than 1.25 in 1958–9, and most of this variation could well be ascribed to the influence of solar activity. Studies of Discoverer satellites [11–14] with perigees at latitudes up to 84°, have also shown no sign of any significant variation of density with latitude, for heights of 200–300 km.

In view of these results it is appropriate to assume that the air density does not vary with latitude, so that the ellipticity of the atmosphere,  $\epsilon$ , may be taken equal to that of the earth [15], namely 0.00335.

The difference of density between day and night, and the variation in the course of the sunspot cycle, will inevitably affect satellite orbits. The variations of the orbital elements with time as given by theory, assuming density to be independent of time, are smooth curves; but in practice there will be oscillations superposed on these curves as the perigee experiences the day-to-night cycle and time progresses through a solar cycle. The theoretical curves are still necessary, however, to define the shape of the mean curves (i. e. when stripped of the oscillations), and to provide a measure of how much the air density has varied in the course of the fluctuations. The theoretical equations which do not involve time, such as (3) and (4), are of course unaffected by the time-variations in density.

#### IV. Theory of the Contraction of a Satellite Orbit in an Oblate Atmosphere

##### 1. Introduction

If the atmosphere is assumed oblate, the effect of air drag on an orbit will vary according to the perigee latitude, since a given perigee distance from the earth's centre corresponds to a greater air density if perigee is at the equator than if perigee is near the poles. It is therefore necessary to specify the latitude of perigee, or, more precisely, the argument of perigee,  $\omega$ , defined as the angle from the ascending node  $N$  to the perigee point  $P$ , measured along the orbit, as shown in Fig. 4. Under the influence of the earth's gravitational field,  $\omega$  changes at a rate given by [1]

$$\dot{\omega} = 4.98(R/a)^{3.5} (5 \cos^2 i - 1) \{1 + 0(e^2)\} \quad \text{degrees per day,} \quad (8)$$

where  $R$  is the earth's equatorial radius,  $a$  the semi major axis, and  $i$  the inclination of the orbit to the equator. Eq. (8) shows that  $\omega$  is positive if  $i < 63.4^\circ$  and negative if  $i > 63.4^\circ$ . Since  $a$  varies only slightly during a satellite's life,  $\omega$  varies almost linearly with  $t$ ; while  $e^2$ , and hence  $(ae)^2 = x^2$ , also varies almost linearly with  $t$ . One of the best simple approximations to  $\omega$  is therefore

$$2\omega = A \pm G \frac{x^2}{x_0^2} \quad (9)$$

where  $A$  and  $G$  are constant, and the sign is chosen so that  $G$  is always positive: in practice this means that the plus sign is to be taken when  $i > 63.4^\circ$  and the minus sign when  $i < 63.4^\circ$ .

Analytical formulae to specify the contraction of a satellite orbit under the action of air drag have been obtained [16] under the assumptions that:

- (i) air density varies exponentially with height above perigee, as in eq. (2);
- (ii) the surfaces of constant density are spheroids of fixed ellipticity  $\epsilon$ , and density does not vary with time;
- (iii)  $\omega$  is given by eq. (9);
- (iv)  $e < 0.2$ .

The equations take different forms according as  $\epsilon$  is greater or less than 0.02 (or, more strictly, according as  $ae/H$  is greater or less than 3). The results for Phase 1,  $0.02 < \epsilon < 0.2$ , are given in section IV.2 and those for Phase 2, when  $\epsilon < 0.02$  (or, strictly,  $ae/H < 3$ ) are given in section IV.3.

##### 2. Equations for Phase 1 ( $0.02 < \epsilon < 0.2$ )

During Phase 1, under the assumptions stated above, the equation for perigee distance in terms of eccentricity, given in its simplest form in eq. (3), is found to be

$$\begin{aligned} \frac{r_{p_0} - r_p}{H} = & \frac{1}{2} \left\{ \left( 1 - \frac{5H}{2a_0} \right) \ln \frac{e_0}{e} - (e_0 - e) \left( 1 - \frac{3H}{4a_0} \cdot \frac{1+e_0}{e e_0} - \frac{e+e_0}{2} \right) + \right. \\ & \left. + \zeta + 0 \left( \frac{ae^5}{H}, \frac{H^2}{a^2 e}, \frac{ae^4}{H}, \frac{cH^2}{a^2 e^2} \right) \right\} \quad (10) \end{aligned}$$

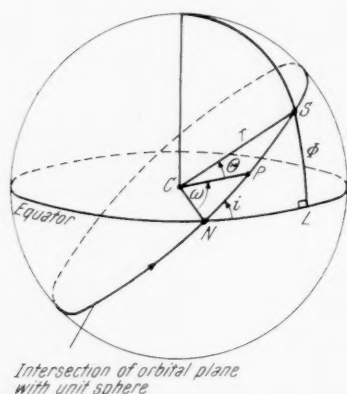


Fig. 4. Diagram of satellite orbit projected on unit sphere.  $P$  perigee point,  $S$  satellite position

Here  $\zeta$  represents the contribution of atmospheric oblateness and is given by

$$\zeta = \frac{2cH}{a_0 e_0} \left[ \cos 2\omega_0 - \frac{u_0}{u} \cos 2\omega + \pi u_0 [\cos A \{S(u_0) - S(u)\} \pm \sin A \{C(u_0) - C(u)\}] \right], \quad (11)$$

where

$$c = \frac{\varepsilon r_{p_0}}{2H} \sin^2 i \quad (12)$$

$$\frac{u}{u_0} = \frac{e}{e_0} \{1 - e_0 + e + O(e^2)\} \quad (13)$$

$$u_0 = \sqrt{2G/\pi} \quad (14)$$

and  $C(u)$  and  $S(u)$  are the FRESNEL integrals. The quantity  $c$ , which is a measure of the effect of atmospheric oblateness on the orbit, usually does not exceed 0.2 and can be regarded as of the same order of magnitude as  $e$ . If  $\omega$  is constant,  $G = 0$  and (11) can be written as

$$(\zeta)_{\omega \text{ const}} = \left( \frac{1}{e_0} - \frac{1}{e} \right) \varepsilon \sin^2 i \cos 2\omega. \quad (15)$$

The variation of  $T/T_0$  with  $e$  is then given by

$$\frac{T}{T_0} = \left( \frac{1 - e_0}{1 - e} \cdot \frac{r_p}{r_{p_0}} \right)^{3/2}. \quad (16)$$

The equation expressing  $t/t_L$  in terms of  $e$  is extremely lengthy and here we only quote the simpler form for  $\omega$  constant, which is

$$\left( \frac{t}{t_L} \right)_{\omega \text{ const}} = 1 - \lambda^2 - \frac{e_0 \lambda^2}{3} (1 - \lambda) + \frac{e_0^2 \lambda^2}{144} (1 - \lambda) (119 + 135 \lambda) - \frac{3H\lambda^2}{4a_0} \ln \frac{1}{\lambda} - \xi + O \left( \frac{ae^5}{H}, \frac{ae^4}{H}; e^3, c^3; \frac{He}{a}, \frac{Hc^2}{ae}, \frac{H^2}{a^2e} \right), \quad (17)$$

where  $\lambda = e/e_0$  and

$$\xi = \left\{ 8\lambda(1 - \lambda) + \frac{6H}{a_0 e_0} \ln \frac{1}{\lambda} \right\} \frac{\varepsilon}{2e_0} \sin^2 i \cos 2\omega. \quad (18)$$

The lifetime formula (7) becomes, for an oblate atmosphere, again with  $\omega$  constant,

$$(t_L)_{\omega \text{ const.}} = - \frac{3e_0 T_0}{4T_0} \left\{ 1 + \frac{7}{6} e_0 + \frac{5}{16} e_0^2 + \frac{H}{2a_0 e_0} \left( 1 + \frac{11}{12} e_0 + \frac{3H}{4a_0 e_0} + \frac{3H^2}{4a_0^2 e_0^2} \right) + \frac{2\varepsilon}{e_0} \sin^2 i \cos 2\omega + O \left( \frac{ae^5}{H}, \frac{ae^4}{H}; e^3, c^3; \frac{He}{a}, \frac{Hc^2}{ae}, \frac{H^2}{a^2e}, \frac{cH^2}{a^2e^2} \right) \right\}. \quad (19)$$

The air density at perigee,  $\rho_p$ , is connected with the orbital elements and their rates of change by the equation

$$\rho_p = - \frac{\dot{T}}{3\delta} \sqrt{\frac{2e}{\pi a H}} \left\{ 1 - 2e + \frac{5}{2} e^2 - \frac{H}{8ae} \left( 1 - 10e + \frac{7H}{16ae} \right) + \frac{\varepsilon}{e} \sin^2 i \cos 2\omega + O(e^3, c^3; He/a, Hc^2/ae; H^2/a^2e, cH^2/a^2e^2) \right\}, \quad (20)$$

where  $\delta = FSC_D/m$ ,  $m$  being the mass of the satellite and  $F$  a factor which allows for the rotation of the atmosphere and usually [5] lies between 0.9 and 1.

### 3. Equations for Phase 2 ( $0 < e < 0.02$ )

During Phase 2, when  $a e/H$  is written as  $z$  and suffix 1 denotes initial values, the equation for  $r_p$ , with constant  $\omega$ , is

$$\frac{r_{p1} - r_p}{H} = \left[ \left( 1 - \frac{3H}{a_1} \right) \ln \frac{z_1 I_1(z_1)}{z I_1(z)} + \frac{2H}{a_1} \left\{ \frac{z_1 I_0(z_1)}{I_1(z_1)} - \frac{z I_0(z)}{I_1(z)} \right\} - (z_1 - z) - \{\psi(z) - \psi(z_1)\} \right] [1 + O(c^4)], \quad (21)$$

where

$$\psi(z) = b \left\{ \ln \frac{I_1(z)}{z^3} - \frac{z I_0(z)}{6 I_1(z)} - \frac{z^2}{12} \right\}. \quad (22)$$

Here  $I_n(z)$  is the BESSEL function of the first kind and imaginary argument, of order  $n$  and argument  $z$ , and

$$b = \frac{c}{2} \cos 2\omega. \quad (23)$$

$T/T_1$  can be found from (16), with suffix  $o$  replaced by suffix 1.

The variation of  $t - t_1 = \tau$  with  $z$ , again with  $\omega$  constant, is given by

$$\frac{\tau}{\tau_L} = \left\{ 1 - \frac{z^2}{z_1^2} - \frac{4b}{z_1 + 2b} \cdot \frac{z}{z_1} \left( 1 - \frac{z}{z_1} \right) \right\} \{1 + O(0.03)\}, \quad (24)$$

for  $1 \leq z \leq 3$ . For  $0 \leq z \leq 1$ , with suffix 2 denoting initial values and  $\tau' = z - z_2$ , we find

$$\frac{\tau'}{\tau_L'} = \left[ 1 - \left( \frac{z}{z_2} \right)^{2-2b} \left\{ 1 + \frac{28H}{3a_2} \left( 1 - \frac{z}{z_2} \right) \right\} \right] [1 + O(0.02)]. \quad (25)$$

The  $O(\dots)$  terms in these equations represent the maximum errors. The appropriate formula for lifetime, with  $\omega$  constant or variable, is

$$\tau_L = -\frac{3e_1 T_1}{4 \dot{T}_1} \cdot \frac{I_0(z_1)}{I_1(z_1)} \left\{ 1 + 2e_1 \frac{I_1(z_1)}{I_0(z_1)} - \frac{5e_1}{12} + \frac{H}{2a_1} + c \frac{I_2(z_1)}{I_0(z_1)} \cos 2\omega_1 + O(e^2, c^2/2) \right\}, \quad (26)$$

and the equation for air density at perigee is

$$\rho_p = -\frac{\dot{T}}{3\pi a \delta} \frac{\exp(z + c \cos 2\omega)}{I_0 + 2e I_1 + c I_2 \cos 2\omega + \frac{1}{4} c^2 I_0 + O(e^2, c^4)}. \quad (27)$$

### 4. Circular Orbits

For circular orbits the argument of perigee  $\omega$  becomes meaningless, and there can be no first-order effects of atmospheric oblateness because these always enter the equations via the parameter  $c \cos 2\omega$ . There are some second-order effects [16], but these are always very small.

## V. The Effect of Atmospheric Oblateness: Numerical Results

### 1. Introduction

Eqs. (10)–(27) show that the effects of atmospheric oblateness usually depend upon several orbital parameters —  $e$ ,  $i$ ,  $\omega$  and sometimes  $H/a$  — as well as the ellipticity of the atmosphere,  $\epsilon$ . For Phase 1 the effects are usually best measured by the quantity  $q = (\epsilon/e) \sin^2 i \cos 2\omega$ , and are therefore usually greatest when  $i = 90^\circ$ ,  $\omega = 0, 90^\circ, \dots$ , and  $e$  has its minimum value of 0.02, so that  $q_{\max} = 50\epsilon$ . The “average” value of  $q$ , when, say,  $i = 45^\circ$ ,  $\cos 2\omega = 2/\pi$

and  $e = 0.1$ , is however much less,  $q_{av.} = 3e$ . This wide disparity between the maximum and "average" values makes it difficult to generalize about the results, and in this section both maximum and average values will be indicated, the average values being obtained by assigning each relevant parameter approximately its arithmetic mean value.

## 2. Results for Phase 1 ( $0.02 < e < 0.2$ )

The variation of  $(r_{p_0} - r_p)/H$  with  $e/e_0$  for a spherical atmosphere in Phase 1, as given by (10) with  $\zeta = 0$ , is shown in Fig. 5. The correction to be applied to allow for atmospheric oblateness depends on a large number of parameters,

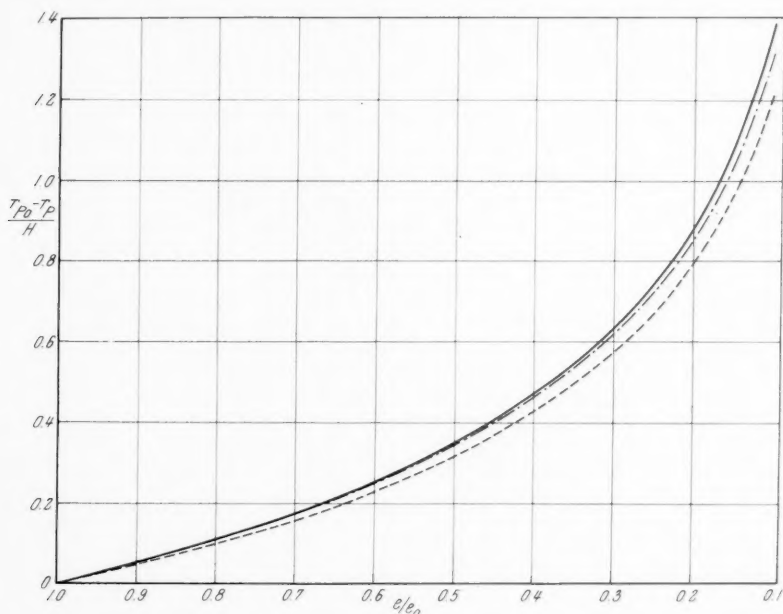


Fig. 5. Variation of perigee distance  $r_p$  with eccentricity,  $e$ , during phase 1, for spherical atmosphere.  $r_p$  perigee distance from Earth's centre,  $e$  eccentricity,  $H \approx$  scale height, defined in section II,  $a$  semi major axis, zero suffix denotes initial values

—	$H/a_0 = 0.008$	$e_0 = 0.1$
- - - -	$H/a_0 = 0.008$	$e_0 = 0.2$
- · - · -	$H/a_0 = 0.006$	$e_0 = 0.1$

as eqs. (11)–(14) show, and cannot be satisfactorily presented in one figure. The effects of atmospheric oblateness are however usually very small if the perigee makes many revolutions about the earth, i.e. if  $G$  in eq. (9) and hence  $u_0$  in eq. (14) are large. The most interesting results are therefore those for small values of  $u_0$ , and Fig. 6 gives the variation of  $\zeta$  with  $u/u_0$  for  $u_0 = 2$ , which corresponds to a change in  $\omega$  of about  $180^\circ$  while  $e$  is being reduced to  $1/5$  of its initial value.

The maximum value of  $\zeta$  in Fig. 6 occurs as  $u \rightarrow 0$ . But  $u/u_0 (\approx e/e_0)$  cannot be less than 0.1, since  $e > 0.02$  and  $e_0 < 0.2$ . So the maximum value of  $\zeta$  occurs at  $u/u_0 = 0.1$ , and can only arise if  $e_0$  is near 0.2. From Fig. 6  $a_0 e_0 \zeta / c H$  has a maximum value of about 15 for  $u/u_0 = 0.1$ , so that  $a_0 \zeta / c H \approx 75$ . Now,



from eq. (12),  $cH/a_0$  is equal to  $(\epsilon r_p/2a_0) \sin^2 i$ , which is less than  $(\epsilon/2) \sin^2 i$ . So the maximum value of  $\zeta$  which can arise (for  $u_0 = 2$ ) is  $(75/2) \epsilon \sin^2 i$ , or, taking a polar orbit ( $i = 90^\circ$ ) and  $\epsilon = 0.00335$ ,  $\zeta_{\max} = 0.13$ . The change in the spherical-atmosphere value of  $(r_{p_0} - r_p)$  due to atmospheric oblateness, which, from (10), is  $H\zeta$ , is therefore never likely to exceed 13 km for  $u_0 = 2$ , since  $H < 100$  km. And in these circumstances, with  $e/e_0 \approx 0.1$ , the change in  $r_p/H$  due to a spherical atmosphere is, from Fig. 5, about 1.3, corresponding to a change in  $r_p$  of about 130 km.

The influence of atmospheric oblateness is at its maximum when  $\omega$  is constant, for then  $\omega$  can be kept at its "worst" value throughout the satellite's life, without any alleviation from averaging effects. So the constant- $\omega$  versions which have been given in the remainder of the equations of section IV are adequate to display the maximum effects of oblateness.

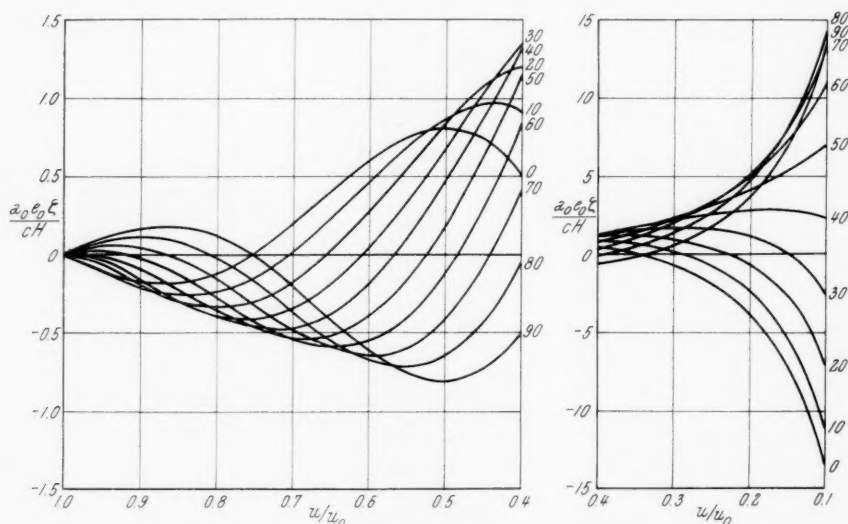


Fig. 6. Values of  $a_0 e_0 \zeta / c H$  when  $u_0 = 2$ . (a) Variation with  $u/u_0$  for  $i > 63.4^\circ$  (for  $i < 63.4^\circ$  evaluate  $a_0 e_0 \zeta / c H$  at  $(90 - \omega_0)$  instead of  $\omega_0$  and reverse the sign). Numbers on the curves indicate the initial value of the argument of perigee,  $\omega_0$  in degrees. If  $\omega_0 > 90$  evaluate  $a_0 e_0 \zeta / c H$  at  $(\omega_0 - 90)$  and reverse the sign.

It is thus likely that a higher value of  $\zeta$  will arise when  $\omega$  is constant than the value of 0.13 already obtained as a maximum for  $\omega$  variable and  $u_0 = 2$ . In fact, eq. (15) shows that, with  $\omega$  constant,  $\zeta_{\max} = 0.15$  when  $e = 0.02$ ,  $e_0 = 0.2$ ,  $\cos 2\omega = -1$  and  $i = 90^\circ$ , corresponding to a maximum change in perigee distance of 15 km. The main change due to spherical atmosphere is again 130 km, so there is a 12% change due to oblateness; but this percentage change can be much larger, up to 27%, when  $e \approx e_0$  and the absolute changes in perigee height are very small.

It should be emphasized that the values of  $\zeta$  are usually very much less than the maxima quoted above. If each of the parameters has an average value —  $i = 45^\circ$ ,  $\cos 2\omega = 2/\pi$ ,  $e_0 = 0.1$  and  $e = 0.05$  — eq. (15) gives  $|\zeta| = 0.011$ , less than 1/10 of its maximum value.

The variation of  $T$  with  $e$  is very little affected by atmospheric oblateness. For, since the perigee distance itself, which is always greater than 6500 km is never changed by more than 15 km as a result of atmospheric oblateness, the quantity  $(r_p/r_{p0})^{3/2}$  in eq. (16) cannot change by more than 0.35% and hence  $T/T_0$  cannot be changed by more than 0.0035. For an "average" orbit the effect would be more than 10 times smaller. The spherical-atmosphere equation between  $T$  and  $e$ , as represented by (16) and (10) with  $\zeta = 0$ , provides a powerful method of determining eccentricity from period, which is frequently used in practice [17]: so it is fortunate that atmospheric oblateness has such a small effect.

Atmospheric oblateness can seriously affect the variation of eccentricity with time, as eqs. (17) and (18) show.  $t/t_L$  varies from 0 to 1 during the satellite's life, and the change in it due to atmospheric oblateness is given by  $\xi$ , which

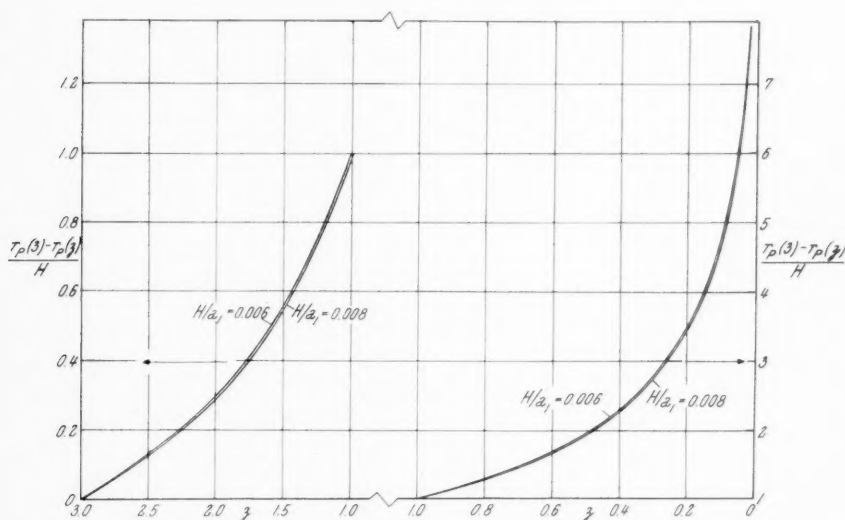


Fig. 7. Variation of perigee distance,  $r_p$ , with  $z$ , during phase 2, for spherical atmosphere

from eq. (18) can be as large as 0.1, if  $e/e_0 = 0.5$ ,  $a_0 e_0/H = 6$ ,  $\cos 2\omega = 1$ ,  $i = 90^\circ$ ,  $e_0 = 0.045$ . For most orbits, however, the effect is much smaller (an average value of  $\xi$  being about 0.01) and is subordinate to the changes caused by fluctuations in air density.

The lifetime formulae can also be greatly changed as a result of atmospheric oblateness, by up to 24% as eq. (19) shows, if  $\cos 2\omega = 1$ ,  $i = 90^\circ$  and  $e_0$  has its minimum value, which is taken as 0.022, since, if the initial  $e$  were any smaller than this, the orbit would be regarded as Phase 2 only. An average value for the change in  $t_L$  would be about 2%.

In the equation for air density the maximum changes due to atmospheric oblateness are half those in the lifetime formula, 12% maximum or 1% average.

### 3. Results for Phase 2 ( $0 < e < 0.02$ )

The variation of  $r_p$  with  $z$  in a spherical atmosphere, as given by (21) with  $\psi(z) = 0$ , is shown in Fig. 7. In this Figure  $r_p(3) - r_p(z)$  is plotted against  $z$ : to obtain  $r_p(z_1) - r_p(z)$ , one subtracts  $r_p(3) - r_p(z_1)$  from  $r_p(3) - r_p(z)$ . The

correction due to atmospheric oblateness to be subtracted from  $(r_{p1} - r_p)/H$ , namely  $\psi(z) - \psi(z_1)$ , is given in similar form in Fig. 8.

The maximum value of  $\psi(z) - \psi(3)$  occurs when  $b$  has its maximum value of about 0.15 and  $z \rightarrow 0$ . There is however a lower limit to the value of  $z$ : it can be assumed that  $z$  is never less than  $z_1/6$ , because if  $z_1/z > 6$ , the change in  $r_p$

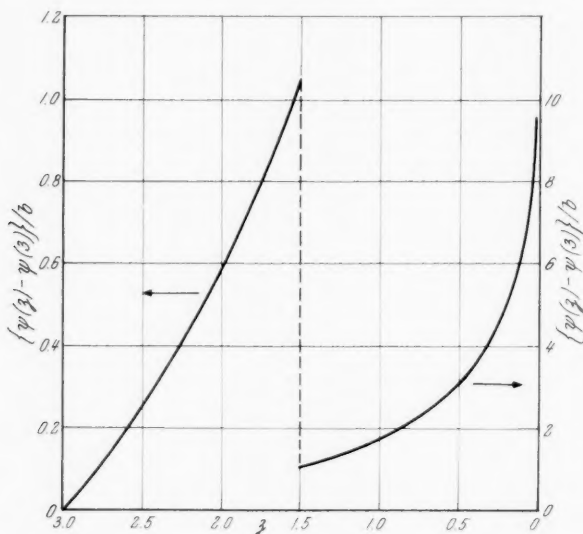


Fig. 8. Variation of  $\psi$ , the correction to  $(r_{p1} - r_p)/H$  due to atmospheric oblateness, when  $b$  is constant

is, from Fig. 7, greater than  $2H$ . For most satellites the lifetime ends before  $r_p$  has changed by as much as this; and, if not, the value of  $H$  would have changed so much that it would usually be necessary to split Phase 2 into two parts, each with a different value of  $H$ . Thus we may assume  $z > z_1/6$ , so that from Fig. 8,  $\psi(z_1) - \psi(z) < 4b < 0.6$ , and the maximum change in  $r_p$  due to atmospheric oblateness is  $0.6H$  or at most 60 km. Relative to the main spherical-atmosphere effects, the maximum change in  $r_p$  due to atmospheric oblateness occurs when  $z/z_1 \rightarrow 1$ ; all the changes are then very small, but the inclusion of atmospheric oblateness can alter the spherical-atmosphere value by up to 30%.

The change in  $T$  due to the atmosphere can also be altered by up to 30% when atmospheric oblateness is allowed for, if  $z/z_1$  is near 1, i.e.  $T/T_1$  could be changed from, say, 0.997 to 0.996. The maximum absolute change in  $T/T_1$  due to oblateness occurs when  $z/z_1$  is small and is  $(3H/2a_1)\{\psi(z) - \psi(z_1)\}$  or at most about 0.012, so that  $T/T_1$  might be changed from, say, 0.90 to 0.912.

These maximum changes in  $r_p$  and  $T$  due to atmospheric oblateness are far from negligible; but it should again be emphasized that they occur only for exceptional orbits, and in general the effects are very much smaller. For an "average" orbit, with  $z_1 = 2$ ,  $z = 1$ , and  $b = 0.05$ , the change in  $r_p$  due to atmospheric oblateness is 6 km (as compared with the maximum of 60 km) and is 9% of the spherical-atmosphere effect. The corresponding change in  $T/T_1$  is 0.0012.

The variation of  $z/z_1$  with  $\tau/\tau_L$ , as given by (24), is plotted in Fig. 9. Again it is apparent that atmospheric oblateness can cause quite large effects. For a given  $z$ ,  $\tau/\tau_L$  can be changed by up to 0.11 at most, i. e. the time at which a given eccentricity is attained can change by 11% of the lifetime. An average value for the change would be about 3%.

The formula for lifetime (26) can be changed as a result of atmospheric oblateness by a maximum of 14% when  $z_1$  is near 3, or an "average" of 3%, when  $z_1 = 2$ ,  $c = 0.1$  and  $\cos 2\omega = 2/\pi$ . The formula for density at perigee can be changed by a maximum of 36%, when  $z_1$  is near zero, or an "average" of 3%.

## VI. Conclusions

The evidence so far available indicates that at heights between 200 and 300 km, where the influence of air drag on satellite orbits is most important, and probably at greater heights too, atmospheric density is almost independent of latitude, so that the atmosphere shares the ellipticity of the earth beneath it.

The effect of this atmospheric oblateness on the contraction of a satellite orbit varies widely according to the values of the orbital parameters. If the eccentricity  $e$  exceeds 0.02, the quantity  $(\varepsilon/e) \sin^2 i \cos 2\omega$  provides a measure of the effect, so that, if the argument of perigee  $\omega$  completes several revolutions, the net effect of atmospheric oblateness is usually very small since the mean value of  $\cos 2\omega$  is small. The effects are also small, of course, for near-equatorial orbits, with  $i$  small. If, however,  $e$  is near 0.02,  $i$  is large and the average value of  $\cos 2\omega$  is near 1, atmospheric oblateness has an important effect on nearly all the orbital parameters. Table I summarizes the numerical values of the effects, as given in section V.

In this Table the "average" values refer to conditions when  $e$  and  $i$  have average (arithmetic mean) values and  $\cos 2\omega$  has its average numerical value  $2/\pi$ , which would be appropriate for an orbit for which  $\omega$  changed from say  $45^\circ$  to  $135^\circ$ . If, however,  $\omega$  completes several revolutions, the mean value of  $\cos 2\omega$  will be much lower and the effects of atmospheric oblateness correspondingly smaller. The maximum absolute values in the Table are usually attained when  $e$  is very small, whereas the maximum percentage changes usually occur when  $e$  is near its initial value; so, with the maximum values, the two halves of the Table refer to different situations.

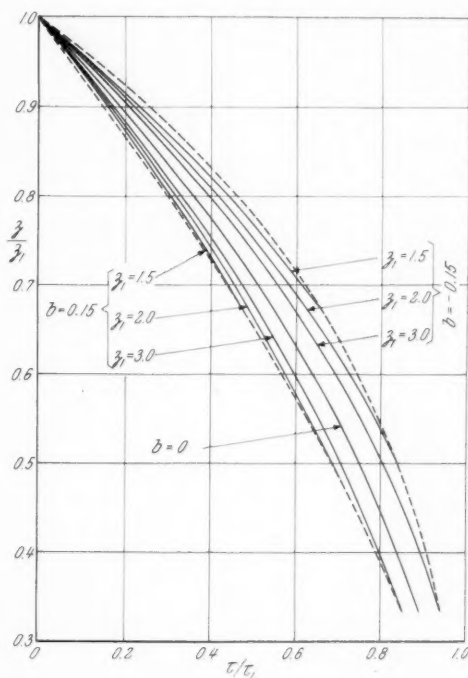


Fig. 9. Variation of  $z/z_1$  with  $\tau/\tau_L$  for phase 2 and  $\omega$  constant.  $1 \leq z \leq 3$

It is again difficult to generalize about the results in this Table, but there are a few conclusions worth emphasizing. First, the variation of period  $T$  with  $e$  during Phase 1 is almost unaffected by atmospheric oblateness, and even in

Table I. *Maximum Changes in  $r_p$ ,  $T$ ,  $t$ ,  $t_L$  and  $q_p$  Due to Atmospheric Oblateness, for Any Given Eccentricity; and Average Values*

Parameter	Absolute change				Change, as % of sph. atm. effect			
	Phase 1		Phase 2		Phase 1		Phase 2	
	Max.	Av.	Max.	Av.	Max.	Av.	Max.	Av.
$r_{p0} - r_p$	15 km	1 km	60 km	6 km	27%	3%	30%	9%
$T/T_0$ (or $T/T_1$ )	0.0035	0.0003	0.012	0.0012	4%	0.3%	30%	2%
$t/t_L$ (or $\tau/\tau_L$ )	0.10	0.01	0.11	0.03	—	—	—	—
$t_L$ (or $\tau_L$ )	0.24 $t_L$	0.02 $t_L$	0.14 $\tau_L$	0.03 $\tau_L$	—	—	—	—
$q_{p0}$ (or $q_{p1}$ )	—	—	—	—	12%	1%	36%	3%

Phase 2 the effect is small. Second, the formula for the variation of time with  $e$ , and that for lifetime  $t_L$ , can be seriously affected by atmospheric oblateness, a change of up to 24% in the lifetime being possible. Third, the spherical-atmosphere formula for obtaining air density at perigee from satellite orbits [5], which has been widely used, should be corrected for the effects of atmospheric oblateness, which may alter it by up to 12% for  $e > 0.02$  and up to 36% for  $e < 0.02$ . This correction was made when calculating the points in Fig. 2, which were obtained from the formulae given in [11] for evaluating atmospheric density, at an optimum height and in the presence of atmospheric oblateness.

Crown Copyright is reserved in the text and figures of this paper.

### References

1. D. G. KING-HELE, The Effect of the Earth's Oblateness on the Orbit of a Near Satellite. *Proc. Roy. Soc. A* **247**, 49–72 (1958).
2. G. E. COOK, Luni-Solar Perturbations of the Orbit of an Earth Satellite. *Geophys. J. Roy. Astronom. Soc.* (to be published).
3. G. E. COOK, The Aerodynamic Drag of Near Earth Satellites. Ministry of Aviation A.R.C. Current Paper C.P.523. London: Her Majesty's Stationery Office, 1960.
4. D. G. KING-HELE and D. C. M. LESLIE, Effect of Air Drag on the Orbit of Sputnik 2: Comparison of Theory and Observation. *Nature* **181**, 1761–1763 (1958).
5. G. E. COOK, D. G. KING-HELE, and D. M. C. WALKER, The Contraction of Satellite Orbits Under the Influence of Air Drag. I. With Spherically Symmetrical Atmosphere. *Proc. Roy. Soc. A* **257**, 224–249 (1960).
6. T. R. NONWEILER, Effect of Solar Flares on Earth Satellite 1957 beta. *Nature* **182**, 468–469 (1958).
7. D. G. KING-HELE and D. M. C. WALKER, Irregularities in the Density of the Upper Atmosphere: Results from Satellites. *Nature* **183**, 527–529 (1959).
8. L. G. JACCHIA, Corpuscular Radiation and the Acceleration of Artificial Satellites. *Nature* **183**, 1662–1663 (1959).
9. W. PRIESTER, H. A. MARTIN, and K. KRAMP, Earth-Satellite Observations and the Upper Atmosphere. *Nature* **188**, 200–204 (1960).
10. L. G. JACCHIA, Satellite Drag During Events of November, 1960. Paper presented at 2nd International Space Science Symposium, Florence, 1961.

11. D. G. KING-HELE and D. M. C. WALKER, Upper-Atmosphere Density During the Years 1957 to 1961, Determined from Satellite Orbits. Paper presented at 2nd International Space Science Symposium, Florence, 1961.
12. D. G. KING-HELE and D. M. C. WALKER, Variation of Upper-Atmosphere Density with Latitude and Season: Further Evidence from Satellite Orbits. *Nature* **185**, 727-729 (1960).
13. G. V. GROVES, Latitude and Diurnal Variations of Air Densities from 190 to 280 km as Derived from the Orbits of Discoverer Satellites. *Proc. Roy. Soc. A* **263**, 212-216 (1961).
14. S. H. LANDBERG, Densities of the Upper Atmosphere, Derived from Discoverer Satellites. *ARS Journal* **31**, 155-157 (1961).
15. D. G. KING-HELE, The Earth's Gravitational Potential, Deduced from the Orbits of Artificial Satellites. *Geophys. J. Roy. Astronom. Soc.* **4**, 3-17 (1961).
16. D. G. KING-HELE, G. E. COOK, and D. M. C. WALKER, The Contraction of Satellite Orbits Under the Influence of Air Drag. Part II. With Oblate Atmosphere. Ministry of Aviation Report (1960) (to be published).
17. D. G. KING-HELE and D. M. C. WALKER, Methods for Predicting the Orbits of Near Earth Satellites. *J. Brit. Interplan. Soc.* **17**, 2-14 (1959).

### Discussion

Mr. STERN: Do charged particles have any effect on the values of density you obtain?

Mr. KING-HELE: The effect of charged particles is believed to be small at heights between 200 and 700 km, and, at most, should not alter the results by more than 10% at 700 km and much smaller amounts at lower altitudes. At heights above 1000 km these effects are, however, more important.

Mr. KOVALEVSKY: Quelle est la valeur numérique de l'altitude de référence  $H$  que vous avez donné dans votre formule?

Mr. KING-HELE:  $H$  increases from about 40 km at a height of 200 km to about 55 km by night or about 100 km by day at a height of 600 km.

Mr. STERN: Now that you have done so many calculations can you take into account the shape of the earth?

Mr. KING-HELE: Yes, we can measure the density as a function of height above the real, oblate earth. The indications are that the contours of constant density have roughly the same ellipticity as the earth beneath.

Mr. KOOY: Does the drag coefficient vary round the orbit of the satellite?

Mr. KING-HELE: It does vary slightly with the molecular speed ratio and also with the temperature of the satellite. But both these effects are small and we think it can legitimately be taken as constant.

Mr. KOOY: How does the axis of rotation vary its direction in space?

Mr. KING-HELE: For satellites which are uncontrolled, the direction of the axis in space moves very slowly, over a period of months. The way in which it moves depends on whether it is affected more by the atmosphere or by the gravitational field. But in either case the change from one revolution to the next is very small.

## Problems and Potentialities of Space Rendezvous

By

John C. Houbolt<sup>1</sup>

(With 14 Figures)

### Abstract — Zusammenfassung — Résumé

**Problems and Potentialities of Space Rendezvous.** The paper gives an analysis of rendezvous operations in space, as in the soft joining of a ferry vehicle to an orbiting space station or other target, and explores the potentiality of rendezvous in accomplishing certain space missions.

The significant phases of rendezvous are examined in a sequential sense, in which problems pertinent to each phase are assessed and results of recent research studies are given. Discussed are such aspects as appropriate injection or launch trajectories for rendezvous, suitable launch times, use of midcourse guidance logic, and manned and automatic terminal guidance schemes. Attention is also given to the use of special purpose orbits, such as parking orbits, to corrective maneuvers, to fuel consumption and penalties, and to the use of different sensors (electronic, optical, etc.) in performing the various phases. The paper concludes with an examination of the mission capabilities and benefits that may be brought about through use of rendezvous.

**Probleme und Möglichkeiten des Zusammentreffens im Raum.** Die vorliegende Arbeit bringt eine Untersuchung derartiger Operationen; die kennzeichnenden Phasen werden behandelt und Resultate gegenwärtiger Untersuchungen angegeben. Untersucht werden unter anderem Startbahnen, geeignete Startzeit, Kurskorrekturen, bemannte und automatische Lenkung. Auch spezielle Bahnen, wie Parkbahnen für Korrekturmanöver, zum Auftanken, für Unglücksfälle usw., werden behandelt.

**Problèmes et utilisations des rendez-vous dans l'espace.** On donne une analyse des opérations de rendez-vous dans l'espace, comme la rencontre d'un véhicule de ravitaillement avec une station spatiale ou tout autre objectif et l'on examine les possibilités offertes par cette technique dans l'accomplissement de certaines missions spatiales.

Les phases significatives d'un rendez-vous sont examinées dans leur ordre naturel. On examine les problèmes posés à chaque phase et l'on donne les résultats des recherches récentes à leur sujet. L'auteur traite de questions telles que celle de la mise en orbite et des trajectoires de départ qui conviennent le mieux au rendez-vous, de l'heure du lancement, de l'emploi d'une correction à mi-course, des systèmes de guidage terminaux pilotés ou automatiques, ainsi que des problèmes posés par l'accostage. Sont également examinés l'emploi d'orbites spéciales pour des buts particuliers, tels que des orbites de stationnement, la correction des manœuvres, le pourcentage de propergol consommé et ses conséquences, ainsi que l'emploi des différents dispositifs (électronique, optique, etc.) employés pour l'accomplissement de chaque phase. L'auteur termine par l'examen des bienfaits et des nouvelles possibilités que l'utilisation des rendez-vous apportera dans les missions spatiales.

<sup>1</sup> Associate Chief, Dynamic Loads Division, NASA-Langley Research Center, Langley Field, Virginia, U.S.A.



## I. Introduction

This paper discusses some of the basic results that have been found in studies of the problem of rendezvous in space, involving for example the ascent of a satellite or space ferry so as to make a soft contact with another satellite or space station already in orbit. Rendezvous is of interest because it may have a vital and widespread use in many future space missions; indeed, it may make reality certain missions which are not otherwise possible. Uses already envisioned include:

Assembly of orbital units

Perform space missions with smaller launch vehicles

Personnel transfer

Rescue

Retrieval

Proper placement of special purpose satellites (24-hour orbiter, communications satellites)

Inspection

Interception

Much information on the feasibility and technical aspects of rendezvous has been generated in the past few years, as is attested by the enclosed list of references involving 59 entries which date back essentially to only 1958; and the list is by no means complete.

The main intent in this report is to highlight some of the basic advances that have been made in the understanding of rendezvous. Emphasis is given to launch timing, trajectories, guidance, and basic rendezvous schemes. Hardware items such as attitude control systems, propulsion rockets, sensors are not discussed, other than to assume they exist.

It will be noted that a large portion of the material presented is drawn from the research studies conducted at the National Aeronautics and Space Administration, primarily because of the ease of accessibility. It is remarked, however, that parallel-type work elsewhere indicates the same general findings. In this connection, and with reference to the list of references, I would like to mention that in case someone's work has been overlooked, or if proper credit has not been given or a name not recognized, no slight is intended. It simply reflects the fact that it is now rather difficult to keep up with all the literature on a subject.

## Symbols

$G$	NEWTON's universal gravitation constant
$m$	mass of the ferry
$M$	mass of the earth
$n$	revolutions in chasing or parking orbit
$R$	range between ferry and target
$\dot{R}$	range rate
$\vec{T}$	thrust vector of ferry
$V_L$	velocity of injection at end of booster burnout
$AV_R$	relative velocity between ferry and target at intercept
$\gamma_L$	trajectory angle at end of booster burnout referred to local horizontal
$\theta_L$	angular position between ferry and target at instant of ferry launch
$\omega$	angular rotation rate of satellite in circular orbit

## II. Rendezvous Phases

Fig. 1 depicts the commonly adopted phases of rendezvous that would be involved in launching a space ferry from the earth's surface so as to make contact with an orbiting payload or space station, hereinafter referred to as the target. In the injection phase the intent is to place the ascending vehicle as close as possible to the space station; midcourse guidance may be employed in this

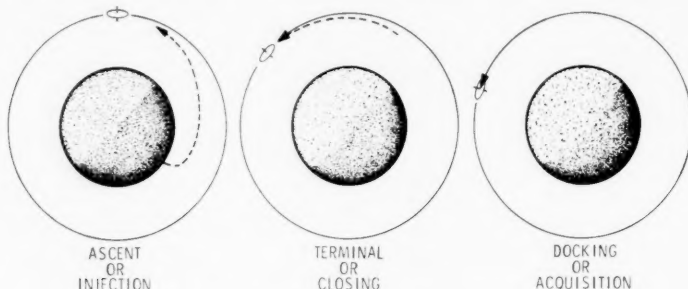


Fig. 1. Phases of rendezvous

phase. The next or terminal phase is the phase of closing on the target, involving usually only a fraction of an orbital revolution. During this phase an automatic system or the pilot of a manned vehicle may be virtually driving the craft to the station, as in the approach of a boat to a dock. The final phase, the docking or acquisition phase, involves the actual "soft" contact — the securing of lines, latches, air locks, etc.

### A. Launch and Ascent

#### *Injection Techniques*

Five basic injection techniques may be employed in rendezvous as depicted in Fig. 2.

1. *In-plane and Compatible Orbit.* In this scheme the ferry is launched so as to ascend essentially in the orbit plane of the target as the target approaches. In general, long wait times (a month or more) may be involved before the target arrives in a position that will avoid prohibitive fuel consumption for rendezvous, see [1]. To avoid these long wait times the concept of compatible orbits has been advanced, in which the period (or altitude) of the target's orbit is chosen so that the target passes directly overhead at least once and perhaps twice each day; here the rotation of the target, precession of the orbit plane, and the earth's rotation are all considered simultaneously. Perhaps the most complete treatment that has been made on the use of compatible orbits is that of SWANSON and PETERSEN [2].

2. *Parking Orbit.* Another way to avoid long wait times for in-plane launchings is to make use of parking orbits. The ferry is boosted to some sub-orbit and there gains on the target's angular position during each revolution because of the shorter orbital period. After making up the difference it is boosted out of the sub-orbit to rendezvous with the target. Some results pertaining to this technique will be given subsequently.

3. *Out-of-plane Adjacency.* In this scheme the launch site is in general out of target's orbital plane; the ferry is launched so that at the end of injection it is traveling adjacent to the target, at the same velocity and altitude but in

an orbital plane of slightly different inclination. At the nodal point where the two planes cross (about a quarter of a revolution later) the ferry's direction is changed to coincide with that of the target. Results in [1] indicate that for launchings which are nearly East-West, rendezvous at least once a day is feasible, and further that rendezvous launchings on from 3 to 4 successive target passes are possible.

4. *"Two Impulse" Scheme.* Here the ferry is launched in general out of the target's orbit plane so that it follows a ballistic trajectory and meets the target just at the apogee or maximum altitude of the ballistic path. At this point another "impulse" is given to simultaneously change the direction and increase

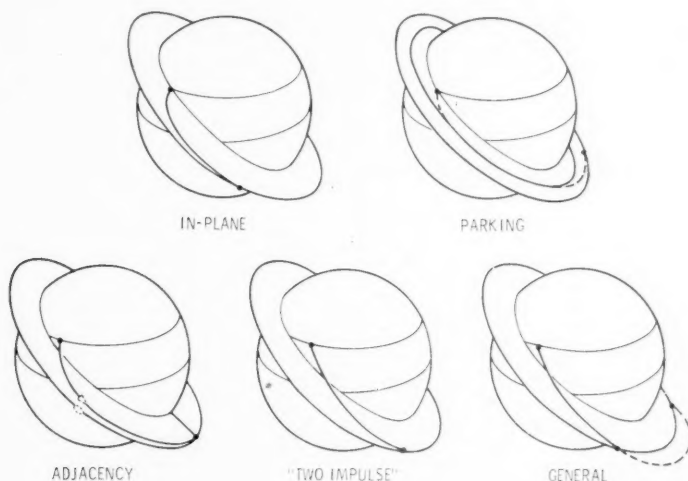


Fig. 2. Rendezvous ascent trajectories

the speed of the ferry so that its motion coincides with that of the target. BIRD and THOMAS [3] have advanced this scheme and show, as in the previous case, that once-a-day rendezvous is quite feasible by this method, and that three to four successive chances covering an interval of several hours are offered each day if launches of the West-East type are used. The scheme has the advantage over the previous adjacency scheme in that the plane change is made at sub-orbital speeds (the apogee point), thus realizing a substantial saving in fuel expenditure.

5. *General Injection Technique.* All of the previous four cases are really sub-cases of this method. In this scheme, extensively investigated by EGGLESTON [4, 5, 6] for both circular and elliptic orbits, the ferry is launched (in general, out of the target's orbit plane) with a correct combination of injection angle and velocity at booster burnout so that it follows a KEPLERIAN type trajectory thereafter to intercept the target. At interception the necessary impulse to make direction and speed coincide is then applied. EGGLESTON [5] also studied the use of midcourse guidance during the coast trajectory phase to correct for errors which may be present at booster burnout or due to errors in the sensing equipment used. Some results are given in the next section.

### Launch and Rendezvous Windows for Direct Ascent Trajectories

The left sketch on Fig. 3 shows a planar projection of the general trajectories that are possible in a direct ascent for rendezvous. At booster burnout the ferry is considered to be injected with a speed  $V_L$  and an injection angle  $\gamma_L$ . Depending

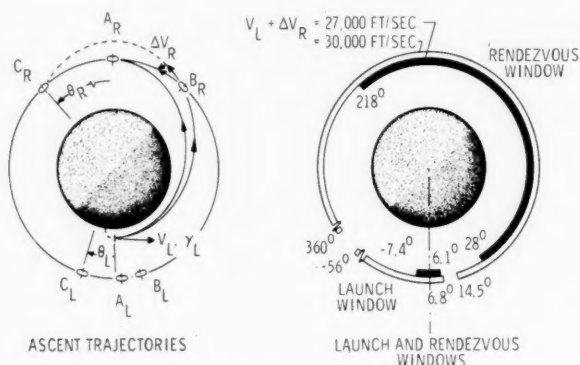


Fig. 3. Ascent paths and "windows" of rendezvous

on the combination used for these quantities three basic types of rendezvous may be made. With the target at  $A_L$  rendezvous occurs at  $A_R$ , and in this case

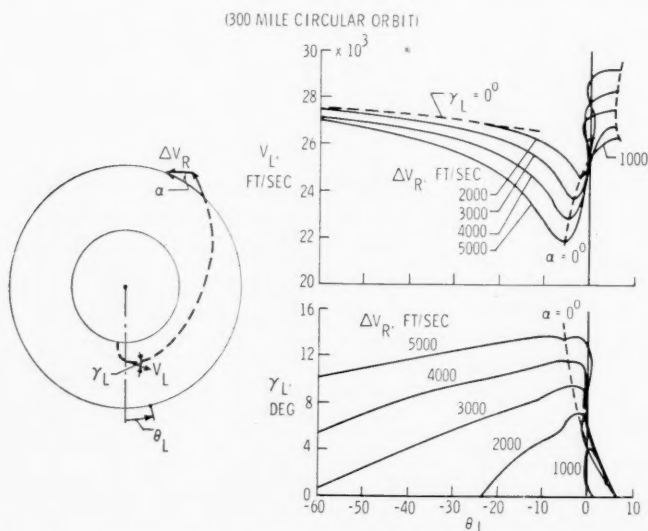


Fig. 4 a. Launch conditions for rendezvous. For  $\Delta V_R$  of 1,000–5,000 ft/sec

the trajectory followed is a HOHMANN type ellipse or minimum energy path. For the target at  $B_L$ , rendezvous occurs on the outgoing leg at  $B_R$ , whereas for  $C_L$ , rendezvous occurs on the return leg at  $C_R$ . The maximum spread between  $B_L$  and  $C_L$  is determined by the performance capability of the system, and rendezvous may be achieved whenever the target is located within this spread.

It has been common therefore to call the maximum arc possible between  $B_L$  and  $C_L$  the launch window, or region of accessibility; likewise, the maximum arc possible between  $B_R$  and  $C_R$  may be termed the rendezvous window.

The right-hand sketch illustrates how these windows are governed by the performance capabilities of a system. If the sum of  $V_L$  and the impulsive velocity increment  $\Delta V_R$  required at rendezvous cannot exceed 27,000 fps, then the launch window extends from  $+6.1^\circ$  to  $-7.4^\circ$ , a spread of  $13.5^\circ$ . For a 300 mile circular orbit a good figure to keep in mind is that  $4^\circ$  of arc correspond to about 1 minute time of satellite travel; thus, the  $13.5^\circ$  launch window means that a launch for rendezvous must occur within an interval of a little more than 3 minutes. For a 30,000 fps maximum performance value, we see that the launch window has increased to  $6.8$  plus  $56^\circ$  or  $62.8^\circ$ , or something in the neighborhood of a 15-minute launch time available. The corresponding rendezvous windows shown show that the target may travel up to a full revolution from the time of ferry launch before rendezvous is made.

General results of the type determined by EGGLESTON [6, 7] are shown in Fig. 4. This figure is given in terms of the injection speed  $V_L$  and injection angle  $\gamma_L$ , the angular position  $\theta_L$  of the target relative to the ferry at the time of ferry booster burnout, and the velocity increment  $\Delta V_R$  required at rendezvous. Fig. 4a applies for  $\Delta V_R$  up to 5,000 fps, as might be involved in automatic rendezvous operations; Fig. 4b is an enlarged portion for  $\Delta V_R$  up to 1,000 fps, the range which is considered significant for manned ferry flights. The  $\alpha = 0$  locus designates conditions for HOHMANN transfer ellipses,  $\alpha$  being used to represent the angle between the ferry's path and the local horizon at rendezvous.

#### *Circumvention of Long Holddown Intervals*

Should holddown times on the launch pad be so uncertain as to preclude the use of the direct ascent trajectories of the previous section (that is, launch time uncertainties go beyond the limits of the launch windows), another recourse is available for rendezvous. Two basic ideas are involved: one is the fact mentioned previously that for nearly East-West type launchings, the target comes into overhead proximity of the launch site three to four times in succession; the second idea is that angular position deficiencies can be made up through use of chasing or parking orbits.

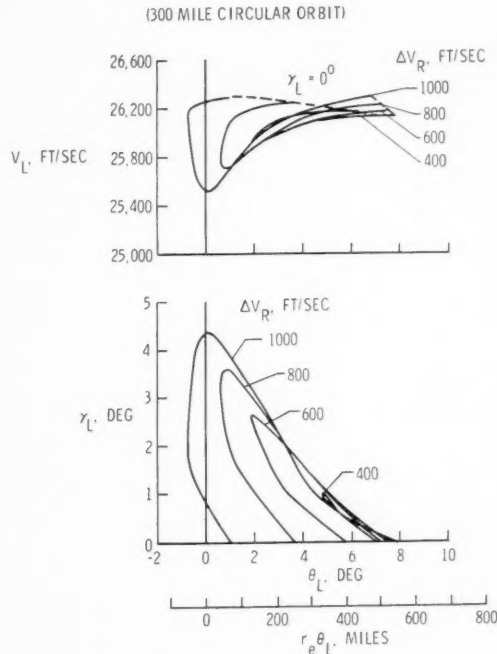


Fig. 4b. Launch conditions for rendezvous.  
For  $\Delta V_R$  up to 1,000 ft/sec

Fig. 5 is a typical example showing the nearness of the launching site to the orbital plane of the target (target position is here projected radially to the earth's surface) during four successive passes. Note that the total time the launch site is near the target plane is in the order of four and one-half hours. This closeness leads to the significant point that the ferry could be launched into an orbit similar to that of the target at any time during this four and one-half

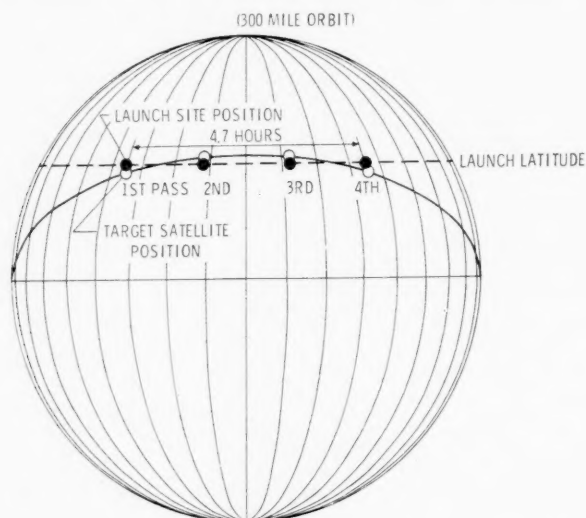


Fig. 5. Acceptable time interval that launch site is near target orbit plane

hour period (by the adjacency, two-impulse or general technique) without undue hardship or fuel expenditure. The angular position between the ferry and target may of course be large, but to get around this use is made of the chasing or parking orbit concept.

Thus, assume that the ferry is launched whenever it becomes ready during the four and one-half hour period available each day, but that the final injection velocity is held back just enough to put the ferry into a chasing orbit such that after  $n$  revolutions it has made up any angular position deficiency. Then after the position is made up, the increment in velocity not previously used is added to make ferry and target orbit coincident. This holding back of a velocity increment for subsequent addition means that no penalty in the way of additional fuel is really required over the direct ascent approach.

Fig. 6a indicates generalized results that apply to chasing and parking orbits. In practice, one would enter at the angular position deficiency to be made up, go to the  $n = 1$  curve (make up in one revolution), then to the left ordinate to determine the  $\Delta V$  holdback increment. The right-hand ordinate is used to determine  $\Delta r$ , the maximum amount the chasing orbit will dip back toward the earth; this quantity is necessary to make sure that the ferry does not dip back into the atmosphere too deeply. If, for example, we do not want the ferry to dip back closer than 100 miles, then the maximum  $\Delta r$  that can be used for a 300-mile target orbit is 200 miles. If our initial calculation yields too large a  $\Delta r$ , then we go to a curve of higher  $n$  that yields an acceptable value of  $\Delta r$ , that is, we accept more revolutions to make up the positional deficiency.

The parking orbit scheme depicted on the right-hand side of Fig. 6 can be integrated into rendezvous ascent schemes as well. Here make up times are

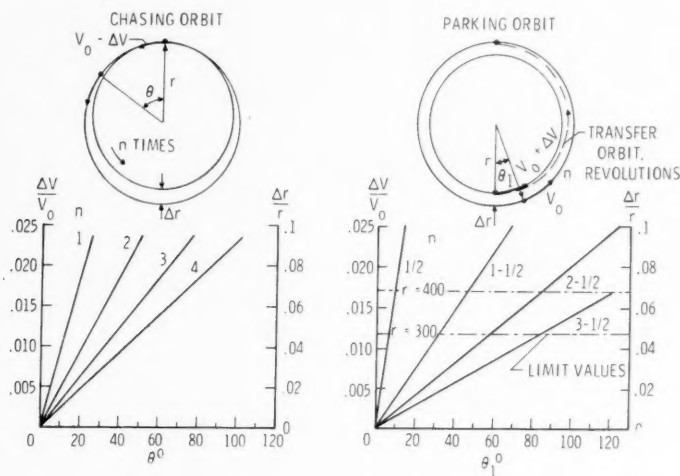


Fig. 6 a. Corrections for position mismatch. General chasing and parking orbit characteristics

better, but at the expense of one more operation — that of the impulse necessary to transfer from the parking orbit to the target orbit.

In Fig. 6 b results pertinent to chasing orbits are presented for the case of a 300-mile target orbit. The example path shown indicates that a 2.8-minute error in launch time, which corresponds to an  $11^\circ$  angular position deficiency, requires a holdback  $\Delta V$  of 250 feet per second, and that the  $\Delta r$  would be about 170 miles.

## B. Terminal Guidance

### Guidance Equations

In the terminal phase the chief concern is the relative motion between the target and the ferry; of specific interest is the guidance of the ferry to achieve the end result of bringing both the range  $R$  and the range  $\dot{R}$  to zero simultaneously at the instant of rendezvous. Table I has been prepared to show the nature of the equations that have been used in terminal phase guidance studies, and how

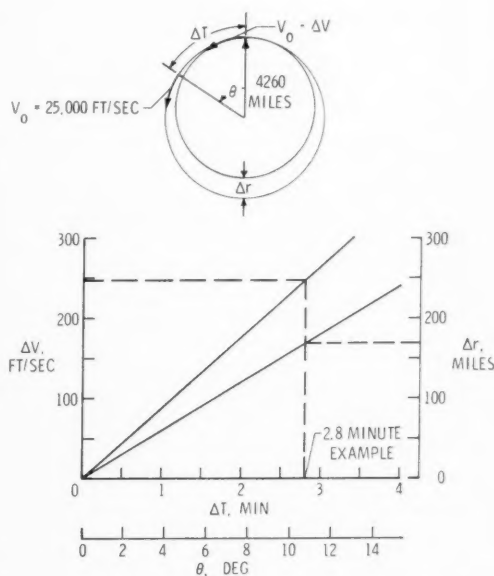
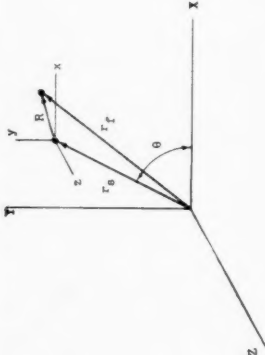


Fig. 6 b. Corrections for position mismatch. Specific chasing orbit example



Table 1. Terminal Guidance Equations

Inertially fixed axes		
		
	Vector form	Rectangular coordinates
Exact	$\frac{\partial^2 \bar{y}_f}{\partial t^2} - \Gamma \frac{\mu}{r_f} = \frac{\ddot{T}}{m}$	Similar to form immediately below except in the expansion of $V(\mu/r_f)$
Spherical earth	$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{y}_f}{dt^2} + \frac{GM}{r_f^3} \bar{r}_f &= \frac{\ddot{T}}{m} \\ \bar{r}_f &= \bar{r}_s + \bar{R} \\ \bar{r}_s &= (X, Y, Z) \\ &= (r_s \cos \theta, r_s \sin \theta, 0) \\ \bar{R} &= (x, y, z) \end{aligned}$	$\begin{aligned} \ddot{x} + (\ddot{y}_s - r_s \dot{\theta}^2) \cos \theta - (2 \dot{r}_s \dot{\theta} + r_s \ddot{\theta}) \sin \theta &+ \frac{GM}{r_f^3} (x + r_s \cos \theta) = \frac{\ddot{T}_x}{m} \\ \ddot{y} + (\ddot{r}_s - r_s \dot{\theta}^2) \sin \theta + (2 \dot{r}_s \dot{\theta} + r_s \ddot{\theta}) \cos \theta &+ \frac{GM}{r_f^3} (y + r_s \sin \theta) = \frac{\ddot{T}_y}{m} \\ \ddot{z} + \frac{GM}{r_f^3} z &= \frac{\ddot{T}_z}{m} \end{aligned}$

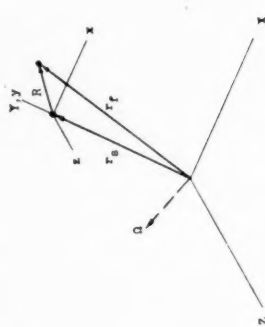
Rotating set of axes		
		
Comments	Vector form	Rectangular coordinates
$\vec{r}_I = \vec{r}_s + \vec{R}$ $\mu/r_I$ is the gravity potential due to earth, moon, planets etc.	$\frac{\partial^2 \vec{r}_I}{\partial t^2} + 2\vec{\Omega} \times \frac{\partial \vec{r}_I}{\partial t} + \vec{\dot{\Omega}} \times \vec{r}_I + \vec{\Omega} \times \vec{\dot{\Omega}} \times \vec{r}_I - V \frac{\vec{r}_I}{r_I} = \frac{\vec{T}}{m}$	Similar to form immediately below except in the expansion of $V(\mu/r_I)$
$\theta$ is the angular velocity of station about center of earth, $r_s$ is radial position of station	$\frac{d^2 \vec{r}_I}{dt^2} + 2\vec{\Omega} \times \frac{d\vec{r}_I}{dt} + \vec{\dot{\Omega}} \times \vec{r}_I + \vec{\Omega} \times \vec{\dot{\Omega}} \times \vec{r}_I + \frac{GM}{r_I^3} \vec{r}_I = \frac{\vec{T}}{m}$ $\vec{r}_I = (x, y + r_s, z) = \vec{r}_s + \vec{R}$ $\vec{r}_s = (0, r_s, 0)$ $\vec{R} = (x, y, z)$ $\vec{\dot{\Omega}} = (0, 0, \dot{\theta})$	$\ddot{x} - (y + r_s)\ddot{\theta} - 2(\dot{y} + \dot{r}_s)\dot{\theta} - x\left(\dot{\theta}^2 - \frac{GM}{r_I^3}\right) = \frac{T_x}{m}$ $\ddot{y} + x\ddot{\theta} + 2\dot{x}\dot{\theta} + \ddot{r}_s - (y + r_s)\left(\dot{\theta}^2 - \frac{GM}{r_I^3}\right) = \frac{T_y}{m}$ $\ddot{z} + \frac{GM}{r_I^3}z = \frac{T_z}{m}$ EGGLESTON [4, 5]

Table 1 (continued)

	Vector form	Rectangular coordinates
Spherical earth, Station in a circular orbit	$\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} + \frac{d^2 \vec{r}_s}{dt^2} + \frac{GM}{r^3} \vec{r}_l = \frac{\vec{T}}{m}$	$\ddot{x} - r_s \omega^2 \cos \theta + \frac{GM}{r^3} (x + r_s \cos \theta) = \frac{T_x}{m}$ $\ddot{y} - r_s \omega^2 \sin \theta + \frac{GM}{r^3} (y + r_s \sin \theta) = \frac{T_y}{m}$ $\ddot{z} + \frac{GM}{r^3} z = \frac{T_z}{m}$
Spherical earth, Circular orbit, 1st order gravity field	$\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} + \frac{GM}{r_s^3} \left( \vec{R} - 3 \frac{\vec{r}_s \cdot \vec{R}}{r_s^2} \vec{r}_s \right) = \frac{\vec{T}}{m}$  HORD [9], KURBJUN [10], BRISSENDEN [11]	$\ddot{x} + \omega^2 (x - 3 r_s \cos^2 \theta - 3 y \sin \theta \cos \theta) = \frac{T_x}{m}$ $\ddot{y} + \omega^2 (y - 3 x \sin \theta \cos \theta - 3 y \sin^2 \theta) = \frac{T_y}{m}$ $\ddot{z} + \omega^2 z = \frac{T_z}{m}$
Spherical earth, Circular orbit, "Zero-order" gravity		
No gravity	$\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \frac{\vec{T}}{m}$ any orbit  HORD [9]	Circular orbit $\ddot{x} = \frac{T_x}{m}$ $\ddot{y} = \frac{T_y}{m}$ $\ddot{z} = \frac{T_z}{m}$

Vol.  
7  
1961

Comments	Vector form	Rectangular coordinates
$r_s = \text{Constant}$ $\dot{\theta} = \text{Constant} = \omega$ $\vec{\Omega} = \text{Constant} = (0, 0, \omega)$ $= \vec{\omega}$ $\omega^2 = \frac{GM}{r_s^3} = \dot{\theta}^2$	$\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} + 2 \vec{\omega} \times \frac{d \vec{R}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}_f + \frac{GM}{r_f^3} \vec{r}_f = \frac{\vec{T}}{m}$ or $\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} + 2 \vec{\omega} \times \frac{d \vec{R}}{dt} + \omega^2 \vec{k} z + \left( \frac{GM}{r_f^3} - \omega^2 \right) \vec{r}_f = \frac{\vec{T}}{m}$	$\ddot{x} - 2 \omega \dot{y} - x \left( \omega^2 - \frac{GM}{r_f^3} \right) = \frac{T_x}{m}$ $\ddot{y} + 2 \omega \dot{x} - (y + r_s) \left( \omega^2 - \frac{GM}{r_f^3} \right) = \frac{T_y}{m}$ $\ddot{z} + \frac{GM}{r_f^3} z = \frac{T_z}{m}$ EGGLESTON [4, 5]
$\frac{d^2 \vec{r}_s}{dt^2} = -\omega^2 \vec{r}_s; \frac{GM}{r_s^3} = \omega^2$ On the left, $\frac{GM}{r_f^3} = \frac{GM}{r_s^3} \left( 1 - 3 \frac{\vec{r}_s \cdot \vec{R}}{r_s^3} + \dots \right)$ $\frac{GM}{r_f^3} \vec{r}_f \simeq \omega^2 \left( \vec{r}_s + \vec{R} - 3 \frac{\vec{r}_s \cdot \vec{R}}{r_s^2} \vec{r}_s \right)$ On the right, $\frac{GM}{r_f^3} = \frac{GM}{r_s^3} \left( 1 - 3 \frac{y}{r_s} + \dots \right)$ $\frac{GM}{r_f^3} \vec{r}_f \simeq \omega^2 (\vec{r}_s + \vec{R} - \vec{j} 3 y)$	$\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} + 2 \vec{\omega} \times \frac{d \vec{R}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{R} + \frac{GM}{r_s^3} (\vec{R} - \vec{j} 3 y) = \frac{\vec{T}}{m}$ or $\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} + 2 \vec{\omega} \times \frac{d \vec{R}}{dt} + \frac{GM}{r_s^3} (-\vec{j} 3 y + \vec{k} z) = \frac{\vec{T}}{m}$	$\ddot{x} - 2 \omega \dot{y} = \frac{T_x}{m}$ $\ddot{y} + 2 \omega \dot{x} - 3 \omega^2 y = \frac{T_y}{m}$ $\ddot{z} + \omega^2 z = \frac{T_z}{m}$ WHEELON [14], CLOHESSEY and WILSHIRE [15], CARNEY [17], EGGLESTON [5, 18], SPRALIN [19]
$\frac{GM}{r_f^3} \vec{r}_f \simeq \frac{GM}{r_s^3} (\vec{r}_s + \vec{R})$ $\frac{GM}{r_s^3} = \omega^2$	$\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} + 2 \vec{\omega} \times \frac{d \vec{R}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{R} + \frac{GM}{r_s^3} \vec{R} = \frac{\vec{T}}{m}$ or $\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} + 2 \vec{\omega} \times \frac{d \vec{R}}{dt} + \frac{GM}{r_s^3} \vec{k} z = \frac{\vec{T}}{m}$	$\ddot{x} - 2 \omega \dot{y} = \frac{T_x}{m}$ $\ddot{y} + 2 \omega \dot{x} = \frac{T_y}{m}$ $\ddot{z} + \omega^2 z = \frac{T_z}{m}$ HORNBY [20]
	$\frac{d^2 \vec{r}_f}{dt^2} + 2 \vec{\Omega} \times \frac{d \vec{r}_f}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{r}_f + \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r}_f = \frac{\vec{T}}{m}$ for any orbit $\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} + 2 \vec{\omega} \times \frac{d \vec{R}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}_f = \frac{\vec{T}}{m}$ for circular orbit	Circular orbit $\ddot{x} - 2 \omega \dot{y} - \omega^2 x = \frac{T_x}{m}$ $\ddot{y} + 2 \omega \dot{x} - \omega^2 (y + r_s) = \frac{T_y}{m}$ $\ddot{z} = \frac{T_z}{m}$

they evolve from the general satellite motion equations<sup>1</sup>. Both inertially fixed axes and rotating axes sets are indicated, with vector and rectangular coordinate forms being given for both cases. All of the equations expressed in rectangular coordinates apply to the relative motion between the ferry and the target. Rotating axes seem to be the most convenient for analytical studies, whereas inertially fixed axes lend themselves well to simulator studies. The equations which perhaps have received the most attention are those labeled (*T 1*) and which apply to a first order gravity field approximation. Undoubtedly, a reason for their popularity is the fact that these equations have a closed form solution which yields results that compare favorably with the exact results in most cases. Some of the investigators that have used the various forms are indicated on the table.

### Basic Terminal Phase Schemes

A number of steering systems for terminal guidance have been proposed and investigated in the past few years. Essentially, they may be divided into two classes: those based on a proportional navigation or fire-control viewpoint,

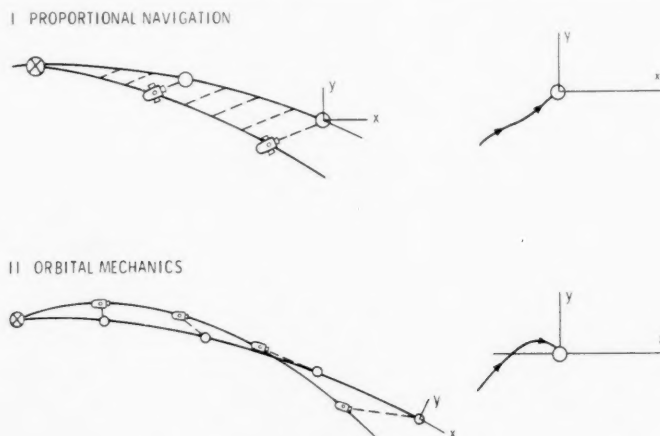


Fig. 7. Basic terminal phase schemes

and those based on orbital mechanics, see Fig. 7. Orbit path is shown on the left, and the relative motion of the ferry as seen from the station is shown on the right.

In the proportional navigation scheme the rate of rotation of the velocity vector of the ferry is controlled in proportion to the angular rate of the line of sight. With reference to actual rendezvous studies, however, it is perhaps more appropriate to consider the scheme to be based on constant bearing navigation (a limiting case of proportional navigation), since generally conditions are sought where the line of sight remains stationary in space; an inertially fixed set of axes is implied in this scheme. WRIGLEY [8], HORD [9], KURBJUN [10], BRISSENDEN [11], SEARS and FELLEMAN [12], CICOLANI [13] are some of the investigators of this approach.

<sup>1</sup> Appreciation is expressed here to Mr. JOHN M. EGGLESTON for his assistance in setting up this table.

The orbital mechanics scheme is based essentially on the homogeneous equations of motion in a reference frame fixed to the target (the rotating axes case in Table I). These equations are solved to determine the proper course to rendezvous; impulsive corrections are given to put the ferry on a collision course, and a final impulse is given at intercept to match velocities. WHEELON [14], CLOHESY and WILSHIRE [15], and LEVIN [16] have studied this scheme. CARNEY [17] has investigated the scheme using continuous modulated thrust

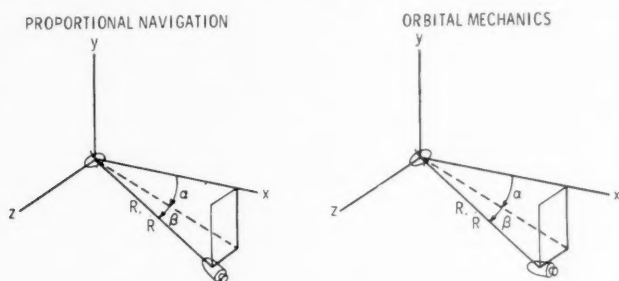


Fig. 8. Sequential operations in terminal phase

- |  |  |
|--|--|
| 1. Search and lock sensors to station                        | 1. Search and lock sensors to station  |
| 2. Null $\dot{\alpha}$ and $\dot{\beta}$                     | 2. Compute $R$ and $\dot{R}$ errors, commence thrusting and tilting out of the horizontal plane to null errors |
| 3. Follow braking schedule to bring $\dot{R} = 0$ at $R = 0$ | 3. Continue on closed loop basis to rendezvous   |

control, a horizon scanner in the ferry to establish a reference, and the concept of a slight tilting out of the horizontal plane to make the corrective maneuvers that lead to a collision course. EGGLESTON [18], SPRALIN [19], HORNBY [20] also make use of the orbital mechanics concept for ascent guidance.

Some schemes for terminal guidance make use of a combination of the two basic schemes, using, for example, proportional navigation for out-of-the-plane maneuvering, and orbital mechanics for in-plane flight.

Fig. 8 is given to indicate the nominal operating sequence of both schemes; the listing in the figure states the basic action required. Both systems require on-board sensors, such as radar or optical devices, to measure range, range rate, and angular rate of the line of sight. Either piloted or automatic control may be used, and thrusting (or braking) may be variable or of the on-off impulsive type.

### Braking Logic

To give an idea of the thrusting or braking logic involved, some comments pertaining to the automatic braking of a system employing proportional navigation will be made. The principal feature of this system is the nominal preliminary maneuver of nulling the angular rate of the line of sight (step 2 on the left of Fig. 8); this action reduces rendezvous to essentially a one-dimensional problem. During subsequent braking action the thrust vector is tilted as needed to cancel out any angular rate that may creep in due to instrument and cutoff errors, and due to misalignments. For this case, whether the thrust control is variable or on-off, the procedure usually followed is to base braking on some convenient

phase-plane law involving the range  $R$  and range rate  $\dot{R}$ . A law often used is the simple one-dimensional acceleration law

$$a = \frac{\dot{R}^2}{2R}$$

Fig. 9 illustrates the use of this law together with several braking schedules that have been studied. For the variable-thrust case, path (1) shows the ferry coasting

#### I VARIABLE THRUST CONTROL



#### II ON-OFF THRUST CONTROL

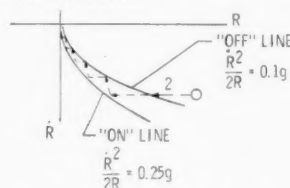


Fig. 9. Phase-plane paths in terminal guidance

at constant  $\dot{R}$  until some nominal acceleration is reached. Thrust is then applied causing the ferry to travel down the constant acceleration path to the origin; the thrust is varied in this period to account for changing mass and system errors.

For the on-off control operation depicted at the bottom, path (2), the ferry coasts until the "on" line of  $a = 0.25g$  is reached; thrusting with an acceleration of about  $0.5g$  then occurs up to the "off" line of  $a = 0.1g$ . The ferry steps down the band in this sequential fashion until rendezvous is achieved. The acceleration values chosen here represent cases tested, but are not otherwise significant.

Paths (1) and (2) apply to the situation wherein the transverse (angular

rate) and line-of-sight velocities have been nulled separately. The most efficient approach from a fuel expenditure consideration would be to cancel most all the relative velocity (range rate as well as transverse) in the preliminary maneuver except for an infinitesimal component along the line of sight. Path (3) illustrates this maneuver for the variable-thrust case; a similar path would be followed for on-off thrusting. This scheme is efficient, as mentioned, but the time to rendezvous is lengthened considerably. In contrast to this approach, velocity may be added initially to increase range rate, giving a path similar to (4), which again applies to either variable or on-off thrusting; now time to rendezvous is decreased, but at some expense in fuel. There may be some instances where a shortened time is desirable, however, as in rescue.

For piloted thrust control it may be stated that operation similar to that shown for the on-off automatic control has been found satisfactory. The pilot simply follows a suggested program shown on a display card.

#### Fuel Consumption

Fig. 10 a and 10 b show, respectively, some fuel consumption results that were obtained in studies with automatic and piloted terminal phase simulators (LINEBERRY [17] and KURBJUN [10]); the incremental velocity  $\Delta V$  that was actually required to make the rendezvous is used here as the measure of fuel consumed; however, a  $\Delta V$  increment of 100 fps corresponds to a mass or fuel consumption of about 1 percent. The circled points in Fig. 10 a apply to the procedure which calls for initial nulling of angular rate of the line of sight; the  $45^\circ$  line represents the minimum  $\Delta V$  possible by this method. The nearness of the points indicates that the system's performance was quite good. The squared points indicate the gains that can be realized by cancelling a large portion of the range rate as well as the transverse velocity during the preliminary maneuver; the lowest



value possible by this approach is indicated by a dashed line. As mentioned previously, time to rendezvous is increased by this procedure, as is expected.

Fig. 10b shows similar results as obtained in piloted studies; here, however, results are compared with the magnitude of the vector sum  $\Delta V_R$  of the initial range and transverse velocities (the absolute minimum  $\Delta V$  obtainable) instead of the sum of these two speeds as was used in Fig. 10a. The main point to note is that excellent performance capabilities are demonstrated by pilots. The fact that in some cases the average value of  $\Delta V$  is lower than the circled points is interesting, and indicates that there is an automatic tendency for pilots to cancel out a little range rate as well as transverse velocity in the preliminary maneuver.

#### Fuel-Time Trade Off and Fuel Minimization

Fig. 11 is typical of the results obtained by EGGLESTON [21] and HORNBY [22] in assessing, via an orbital mechanics approach scheme, how fuel consumption depends on the time to rendezvous. Two situations are depicted for the example problem indicated: one pertains to intercept rendezvous the other to soft rendezvous. The curve labeled  $\Delta V_1$  is for the intercept case, and indicates the variation with time of the magnitude of a single initial impulse that is required to put the ferry on an intercept course (the magnitude of course depends on the direction of thrust application). A pronounced minimum is noted to occur at a time designated by  $t_1$ . From the point of view of minimum fuel usage, EGGLESTON has termed this time as the optimum time to rendezvous.

The soft rendezvous case differs in that after following an intercept course a final impulse must be given to cancel all relative velocity; the magnitude of

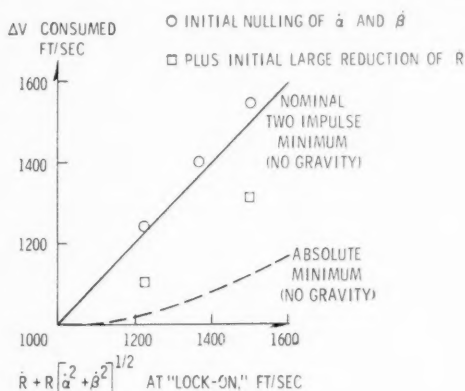


Fig. 10 a. Rendezvous fuel requirements. Automatic system

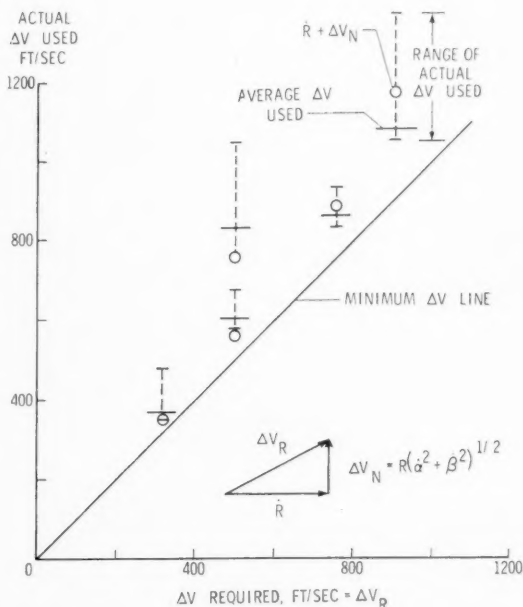


Fig. 10 b. Rendezvous fuel requirements. Piloted system

the impulse required is given by the curve labeled  $\Delta V_2$ . The total impulse used in the soft rendezvous case then is the sum of the  $\Delta V_1$  and  $\Delta V_2$  curves, or the solid curve in the figure. Here again a minimum is found, at a slightly larger

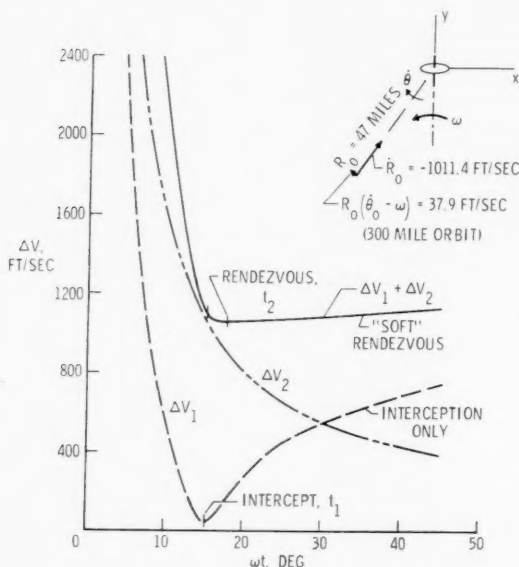


Fig. 11. Minimum fuel for rendezvous by orbital mechanics

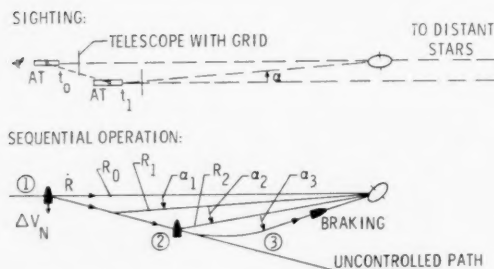


Fig. 12. Use of visual techniques in rendezvous

1. Orient vehicle with thrust axis in direction of  $\Delta V_N$
2. Measure  $\alpha_1$ ,  $t_1$ , and  $\alpha_2$ ,  $t_2$
3. Thrust to zero angular velocity and measure  $\alpha_3$ ,  $t_3$

$$\text{then } R_2 \alpha_3 = \frac{a t_3^2}{2} \quad \text{or} \quad R_2 = \frac{a t_3^2}{2 \alpha_3}$$

4. Using  $R \alpha = \Delta V_N t$ , from 2

$$R_1 \alpha_1 = \Delta V_N t_1 \quad \text{and} \quad R_2 \alpha_2 = \Delta V_N t_2$$

$$\text{thus } \frac{R_1}{R_2} = \left( \frac{a_2 t_1}{a_1 t_2} \right) \quad \text{or} \quad R_1 = \left( \frac{a_2 t_1}{a_1 t_2} \right) R_2$$

5. Then  $\dot{R} = \frac{R_2 - R_1}{t_2 - t_1}$

value of time than that for the intercept case, but in contrast to the intercept case, the curve is quite flat for times that go beyond the minimum point. The significant aspect brought out by the soft rendezvous case is that large impulse penalties are involved if rendezvous is attempted in times less than a value which leads to minimum fuel consumption, but that very little penalty is paid if greater times are used.

### III. Simplified Optical Schemes

To cut down on the complex hardware that may be required in terminal phase guidance, some thought has been given to the development of techniques requiring only simple instrumentation. Two schemes of interest are reviewed here.

LINEBERRY and KURBJUN [23] have explored a terminal phase sensing system which requires only a timer and a sighting scope. Fig. 12 illustrates the basic ideas of the system. In the top portion a simple scope with a grid to measure angular position is used in the ferry to sight the target vehicle and the distant star background. Thus with the scope fixed to a distant star the relative motion between the target and the ferry is immediately ascertained. Further, if the times required for the target to transverse several successive angular intervals are measured, then the range and range rate may be

deduced by the sequence itemized in the bottom portion of the figure. It is noted that only elementary geometrical relations are employed. Note also that the third time interval is a period of thrusting wherein all the angular rate of the line of sight is cancelled; this angular motion and direction is of course directly evident in the scope. Thus, with the range and range rate established the pilot is ready to go into his braking schedule. Any angular rate motion that creeps back in during braking can be cancelled because it is seen immediately through the scope. Simulator studies of this scheme have shown very good results.

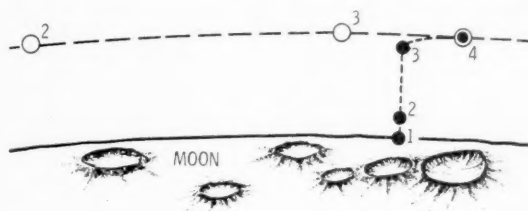


Fig. 13. Simplified lunar rendezvous  
(100,000 ft orbit)

- 1-2 Vertical thrust (33.3 sec)
- 2-3 Vertical coast (109 sec)
- 3-4 Horizontal thrust (117 sec)
- 4 Rendezvous

As another example of the use of simplified techniques, LINA and VOGLEY [24] have advanced an elementary plan for performing lunar rendezvous. The idea embodies a plumb bob, a timer, and a sighting on distance stars, and can be described with the aid of Fig. 13. At time 1, as indicated by a timer synchronized with the target, the ferry begins to thrust vertically; the vertical was established by a plumb bob and is held thereafter by sighting on a star vertically overhead. After thrusting and coasting, horizontal thrust of a predetermined duration begins at time 3 in a direction of a star fixed by an early sighting. At 4 rendezvous takes place. The proponents of this plan have also applied it in reserve, that is, in connection with a lunar landing from a lunar orbit. Their studies of the various errors involved indicate that the scheme is quite promising.

#### IV. Benefits or Potentialities of Rendezvous

The list of uses given in the Introduction is a fairly good indication in itself of the benefits that may be derived through use of rendezvous. Surely if man is to continue in his exploration of space, he will want to exploit as fully as possible all of these uses, for the advancement they offer and for their inherent achievement. It must be admitted, for example, that the successful transporting of a man to an orbiting space station, with later return, would be quite a significant and noteworthy scientific and engineering achievement. It is not too difficult to envision that such an operation may become quite routine in the future. The aspects of personnel and supply transfer, of rescue, and even of initial assembly of the space laboratory all depend on rendezvous.

But perhaps the greatest advantage offered by rendezvous is the flexibility it affords in designing space missions, that is, it relieves the growth problem which is basic to any launch vehicle. Should the payload desired exceed the capabilities of the launch vehicles, then rendezvous is a recourse. For many deep space missions, involving perhaps manned flight, rendezvous may prove invaluable.

But let us not get so far away from home in our thoughts to use rendezvous. Since man has set his sights on the moon, it is perhaps fitting to close the technical part of this paper by showing the benefits that rendezvous offers in a lunar exploration mission. Thus let us consider two schemes, each involving an exploration vehicle on the way to the moon (these exploration vehicles may be considered to be launched as complete units from the earth or to be assembled from basic units by rendezvous in earth orbit, although this consideration is immaterial to the following formulation). In one scheme the exploration vehicle is decelerated

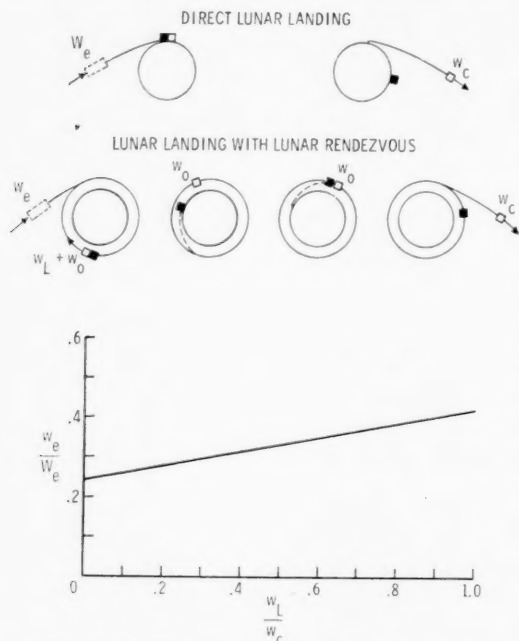


Fig. 14. Reduction of earth escape weight through use of lunar rendezvous

escape weight by the lunar rendezvous method, whereas  $W_c$  is the earth escape weight by the direct landing plan. The abscissa is the initial weight  $w_L$  of the lunar landing vehicle that is employed in the rendezvous scheme divided by the weight  $w_c$  of the vehicle that returns to earth; the weight  $w_c$  returned to earth is of course, assumed to be equal in both cases. The prime result brought out by the figure is that the weight of the outgoing exploration vehicle can be greatly reduced by using a lunar rendezvous technique. Specifically, for a value of  $w_L/w_c = 1$ , the results show that the weight of the earth escape payload for the lunar rendezvous scheme is less than one-half the escape payload weight by the direct landing plan. This reduction is, of course, a direct reflection of greatly reduced energy requirements brought about by leaving a sizable mass in lunar orbit. The specific reduction depends on the particular velocity increments and rocket performance characteristic used; the values used in this example are indicated in the appendix. Similar results are indicated, however, for other choices.

into a low-altitude circular orbit about the moon. From this orbit a lunar lander descends to the moon's surface, leaving the return vehicle in orbit. After exploration the lunar lander ascends and rendezvous with return vehicle. The return vehicle is then boosted into a return trajectory to the earth, leaving the lander behind. In the other scheme the exploration vehicle descends directly to the moon's surface with the return vehicle. Exploration is made, after which the return vehicle is surface launched back into a return trajectory. We wish to compare the size of the exploration vehicle going to the moon in both cases.

The two schemes are analyzed in the appendix of this paper and the basic results are given in Fig. 14. In the ordinate involving the ratio  $w_e/W_e$ ,  $w_e$  is the earth escape

### V. Concluding Remarks

The intent of this report has been to single out and discuss some of the advances that have been made in the understanding of the relatively newborn and promising concept of space rendezvous, and to perhaps add some new information. Attention has been focused on the main phases of rendezvous, and basic research results pertaining to launch timing, ascent and transfer trajectories, and to terminal guidance schemes have been discussed. Benefits were indicated and brought out by examples. Perhaps conspicuous is the lack of discussion on the docking phase. This is simply because the docking phase requires experiments to find out what the problems are, and also because it appears primarily to involve hardware items, which were not intended to be discussed in this paper. It may be remarked, however, that visual aids and schemes may play a very important role in this phase of rendezvous operation, and developments along this line would be quite appropriate.

Probably the most important conclusions to be made are: (a) that rendezvous appears technically feasible, (b) that both manned and automatic control are practical, (c) that by orbital assembly of units it offers a very flexible and versatile means for performing space missions, or making possible those which could not otherwise be made, and (d) that it should play a major role in future space missions, especially for manned space flight — it must be admitted, for example, that landing on the moon is, in reality, a rendezvous problem.

### Appendix

#### Use of Lunar Rendezvous

##### Basic Mass-Ratio Formula

In this section we derive a basic mass ratio formula that will be used throughout the subsequent analysis. Thus, consider the following payload-booster combination



where  $m_p$  represents payload mass,  $m$  booster mass,  $V$  vehicle velocity, and  $u$  the effective jet velocity. At the end of booster burnout the fundamental rocket equation indicates that

$$\frac{m_p + m_b}{m_p + \epsilon m_b} = e^{\Delta V/u} \quad (1)$$

where  $\epsilon m_b$  is the burnout mass of the booster,  $\epsilon$  is the ratio of the booster mass at burnout to the initial booster mass, and  $\Delta V$  is the ideal velocity increment due to booster burning (gravity effects, if present, are included in  $\Delta V$ ). The desired mass-ratio formula is found from this equation as

$$\frac{m_b}{m_p} = \frac{k - 1}{1 - \epsilon k} = r \quad (2)$$

where  $k = e^{\Delta V/u}$ . In terms of  $m_p$  the total initial mass is

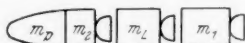
$$m_T = m_p + m_b = (1 + r) m_p = R m_p \quad (3)$$

Note, by eq. (2)

$$R = \frac{(1 - \epsilon) k}{1 - \epsilon k}$$

### Application to Lunar Rendezvous

Consider a lunar exploration mission. Let the vehicle which approaches the moon be represented as follows



and assume the operational sequence:

1. Decelerate the vehicle into a moon orbit by  $m_1$ ,  $\Delta V_1$  is the velocity change.
2. Descend to the moon by  $m_L$ , explore, ascend, and rendezvous with  $m_p$ ,  $m_2$ .
3. Boost  $m_p$  back to earth return by  $m_2$ ,  $\Delta V_2$  is the velocity change.

By application of eq. (2) and (3) it is found that the total earth escape mass approaching the moon is

$$m_e = R_1(R_2 m_p + m_L) \quad (4)$$

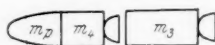
where

$$R_1 = \frac{(1 - \epsilon_1) k_1}{1 - \epsilon_1 k_1}; \quad k_1 = e^{\Delta V_1/u}$$

$$R_2 = \frac{(1 - \epsilon_2) k_2}{1 - \epsilon_2 k_2}; \quad k_2 = e^{\Delta V_2/u}$$

### Application to Direct Lunar Landing and Take-Off

In this case, consider that the vehicle approaching the moon is represented by



and that the subsequent sequence is:

1. Land on moon by means of  $m_3$ ,  $\Delta V_3$  is the ideal velocity increment.
2. From moon's surface launch  $m_p$  to earth return by  $m_4$ ;  $\Delta V_4$  is the ideal velocity increment.

Eq. (2) and (3) yield for this case the following total earth escape mass approaching the moon

$$M_e = R_3 R_4 m_p \quad (5)$$

where

$$R_3 = \frac{(1 - \epsilon_3) k_3}{1 - \epsilon_3 k_3}; \quad k_3 = e^{\Delta V_3/u}$$

$$R_4 = \frac{(1 - \epsilon_4) k_4}{1 - \epsilon_4 k_4}; \quad k_4 = e^{\Delta V_4/u}$$

### Comparison of the Two Schemes

Division of eq. (4) by eq. (5) yields the following ratio of the earth escape mass required for lunar landing when the lunar rendezvous scheme described is used to the earth escape mass required by a direct lunar landing scheme:

$$\frac{m_e}{M_e} = \frac{R_1}{R_3 R_4} \left( R_2 + \frac{m_L}{m_p} \right) \quad (6)$$

This equation was used to obtain the results shown in Fig. 14; a value  $u = 12,880$  fps ( $I_s = 400$ ) was used throughout and the following assumption for the  $\epsilon$ 's and the  $\Delta V$ 's were made:

$$\begin{array}{lll}
 \eta_1 = 0.1, & \Delta V_1 = 8,800 - 5,300 = 3,500 \text{ fps}; & R_1 = 1.36 \\
 \eta_2 = 0.1, & \Delta V_2 = 8,800 - 5,300 = 3,500 \text{ fps}; & R_2 = 1.36 \\
 \eta_3 = 0.15, & \Delta V_3 = 10,500 \text{ fps}; & R_3 = 2.91 \\
 \eta_4 = 0.1, & \Delta V_4 = 10,500 \text{ fps}; & R_4 = 2.63
 \end{array}$$

With these values eq. (6) becomes

$$\frac{m_e}{M_e} = 0.242 + 0.178 \frac{m_L}{m_p} \quad (7)$$

### References

1. J. C. HOUBOLT, Considerations of the Rendezvous Problems for Space Vehicles. Presented to the SAE National Aeronautical Meeting, New York, N.Y., April 5-8, 1960.
2. R. S. SWANSON, and N. V. PETERSEN, Summary Report of Rendezvous-Compatible-Orbits. Technical Memorandum of the Astro Sciences Group ASG-TM-61-10, January 1961.
3. J. D. BIRD, and D. F. THOMAS, JR., A Two-Impulse Plane for Performing Rendezvous on a Once-a-Day Basis. NASA TN D-437, 1960.
4. J. M. EGGLESTON, and H. D. BECK, A Study of the Positions and Velocities of a Space Station and a Ferry Vehicle During Rendezvous and Return. NASA TR R-87, 1960.
5. J. M. EGGLESTON, and R. S. DUNNING, Analytical Evaluation of a Method of Midcourse Guidance for Rendezvous with Earth Satellites. NASA TN D-883, 1961.
6. J. M. EGGLESTON, The Trajectories and Some Practical Guidance Considerations for Rendezvous and Return. IAS Paper no. 61-36, presented at the IAS 29th Annual Meeting, New York, January 23-25, 1961.
7. J. M. EGGLESTON, Comparison of Launch Conditions and Trajectories for Manned and Unmanned Ferry Vehicles. Unpublished NASA Langley Research Center Report, February 27-28, 1961.
8. W. WRIGLEY, Performance of a Linear Accelerometer. Mass. Inst. of Tech., Dept. of Aero. Engr., Orbital and Satellite Vehicles, Vol. 1, Notes for a Special Summer Program, Summer Session, Aug. 6-17, 1956, Ch. 9, pp. 9-1-9-14.
9. R. A. HORD, Relative Motion in the Terminal Phase of Interception of a Satellite or a Ballistic Missile. NASA TN 4399, 1958.
10. M. C. KURBJUN, R. F. BRISSSENDEN, E. C. FODRIAT, and B. B. BURTON, Pilot Control of Rendezvous. IAS Paper no. 61-37, presented at the IAS 29th Annual Meeting, New York, January 23-25, 1961.
11. R. F. BRISSSENDEN, B. B. BURTON, E. C. FODRIAT, and J. B. WHITTEN, Analog Simulation of a Pilot-Controlled Rendezvous. NASA TN D-747, 1961.
12. N. E. SEARS, JR., and P. G. FELLEMAN, Terminal Guidance for a Satellite Rendezvous. Presented at the ARS Controllable Satellite Conference, MIT, April-May 1959; ARS Preprint 778-59.
13. L. S. CICOLANI, Trajectory Control in Rendezvous Problems Using Proportional Navigation. NASA TN D-772, April 1961.
14. A. D. WHEELON, An Introduction to Midcourse and Terminal Guidance. JPL Report no. 145, June 1958.
15. W. H. CLOHESY, and R. S. WILTSHIRE, Terminal Guidance Systems for Satellite Rendezvous. IAS Paper no. 59-93, June 1959.
16. E. LEVIN, and J. WARD, Manned Control of Orbital Rendezvous. P-1834, the RAND Corporation, October 20, 1959.
17. T. M. CARNEY, and E. C. LINEBERRY, Automatic Terminal Guidance Logic for Rendezvous Vehicles. Unpublished NASA Langley Research Center Report, February 1961.
18. J. M. EGGLESTON, Optimum Time to Rendezvous. ARS Journal 30, no. 11 (1960).



19. L. W. SPRADLIN, The Long-Time Satellite Rendezvous Trajectory. Proceedings of the National Specialists Meeting on Guidance of Aerospace Vehicles, Boston, Mass., May 25-27, 1960.
20. H. HORNBY, Least Fuel, Least Energy and Salvo Rendezvous. Presented at the 15th Annual Spring Technical Conference, Cincinnati, Ohio, April 12 and 13, 1961.
21. J. M. EGGLESTON, Extensions of Optimum Time to Rendezvous Studies. Unpublished NASA Langley Research Center Report, February 1961.
22. H. HORNBY, Problems of Rendezvousing Space Vehicles and Application in the Manned Lunar Landing Mission. NASA Prospective Report, 1961.
23. E. C. LINEBERRY, and M. C. KURBJUN, A Preliminary Study of Manned Control of the Terminal Phase of Rendezvous Using Visual Techniques. Unpublished NASA Langley Research Center Report, February 21, 1961.
24. L. J. LINA, and A. W. VOGLEY, Preliminary Study of a Piloted Rendezvous Operation from the Lunar Surface to an Orbiting Space Vehicle. Unpublished NASA Langley Research Center Report, February 21, 1961.
25. R. H. BATTIN, and J. H. LANING, JR., A Recoverable Interplanetary Space Probe. Massachusetts Institute of Technology. Instrumentation Laboratory Report R-235, Vol. IV, Appendices 1959.
26. W. E. BRUNK, and R. J. FLAHERTY, Methods and Velocity Requirements for the Rendezvous of Satellites in Circumplanetary Orbits. NASA TN D-81, 1959.
27. W. H. CLOHESSY, and R. S. WILTSHIRE, Problems Associated with the Assembly of a Multiunit Satellite in Orbit. Presented at the ASME Aviation Conference, Los Angeles, March 1959, ASME Paper 59-AV-25.
28. R. CORNOG, Economics of Satellite Supply Vehicles. Presented at the Aviation Conference, Los Angeles, Calif., March 9-12, 1959, of the American Society of Mechanical Engineers, ASME Paper 59-AV-33.
29. W. W. DUKE, E. A. GOLDBERG, and I. PFEFFER, Error Analysis Consideration for a Satellite Rendezvous. ARS Preprint no. 1198-60, May 1960.
30. E. L. DRAIN, Terminal Guidance in Satellite Rendezvous. Thesis, Astronautical Engineer, University Michigan, May 1960 (AD 239807).
31. T. N. EDELBAUM, Preliminary Comparison of Air and Ground Launching of Satellite Rendezvous Vehicles. IAS Paper 61-10, New York, January 23-25, 1961.
32. K. A. EHRLICHE, Establishment of Large Satellites by Means of Small Orbital Carriers. Proc. IIIrd International Astronautical Congress, Stuttgart, 1952, pp. 111-145.
33. K. A. EHRLICHE, Ascent of Orbital Vehicles. Astronaut. Acta 2, 175-190 (1956).
34. T. B. GARBER, Ascent Guidance for a Satellite Rendezvous. Proceedings of the Manned Space Stations Symposium. Sponsored by the IAS, NASA, and the Rand Corp., Los Angeles, Calif., April 20-22, 1960.
35. K. W. GATLAND, Orbital Rockets - I. Some Preliminary Considerations. J. Brit. Interplan. Soc. 1951, 97-107.
36. E. HARRISON, Some Considerations of Guidance and Control Techniques for Coplanar Rendezvous. IAS National Specialists Meeting on Guidance of Aerospace Vehicles, May 25-27, 1960.
37. A. P. HARRY, and A. L. FRIEDLANDER, Exploratory Statistical Analysis of Planet Approach-Phase Guidance Schemes Using Range, Range-Rate, and Angular-Rate Measurement. NASA TN D-268, 1960.
38. L. J. KAMM, SATRAC: Satellite Automatic Terminal Rendezvous and Coupling. ARS Paper 1497-60, Washington, December 5-8, 1960.
39. O. C. KASTE, and D. NOVAK, Study of the Rendezvous Mission. Martin Company, MLV Tech. Note 13, 1960.
40. C. L. KELLER, Satellite Ascent Paths. Sperry Engr. Rev. December 1958, 2-14.
41. T. A. MAGNESS, J. B. MCGUIRE, and O. K. SMITH, Accuracy Requirements for Inter-Planetary Ballistic Trajectories. Proceedings of the IXth International Astronautical Congress, Amsterdam, 1958, Vol. I, pp. 286-306. Wien: Springer, 1959.

42. G. W. MORGENTHAUER, On Mid-Course Guidance in Satellite Interception. *Astronaut. Acta* **5**, 328-346 (1959).
43. C. J. MUNDO, JR., Trade-Off Considerations in the Design of Guidance Equipment for Space Flight. *Aero/Space Engineering*, June 1959, pp. 31-34.
44. M. L. NASON, Terminal Guidance Technique for Satellite Interception Utilizing a Constant Thrust Rocket Motor. *ARS Journal* **30**, no. 9 (1960).
45. M. L. NASON, Terminal Guidance and Rocket Fuel Requirements for Satellites. Presented at American Rocket Soc. Controllable Satellite Conference, MIT, April 30 - May 1, 1959, ARS paper 777-59.
46. A. W. NELSON, Manned Orbital Rendezvous. ARS Paper no. 1493-60, December 1960.
47. B. H. PAIEWONSKY, Transfer Between Vehicles in Circular Orbits. *Jet Propulsion* **1958**, 121.
48. A. L. PASSERA, Conditional-Switching Terminal Guidance (A Terminal Guidance Technique for Satellite Rendezvous). PGANE - IRE, December 1960.
49. R. E. ROBERSON, Gyroscopic Sensing of Satellite Yaw. Presented at the 1st Congress of the International Federation of Automatic Control, Moscow, June 1960.
50. E. ROBERSON, Path Control for Satellite Rendezvous. Presented at the Sixth Annual Meeting, American Astronautical Society, New York, January 1960.
51. H. G. SAFREN, Differential Correction Method of Interplanetary Navigation. Proceedings of the National Specialists Meeting on Guidance of Aerospace Vehicles, Boston, Mass., May 25-27, 1960.
52. A. J. SKALAFURIS, and D. H. SCHILLER, Midcourse Guidance Problem in Satellite Interception. *ARS Journal* **1960**, 41-46.
53. E. SIMON, A Proposed Control System to Facilitate the Terminal Stages of Manned Rendezvous. ARS Paper no. 1480-60, December 1960.
54. R. A. SMITH, Establishing Contact Between Orbiting Vehicles. *J. Brit. Interplan. Soc.* **1951**, 295-299.
55. P. W. SOULE, Rendezvous with Satellites in Elliptical Orbits of Low Eccentricity. AAS Preprint 60-71, Seattle, August 8-11, 1960.
56. K. S. STEFFAN, A Satellite Rendezvous Terminal Guidance System. ARS Preprint no. 1494-60, December 1960.
57. E. A. STENIHOFF, Orbital Rendezvous and Guidance. IAS Manned Space Stations Symposium, April 20-22, 1960.
58. R. J. WEBER, and W. M. PAUSON, Achieving Satellite Rendezvous. *ARS Journal (Tech. Notes)* **29**, 592-595 (1959).
59. C. H. WOLOWITZ, H. M. DRAKE, and E. N. VIDEAN, Simulator Investigation of Controls and Display Required for Terminal Phase of Coplanar Orbital Rendezvous. NASA TN D-511, 1960.

### Discussion

Mr. STERN: Do your different schemes and plans apply when the target satellite is not launched by the same organization? That is to say, suppose you don't know the orbit characteristics because it is not yours; can you determine the orbit of the satellite sufficiently well so that you could send up a rendezvous satellite? Then I would like to find out whether you have done any experimental tests to verify your calculations?

Mr. HOUBOLT: If the target satellite is orbital and you can observe it for one or more revolutions, there appears to be no major reason why you could not launch a rendezvous satellite, whether the target satellite is yours or someone else's. If the target satellite is in partial orbit, then we have essentially the problem of intercept and this was not intended to be treated here. The answer to your second question is no, we have not made an experiment.

# Interplanetary Trajectories for Electrically-Propelled Space Vehicles

By

W. E. Moeckel<sup>1</sup>

(With 4 Figures)

## Abstract — Zusammenfassung — Résumé

**Interplanetary Trajectories for Electrically-Propelled Space Vehicles.** Determination of the space-mission capabilities of electric-propulsion systems requires study of the trajectories followed by space vehicles during powered flight in gravitational fields. In the present paper, solutions to the equations of motion for such flights are discussed. Both constant- and variable-thrust acceleration are considered, and methods of matching prescribed end-point conditions are described. Particular attention is given to the problem of interplanetary transfer, for which the mass ratios needed with various thrust programs are compared.

For round-trip interplanetary missions, it is shown that large reductions in the total mission time can be achieved by following indirect heliocentric paths. For the Earth-Mars mission, it is found that electrically propelled vehicles can achieve total trip times comparable to those attainable with high-thrust rockets, with weights that may be considerably less than those possible with nuclear rockets.

**Interplanetare Bahnen für elektrisch angetriebene Raumfahrzeuge.** Die Ermittlung der Nutzlast von elektrisch angetriebenen Systemen erfordert zunächst die Bestimmung der Bahn des Fahrzeuges während der Antriebsperiode. In der vorliegenden Arbeit werden Lösungen der Bewegungsgleichungen für derartige Bahnen untersucht. Konstante und veränderliche Beschleunigung wird angenommen, und es werden Methoden beschrieben, um ein vorgegebenes Ziel zu erreichen.

Für interplanetare Fahrten kann die Gesamtzeit der Reise unter gewissen Umständen stark reduziert werden. Für die Erde-Mars-Fahrt zeigt sich, daß elektrisch angetriebene Fahrzeuge Reisezeiten in der Größenordnung der Reisezeit von Raketen mit hohem Schub erreichen können, wobei das Massenverhältnis wesentlich günstiger als bei Atomraketen ist.

**Trajectoires interplanétaires pour des véhicules spatiaux à propulsion électrique.** La détermination des missions spatiales pouvant être accomplies par des fusées à propulsion électrique nécessite l'étude des trajectoires suivies par les véhicules spatiaux durant des vols propulsés à travers des champs de gravitation. Dans cet article, sont discutées les solutions de l'équation de mouvement correspondant à ces vols. Dans les deux cas, d'une accélération constante et d'une accélération variable, l'auteur fournit des méthodes pour obtenir les conditions prescrites à l'arrivée. Une attention particulière est portée au problème des transferts interplanétaires, pour lesquels on compare les rapports de masse nécessaires, en fonction des diverses poussées envisagées.

Pour des missions interplanétaires aller et retour, il est montré que de grandes réductions de temps peuvent être obtenues au moyen de trajectoires indirectes autour

<sup>1</sup> Chief, Electromagnetic Propulsion Division, National Aeronautics and Space Administration, Lewis Research Center, Cleveland 35, Ohio, U.S.A.

du soleil. Pour la mission Terre-Mars, l'auteur trouve qu'un engin à propulsion électrique peut faire le voyage complet dans un temps comparable à celui obtenu par une fusée à forte poussée, alors que le poids d'une fusée à propulsion électrique peut être considérablement moindre que celui d'une fusée nucléaire.

## I. Introduction

During the past few years, a large number of studies have been published on the trajectories followed by space vehicles during powered flight. Most of these studies have been motivated by the need for determining the mission capabilities of space vehicles propelled by low-thrust propulsion systems such as electric rockets. The results of these studies are of use, however, for all propulsion systems that operate with ratios of thrust to weight less than unity, as well as for evaluating the effect of other external forces on the motion of the vehicle. Some of the methods of solution of the equations of motion may be of interest in other fields of science in which the primary force is inversely proportional to the square of the distance.

The present paper, however, like most of the others, is concerned primarily with the trajectories followed by space vehicles propelled by electric rockets. It is further restricted to a discussion of those methods which are particularly useful for preliminary studies of one-way and round-trip interplanetary missions. For such studies, a succession of central gravitational fields is assumed (planet-sun-planet), with thirdbody effects and other perturbations ignored. It is usually assumed that the planetary orbits are circular. These assumptions are justified on the grounds that the major energy changes involved in the actual mission are included in this simplified model.

As is well-known, the ascent from a low orbit about a planet to escape velocity, and the descent from escape velocity to a low planetary orbit are achieved in a nearly-optimum manner by application of constant thrust, directed parallel to the velocity (tangential thrust). Charts are available [1] for calculating the required trajectory parameters for these phases of the mission. For the Earth-planet orbit transfer phases, however, constant tangential thrust is not the most efficient or desirable thrust programming, and many possible alternatives have been investigated. For the one-way trip, an optimization procedure was developed in [2], whereby the time history of the magnitude and direction of the thrust vector could be calculated along the path that produced least mass consumption for a given transfer time. This solution, while providing an excellent reference point for comparison with other programs, has the disadvantage that very large variations in thrust magnitude and specific impulses are required. Such large variations may be difficult to achieve in practice, particularly at the constant jet power level assumed, since efficiency of an electric rocket is a strong function of specific impulse. Consequently, it is pertinent to examine other more realistic thrust programs for interplanetary orbit transfer to determine whether the propellant required is significantly greater than the best possible. Such studies have recently been carried out in [3], where a variational procedure is evolved for optimizing the interorbital transfer using trajectory segments for which the thrust magnitude is constant, but the thrust angle is variable. These segments are joined by zero-thrust matching paths.

For round-trip missions, no optimum programming has as yet been developed. The problem is much more complex than the one-way mission, in that a double planetary rendezvous must be considered. If mission time were not a significant factor, this consideration would not add appreciably to the complexity, since

optimum one-way transfers could be used to and from the destination, with waiting time at the destination as an arbitrary parameter to effect the return rendezvous. However, to reduce the total mission time, it is necessary, with low acceleration as well as high acceleration, to follow indirect Earth-planet paths [4]. These indirect paths introduce a number of additional variables that make absolute optimization of the entire round-trip trajectory a very tedious undertaking. In lieu of complete optimization, however, it is possible to choose a particular simple family of trajectories, for which it is easy to vary trip times, transit angle, and perihelion or aphelion distance, and to use combinations of this family that minimize the initial weight for a given total trip time. This procedure, which was introduced and evaluated in [4], enables one to undertake extensive preliminary analyses of round-trip interplanetary missions with a facility almost comparable to that possible with high-thrust trajectories. Since such an analysis yields results that are not necessarily near optimum, a proponent of electric propulsion has the satisfaction of stating that it should be possible to do even better than this with further studies.

## II. Equations of Motion and Mass Ratio

The equations of motion of a vehicle propelled by thrust force  $F$  in a central gravitational field are:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{\mu}{r^2} = \frac{F}{m} \sin \delta \quad (1)$$

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \equiv \frac{1}{r} \frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} = \frac{F}{m} \cos \delta \quad (2)$$

where

- $r$  radial coordinate
- $\theta$  angular coordinate (true anomaly)
- $\mu$  gravitational constant of field-producing body (GM)
- $F$  thrust
- $m$  mass
- $\delta$  angle between thrust vector and normal to radius vector
- $t$  time

If these equations are nondimensionalized in terms of the radius  $r_0$ , gravitational acceleration  $g_0$ , and circular velocity  $v_{c0}$ , at some reference orbit, they become:

$$\varrho'' - \varrho\theta'^2 + \varrho^{-2} = a \sin \delta \quad (3)$$

$$\varrho\theta'' + 2\varrho'\theta' \equiv \frac{1}{\varrho} \frac{d(\varrho^2\theta')}{d\tau} = a \cos \delta \quad (4)$$

where

$$\varrho = \frac{r}{r_0}, \quad \tau = \frac{v_{c0}t}{r_0}, \quad a = \frac{F}{m g_0}$$

and where primes indicate derivatives with respect to  $\tau$ . The nondimensional velocity is  $V = v/v_{c0}$ , and the radial and circumferential velocity components are

$$V_r \equiv \frac{v_r}{v_{c0}} = \varrho' \quad \text{and} \quad V_\theta \equiv \frac{v_\theta}{v_{c0}} = \varrho\theta' \quad (5)$$

Other parameters of importance for powered trajectory studies are the dimensionless angular momentum  $H$ , total energy  $E$ , eccentricity  $\epsilon$ , and semimajor axis  $A$ . These are given by

$$H \equiv \frac{r v_\theta}{r_0 v_{c0}} = \varrho V_\theta = \varrho^2 \theta' \quad (6)$$

$$E = \frac{1}{v_{c0}^2} \left( \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \right) = \frac{V^2}{2} - \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{2} [\varrho'^2 + \varrho^2 \theta'^2] - \frac{1}{\varrho} \quad (7)$$

$$\varepsilon = (1 + 2 E H^2)^{1/2} \quad (8)$$

$$A = -\frac{1}{2 E} \quad (9)$$

From eqs. (3), (4), (6), and (7), the time derivatives of  $H$  and  $E$  can be written [5]

$$H' = a \varrho \cos \delta \quad (10)$$

$$E' = a [\varrho' \sin \delta + \varrho \theta' \cos \delta] \quad (11)$$

From eqs. (10) and (11), the following statements can be made regarding the direction of the thrust vector  $\delta$ :

(1) Circumferential thrust ( $\delta = 0$ ) maximizes the rate of change of angular momentum.

(2) Radial thrust ( $\delta = \pi/2$ ) maintains constant angular momentum.

(3) Tangential thrust (thrust parallel to the velocity vector,  $\tan \delta = \varrho'/\varrho \theta'$ ) maximizes the rate of change of  $E$ .

(4) Thrust normal to the velocity vector ( $\tan \delta = -\varrho \theta'/\varrho'$ ) maintains constant energy.

Mathematically, the simplest assumption regarding the magnitude of the thrust vector (as distinguished from the direction) is that it varies in such a manner that the thrust acceleration  $a$  is constant. This, in turn, implies that the thrust decreases as the mass  $m$  is consumed.

Slightly more complicated equations of motion are obtained if the thrust magnitude (rather the thrust acceleration) is assumed to be constant. In this case, the mass  $m$ , in eqs. (3) and (4), is given by [1]:

$$m = m_0 - \frac{F t}{v_j} = m_0 \left( 1 - \frac{a_0 \tau}{V_j} \right) \quad (12)$$

where  $a_0 = F_0/m_0 g_0$ ,  $v_j$  is jet velocity, and  $V_j = v/v_{c0}$ . The thrust acceleration,  $a$ , is then

$$a = \frac{a_0}{1 - \frac{a_0 \tau}{V_j}} \quad (13)$$

Obviously, solutions for the case  $a = \text{constant}$  are obtained as a special case ( $V_j = \infty$ ) of the solutions for constant thrust magnitude. (A slightly more general case, in which mass other than propellant is utilized and continuously ejected during the powered flight, is considered in [1] and [4].)

An excellent survey of the methods used by various authors to solve the equations of motion for the preceding special cases and the results of these methods, is contained in [5]. For interplanetary missions, the constant tangential thrust (or thrust acceleration) is the most useful of these special cases, since some phases of such a mission require simply that escape velocity, or a specified hyperbolic excess velocity, be attained, as economically as possible, relative to the central body. With constant thrust or acceleration, the least propellant mass is consumed when these energies are attained in the least possible time.

For the Earth-planet transfer phase of an interplanetary mission, however, it is necessary to achieve a specified end-point velocity vector. For this program, none of the above special cases, or combinations thereof, are likely to produce the most economical transfer path. It is shown in [2], in fact, that the most economical path for such a transfer involves large variations in thrust magnitude and direction. The mass-ratio equation for such variable-thrust programs is somewhat more complex than eq. (12). For arbitrary thrust programs (but constant jet power), this equation is obtained as follows [2]. The jet power,  $P_j$ , is given by

$$P_j = \frac{1}{2} \dot{m} v_j^2 = \frac{1}{2} F v_j = \text{constant} \quad (14)$$

and the mass decrement is

$$dm = -\frac{F dt}{v_j} = -\frac{F^2}{F v_j} dt = -\frac{m^2 a^2 g_0^2}{2 P_j} dt \quad (15)$$

Integration of (15) yields:

$$\frac{1}{m_0} - \frac{1}{m_1} = -\frac{g_0^2}{2 P_j} \int_0^{t_1} a^2 dt$$

or

$$\frac{m_1}{m_0} = \left[ 1 + \frac{m_0 g_0 v_{c0}}{2 P_j} \gamma \right]^{-1} = \left[ 1 + \frac{\gamma}{a_0 V_{j0}} \right]^{-1} \quad (16)$$

where

$$\gamma = \int_0^{\tau_1} a^2 d\tau \quad (17)$$

This integral,  $\gamma$ , of the square of the nondimensional acceleration determines the mass ratio, and should be minimized as much as possible for each mission.

For the case of constant thrust acceleration ( $a = a_0$ ), the mass-ratio eq. (16) becomes:

$$\frac{m_1}{m_0} = \left( 1 + \frac{a_0 \tau_1}{V_{j0}} \right)^{-1} \quad (18)$$

which also is somewhat different from the equation for constant thrust magnitude [eq. (12)]. For mission phases employing constant thrust acceleration or thrust magnitude, the quantity  $a_0 \tau$ , which is the dimensionless total impulse, must be determined. For more general thrust programming, the quantity  $\gamma$  must be obtained.

A particular family of variable-thrust trajectories which yield a simple expression for the mass-ratio parameter,  $\gamma$ , required for transfer between circular orbits has recently been studied by the author [4]. The assumption was made that  $\theta' = \varrho^{-3/2}$  at all points on the trajectory. This assumption implies that the circumferential component of the velocity vector is equal to the local circular velocity at all times. The equations of motion (3) and (4) then assume the particularly simple form

$$\varrho'' = a \sin \delta \quad (19)$$

$$\frac{1}{2} \varrho^{-3/2} \varrho' = a \cos \delta \quad (20)$$



and the expression for  $\gamma$  becomes

$$\gamma = \int_0^{\tau_1} \left[ (\varrho'')^2 + \frac{1}{4} \varrho^{-3} (\varrho')^2 \right] d\tau \quad (21)$$

Although the assumption  $\theta' = \varrho^{-3/2}$  defines the relation between the two independent variables  $\theta$  and  $\varrho$ , it still permits arbitrary variations of  $\varrho$  as a function of time. For transfer between two circular orbits, an expression for  $\varrho$  must be used that satisfies the following boundary conditions:

$$\begin{aligned} \text{At } \tau = 0: & \quad \varrho = 1, \quad \varrho' = 0 \\ \text{At } \tau = \tau_1: & \quad \varrho = \varrho_1, \quad \varrho' = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

The simplest expression that satisfies these conditions is

$$\varrho = 1 + (\varrho_1 - 1) \left( \frac{\tau}{\tau_1} \right)^2 \left( 3 - 2 \frac{\tau}{\tau_1} \right) \quad (23)$$

Denoting  $\tau/\tau_1$  by  $\xi$ , the expressions for  $\varrho$  and its derivatives are

$$\varrho = 1 + (\varrho_1 - 1) \xi^2 (3 - 2\xi) \quad (24)$$

$$\varrho' = \frac{6(\varrho_1 - 1)}{\tau_1} \xi (1 - \xi) \quad (25)$$

$$\varrho'' = \frac{6(\varrho_1 - 1)}{\tau_1^2} (1 - 2\xi) \quad (26)$$

Substitution of eqs. (24) to (26) into (21) yields:

$$\gamma = \frac{3(\varrho_1 - 1)^2}{\tau_1} \left[ \frac{4}{\tau_1^2} + 3F(\varrho_1) \right] \quad (27)$$

where

$$F(\varrho_1) = \int_0^1 \frac{\xi^2 (1 - \xi)^2 d\xi}{[1 + (\varrho_1 - 1) \xi^2 (3 - 2\xi)]^3} \quad (28)$$

Other expressions for  $\varrho$  as function of time may be found to satisfy boundary conditions for problems other than transfer between circular orbits.

In undertaking mission studies, it is also necessary to know the angular distance,  $\theta_1$ , travelled during the transfer. For the  $\theta' = \varrho^{-3/2}$  family of trajectories,

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \int_0^{\tau_1} \varrho^{-3/2} d\tau \\ &= \tau_1 \int_0^1 \varrho^{-3/2} d\xi \end{aligned} \quad (29)$$

Evaluation of the integrals in eqs. (28) and (29) showed that, for considerable ranges of  $\varrho_1$ , excellent approximate expressions for  $\gamma$  and  $\theta$  are

$$\gamma = \frac{3(\varrho_1 - 1)^2}{\tau_1} \left[ \frac{4}{\tau_1^2} + 0.10 \varrho_1^{-3/2} \right] \quad (30)$$

$$\theta_1 = \tau_1 \varrho_1^{-3/4} \text{ radians} \quad (31)$$

In [4], eq. (30) is shown to be valid to very good approximation for  $0.1 < \varrho_1 < 20$ , while eq. (31) is very good for  $0.3 < \varrho_1 < 3.0$ . These ranges of validity are more than adequate for use in evaluating Earth-Mars or Earth-Venus transfers. This

family of trajectories, although not necessarily optimum, is particularly useful for analyzing round-trip missions for which it is necessary to follow indirect interplanetary paths if moderate mission times are desired. Such indirect paths are made up of two transfers between circular orbits, the first to an arbitrary radius,  $\varrho_a$ , inside or outside of the destination orbit, and the second from  $\varrho_a$  to the destination radius,  $\varrho_c$ . If a portion,  $K$ , of the total transfer time  $\tau_c$  is allotted to the first transfer segment, the value of  $\gamma$  for the entire indirect transfer becomes:

$$\gamma = \frac{3(1-\varrho_a)^2}{K\tau_c} \left[ \left( \frac{2}{K\tau_c} \right)^2 + 0.10 \varrho_a^{-3/2} \right] + \frac{3(\varrho_c - \varrho_a)^2}{(1-K)\tau_c} \left[ \left( \frac{2}{(1-K)\tau_c} \right)^2 + 0.10 (\varrho_a \varrho_c)^{-3/2} \right] \quad (32)$$

As shown in [4], the value of  $K$  that minimizes  $\gamma$  for gives values of  $\varrho_a$ ,  $\varrho_c$  and  $\tau_c$  is given to good approximation by:

$$\frac{1-K}{K} = A^{1/2} \quad (33)$$

where

$$A = \left| \frac{\varrho_c - \varrho_a}{1 - \varrho_a} \right| \quad (34)$$

The resulting minimum value of  $\gamma$  for the indirect transfer is then

$$\gamma = \tau_c^{-3} f_1(\varrho_c, \varrho_a) + \tau_c^{-1} f_2(\varrho_c, \varrho_a) \quad (35)$$

where

$$f_1(\varrho_c, \varrho_a) = 12(1 - \varrho_a)^2 (1 + \sqrt{A})^4 \quad (36)$$

$$f_2(\varrho_c, \varrho_a) = 0.30 (1 - \varrho_a)^2 (\varrho_a)^{-3/2} (1 + \sqrt{A}) \left[ 1 + \left( \frac{A}{\varrho_c} \right)^{3/2} \right] \quad (37)$$

The angular distance,  $\theta$ , for the indirect trip becomes

$$\frac{\theta}{\tau_c} = \frac{1 + \varrho_c^{-3/4} \sqrt{A}}{\varrho_a^{3/4} (1 + \sqrt{A})} \quad (38)$$

Even more useful for interplanetary round-trip mission studies is the lead angle,  $\varphi$ , acquired during the transfer by the vehicle relative to the initial planet (Earth). Any lead angle acquired during the transfer to the destination planet (and during the time spent in the vicinity of that planet), must be reduced to zero or augmented to  $2\pi$  on the return trip if the rendezvous with the initial planet is to be achieved. The lead angle for the transit is

$$\varphi = \theta - \frac{v_{c,E}}{r_E} t_c \quad (39)$$

where  $v_{c,E}$  and  $r_E$  are the orbital speed and radius of the Earth. With curves of  $\varphi/t_c$  as functions of  $\varrho_a$  for a given Earth-planet radius ratio  $\varrho_c$ , the intermediate radius  $\varrho_a$  required for the return trip can be determined when the outward trip and waiting times are specified. The required relation is

$$\varphi_{\text{return}} = 2n\pi - \varphi_{\text{out}} - \varphi_{\text{wait}} \quad (40)$$

For fast round trips, the case  $n = 0$  is of most interest.

Several methods have been used to serve as a guide in determining the thrust programming required to satisfy the end-point condition for interplanetary transfer. One of these, due to RODRIGUIZ [6], is a plot of energy as functions

of angular momentum. Shown in Fig. 1 are the paths in an  $E - H$  coordinate system of several of the special thrust programs discussed in this section. This figure shows that, in addition to the variable-thrust programs, the interplanetary transfer phase of a mission can be accomplished by combinations of segments

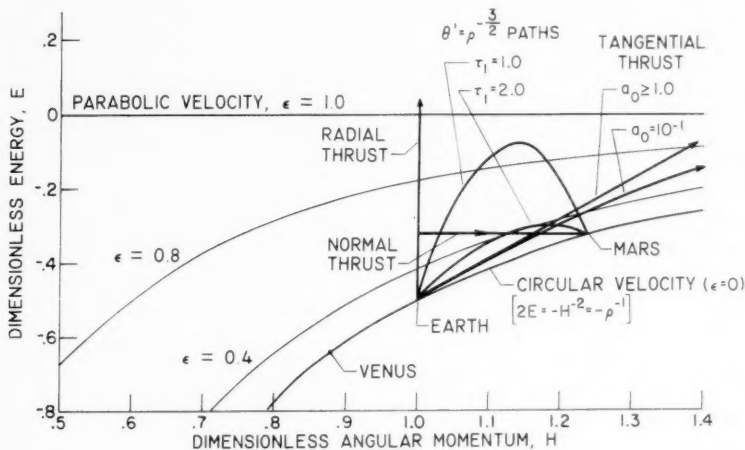


Fig. 1.  $E - H$  diagram for several thrust programs

of constant thrust (tangential, radial, or normal). Since any point on the  $E - H$  plot corresponds to a particular zero-thrust coasting trajectory, it is possible to match the powered segments with an appropriate unpowered segment. Such plots, of course, yield no information on the efficiency of the particular thrust programs.

### III. Applications and Results

Among the many missions for which electric-propulsion systems appear very promising, for reducing initial weight requirements, are interplanetary space probes and, eventually, manned expeditions to the near planets. Such missions can generally be divided into seven phases: (1) Earth escape, (2) Earth-planet transfer, (3) descent to planetary orbit (or surface), (4) waiting or exploration period, (5) escape from planet, (6) planet-Earth transfer, and (7) descent to Earth orbit or surface. For one-way interplanetary probes, only the first two or three of these phases need be considered, while for round-trip missions, all must be included. With high-thrust propulsion systems, only phases (1), (3), (5), and (7) involve propulsion periods, while with low-thrust systems, all phases except phase (4) may involve continuous propulsion. Phases (1), (3), (5), and (7) are best accomplished with constant tangential thrust, and can be analyzed with the aid of charts such as those of [1]. For phases (2) and (6), any of the available methods of calculating transfers between circular orbits can be considered, although only the method of [4] is so far available for indirect paths such as those needed for fast round-trip missions.

To illustrate the procedures and results of powered-flight trajectory studies, two rather specific missions will be considered: (1) a one-way Mars probe, and (2) a round-trip manned Mars expedition.

### 1. One-Way Mars Probe Mission

During the present decade, it may become feasible to perform this mission with electric-propulsion systems now entering the development stage. Some preliminary weight and performance estimates for such systems are available. It is contemplated that the so-called SNAP-8 nuclear turboelectric system will produce about 60 kilowatts of electric power with a total weight that may be in the vicinity of 3000 pounds. A space-probe vehicle weighing about 9000 pounds could be launched into a low orbit (about 400 miles) around the Earth by an Atlas-Centaur rocket. Using these figures, we can estimate the weight that can be delivered into a low orbit around Mars as function of the total trip time.

The procedure consists of first calculating the mass ratio as a function of escape time for the Earth-escape phase (phase 1). For this purpose it is necessary to calculate  $a_0$  and  $V_j$  as a function of escape time so that  $(a_0 \tau)$  can be obtained from the charts of [1]. If the ratio of thrust to initial weight  $F/W_i$  is denoted by  $a_{00}$ , eq. (14) yields:

$$a_{00} = \frac{F}{W_i} = \frac{45.9}{I} \frac{P_j}{W_i} = \frac{45.9}{I} \frac{\eta P_E}{W_i} \quad (41)$$

where power is expressed in kilowatts, specific impulse  $I$  in seconds, and weight in pounds. The factor  $\eta$  is the efficiency of conversion of electric power  $P_E$  to jet power. This efficiency is a strong function of the type of electric thrust unit used and of the specific impulse  $I$ . For an ion rocket of the electron-bombardment type, [7] indicates that the following variation of efficiency with specific impulse should be attainable with little additional development:

$I$	1000	1500	2000	2500	3000	4000	5000	6000
$\eta$	0.165	0.31	0.45	0.55	0.64	0.76	0.83	0.86

These values are somewhat higher than have presently been attained, but are probably lower than can eventually be achieved, particularly for the higher values of specific impulse.

The initial thrust acceleration for phase (1) is

$$a_{01} = \frac{F}{m_i g_1} = a_{00} \frac{g_{00}}{g_1} \quad (42)$$

where  $g_{00}$  and  $g_1$  are the gravitational accelerations on the Earth's surface and in the initial Earth orbit, respectively. The dimensionless jet velocity is

$$V_{j1} = \frac{g_{00} I}{v_{c1}} \quad (43)$$

With  $a_{01}$  and  $V_{j1}$  known, the value of  $(a_0 \tau)$  required to reach escape conditions is found from [1]. For the range of specific impulses shown in the above table, values of  $(a_0 \tau)$  between 0.66 and 0.87 are obtained. The escape time is then found from

$$t_1 = \frac{(a_0 \tau)_1}{a_{01}} \frac{r_1}{v_{c1}} \quad (44)$$

and the mass ratio for phase (1) is

$$\frac{m_1}{m_0} = 1 - \frac{(a_0 \tau)_1}{V_{j1}} \quad (45)$$

For an initial orbit at  $r_1 = 4360$  miles,  $v_{c1} = 4.69$  miles/second, and  $g_1 = 26.6$  feet/second<sup>2</sup>, these equations become

$$a_{01} = 45.9 \left( \frac{60}{9000} \right) \left( \frac{\eta}{I} \right) \quad (46)$$

$$V_{j1} = 1.3 \times 10^{-3} I \quad (47)$$

$$t_1 = 0.0107 \frac{(a_0 \tau)_1}{a_{01}}, \quad \text{days} \quad (48)$$

Variations of the parameter  $I$  then permit calculation of mass at the end of phase (1) as a function of escape time  $t_1$ .

Using several selected values of  $t_1$ , the mass at the end of phase (2) is now calculated as functions of  $t_2$ , the Earth-Mars transfer time. The calculation varies, depending on the thrust programming assumed for this phase. If the variable-thrust transfers of [2] or [4] are used, eq. (16) yields the mass ratio. However, this equation is obtained under the assumption that the jet power (and hence the efficiency) is constant, even though large variations in specific impulse are required. To be conservative, the constant jet power can be taken as the smallest value attained during the transfer. Eq. (16) then becomes

$$\frac{m_2}{m_1} = \left[ 1 + \frac{m_1 g_2 v_{c2} \gamma_2}{0.28 \eta P_E} \right]^{-1} \quad (49)$$

where  $g_2$  and  $v_{c2}$  are the heliocentric gravitational acceleration and orbital velocity at the Earth's orbit (0.0196 ft/sec<sup>2</sup>, and 18.5 miles/sec, respectively). Curves of  $m_2$  as functions of  $(t_1 + t_2)$  can now be plotted for each of the selected values of  $t_1$ . The envelope of these curves yields the largest values of  $m_2$  attainable as a function of  $(t_1 + t_2)$ . Several points on the envelope can now be selected as initial conditions for phase (3), the descent to a low orbit around Mars. The procedure is similar if other phase (2) thrust programs are used, such as the combination of constant thrust and coast segments of [3], except that the appropriate form of the mass-ratio equation may differ.

For phase (3), the expressions for  $a_{03}$ ,  $V_{j3}$ , and  $t_3$  are:

$$a_{03} = \frac{F}{m_3 g_3} = a_{00} \frac{m_i g_{00}}{m_3 g_3} \quad (50)$$

$$V_{j3} = \frac{g_{00} I}{v_{c3}} \quad (51)$$

$$t_3 = \frac{(a_0 \tau)_3}{a_{03}} \frac{r_3}{v_{c3}} \quad (52)$$

Since the appropriate value of  $a_0$  for descent phases is the value attained when the final orbit is reached, the final mass  $m_3$  appears in eq. (50). Although this mass is not initially known, little difficulty is encountered in practice, because  $(a_0 \tau)$  is quite insensitive to moderate variations in  $a_0$ . Consequently,  $a_{03}$  can be estimated sufficiently closely to determine  $(a_0 \tau)$ , which, together with  $V_{j3}$ , yields the final mass  $m_3$ .

The problem of finding the final mass as a function of total trip time is essentially completed when curves of  $m_3$  are plotted as functions of  $(t_1 + t_2 + t_3)$  for several initial values of  $(t_1 + t_2)$ . The envelope of such curves then yields the maximum value of  $m_3$  attainable as function of trip time, as well as the optimum distribution between  $t_1$ ,  $t_2$ , and  $t_3$ . Results of such an analysis are shown in Fig. 2 for three types of phase (2) trajectory programming. The highest mass ratio

was obtained with the variable thrust optimum programming of [2]. Net payloads, in addition to electric power supply, are obtained for trip times greater than 240 days. Considerably longer trip times are required, for the same mass ratio, using the optimized constant-thrust programming of [3]. In this programming, the direction of the thrust vector, but not its magnitude, varies

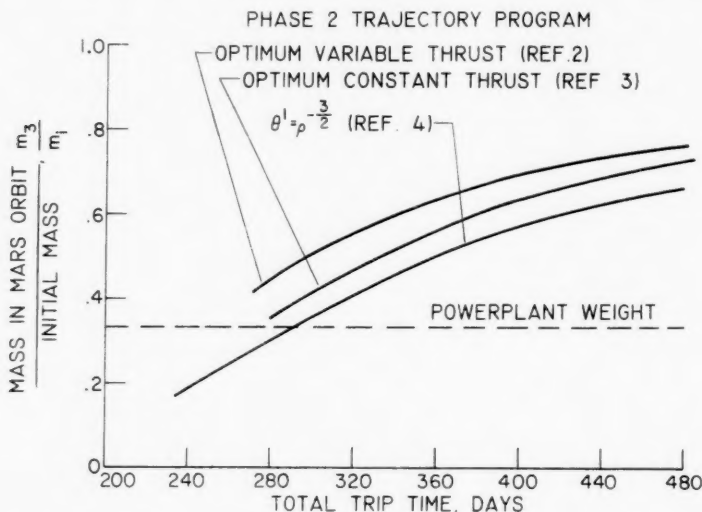


Fig. 2. Weight ratio for Mars probe mission. Initial weight, 9000 lbs; electric power, 60 KW

continuously during powered portions of the flight, and a coasting period is inserted between the powered segments. The duration of the coasting period was also optimized. The authors of [3] found, in addition, that the mass ratio obtained with the variable-direction programming could be very closely duplicated by using powered-flight segments in which the direction of the thrust vector, as well as its magnitude, was fixed. For this programming, the best thrust angles, relative to the velocity vector, were in the range  $+20^\circ$  to  $60^\circ$  during departure from the Earth's orbit, and  $-20^\circ$  to  $-60^\circ$  on approach to the Mars orbit.

The lowest of the three mass-ratio curves is obtained with the  $\theta' = q^{-3/2}$  trajectories. This family is therefore of little use for one-way interplanetary missions. This result indicates also that the weight ratios obtained for round-trip missions in the following section using  $\theta' = q^{-3/2}$  trajectories may be pessimistic, and that considerable future improvement is to be expected in the weight ratios as functions of trip time using electric-propulsion systems.

## 2. Round-Trip Mars Mission

Round-trip Mars missions using electric-propulsion systems have been analyzed as functions of total trip time only for the  $\theta' = q^{-3/2}$  family of transfer trajectories. The procedure, which is described in detail in [4], is similar to that used for one-way missions, except that more optimization processes are required because of the additional phases of the mission. In addition, since round-trip missions are primarily of interest for manned expeditions, the reduction in supplies due to consumption en route and the abandonment of exploration

equipment at Mars should be considered. These features of manned missions are included in [4], but will be omitted in the present paper.

Table I shows the near-optimum breakdown of times required for the phases of a round-trip Mars mission for various total round-trip times. These results were obtained for a value of  $t_w = 50$  days, where  $t_w$  is the time spent in the

Table I. *Near-Optimum Parameters for Earth-Mars Round Trips for  $t_w = 50$  Days Using  $\theta' = 2^{-3/2}$  Trajectories*

Total trip time, days	$t_1$	$t'$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$\Gamma_2$ , kw/lb	$\Gamma_9$ , kw/lb	$q_{a,6}$
300	10	275	64	15	25	10	161	15	0.100	0.170	0.58
350	15	320	81				189	15	0.050	0.100	0.60
400	15	370	98				222	15	0.0315	0.063	0.61
450	20	410	110				250	20	0.023	0.044	0.62
500	25	455	122				283	20	0.0165	0.031	0.62
550	30	495	130				315	25	0.0132	0.0235	0.625
600	35	540	148				342	25	0.0095	0.0185	0.63
700	50	620	160				410	30	0.0060	0.0124	0.63
800	70	700	190				460	30	0.0043	0.0090	0.63

vicinity of Mars, and includes phases (3), (4), and (5) of the mission. The time  $t'$  in Table I is the round-trip time excluding escape from and descent to the Earth [phases (1) and (7)]. The  $\Gamma$ 's of Table I are given by

$$\Gamma = \frac{v_{c0}}{0.28} \frac{g_0}{g_{00}} \gamma, \quad \frac{\text{kw}}{\text{lb}} \quad (53)$$

which, for the Earth-Mars transfer, is

$$\Gamma = 0.04 \gamma \quad \frac{\text{kw}}{\text{lb}} \quad (54)$$

The mass ratio equation, in terms of  $\Gamma$ , is [from eqs. (53) and (16)]:

$$\frac{m_2}{m_1} = \left( 1 + \frac{m_1}{m_i} \frac{\alpha}{\beta} \Gamma \right)^{-1} \quad (55)$$

where  $\alpha$  is the specific powerplant weight (powerplant weight per kw of jet power), and  $\beta$  is the ratio of powerplant weight to initial total vehicle weight.

A typical round-trip trajectory is shown in Fig. 3. It was found in [4] that best results were obtained if one of the Earth-planet transfers was direct and the other indirect. For the 500-day trip shown in Fig. 3, the outward trip is the direct one. On the indirect return trip, the trajectory passes inside the Venus orbit. The minimum radius on the return trip  $q_{a,6}$  was found to be rather insensitive to total mission time, as shown in Table I. Also shown in Fig. 3 is the optimum breakdown of the 500-day trip time with 25-day waiting period for a vehicle propelled by high-thrust rockets [4].

Shown in Fig. 4 are the ratios of initial mass of the space vehicle (the mass launched into orbit around the Earth) to the payload mass (not including electric powerplant) returned to Earth as functions of total mission time for several values of specific powerplant weight  $\alpha$ . A value of  $\beta$  of 0.2 was assumed for these calculations. This value is near optimum for this mission.



The range of  $\alpha$  from 5 to 10 pounds per kilowatt is generally considered to be feasible for nuclear turboelectric systems in the megawatt power range of interest for these missions [8]. Values as low as 2.5 pounds per kilowatt might

be possible if the weight of the waste heat radiator can be reduced by schemes such as the moving belt [9].

Also shown in Fig. 4 for comparison are weight ratios obtained for vehicles propelled with nuclear heat-transfer rockets having specific impulses of 800 and 1000 seconds. These curves are obtained using the optimum high-thrust round-trip trajectories found in [10]. The two branches of these curves result from the fact that different families of

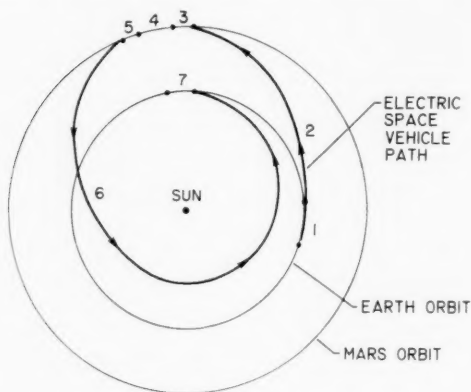


Fig. 3. 500-day Mars round trip path using  $\theta' = q^{-3/2}$  trajectories

Time in days

Propulsion System	Escape from Earth	Earth to Mars	Descent to Mars	Time at Mars	Escape from Mars	Mars to Earth	Descent to Earth	Total
Electric	25	122	15	25	10	283	20	500
High-Thrust	—	226	—	25	—	249	—	500

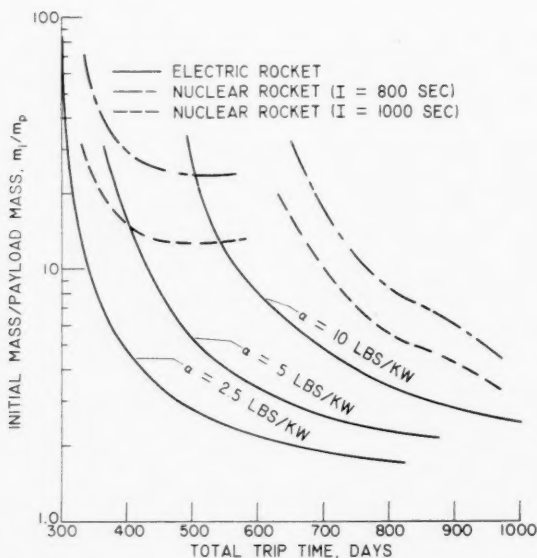


Fig. 4. Weight-ratio comparison for Mars round trips

high-thrust paths turn out to be optimum in the two ranges of total mission time shown.

Fig. 4 shows that, for the range of mass ratios below 10, electrically propelled space vehicles can accomplish a round-trip Mars mission faster than nuclear-rocket-propelled vehicles, provided that specific powerplant weights of the order of 10 pounds per kilowatt or less can be developed. This result is somewhat contrary to common belief that electrically propelled vehicles, because of their low thrust, are not competitive timewise with high-thrust systems for trips to

the near planets. This result is perhaps even more impressive when it is recognized that no attempt has yet been made to optimize the interplanetary transfer phases of the electric-rocket trajectories.

#### IV. Concluding Remarks

Studies of interplanetary missions using electrically propelled vehicles are basically more tedious than similar studies with high-thrust systems. Closed-form solutions for the trajectory equations are available for only a few special types of thrust programming, and these are rarely the best possible for the missions of interest. The tangential-thrust programming, which is nearly optimum for transfer between circular and parabolic or hyperbolic orbits with no end-point requirements, does not have a closed-form solution, but can fortunately be generalized sufficiently to permit construction of charts from which all necessary variables can be evaluated. Such charts greatly simplify analyses of some phases of interplanetary missions. For the remaining phases, and for optimization of the relation between phases, variational methods and iterative numerical integration must be relied upon to select, out of the infinity of possible programs, those most likely to produce the best results. Such numerical studies are now proceeding in several laboratories. The results of these studies are likely to lead to many simple approximate methods that can be used for preliminary mission analysis.

Beyond this, there is the need for complete, precision trajectory and mission studies in three dimensions, taking into account all significant perturbations and three-body effects. Computer programs for such studies are already available, and will be used initially to determine which of the factors neglected in the coplanar, two-body studies is significant, and the magnitude of the resulting errors.

#### References

1. W. E. MOECKEL, Trajectories with Constant Tangential Thrust in Central Gravitational Fields. NASA TR R-53, 1960.
2. J. H. IRVING and E. K. BLUM, Comparative Performance of Ballistic and Low-Thrust Vehicles for Flight to Mars. In: *Vistas in Astronautics*. London: Pergamon Press, Inc., 1960.
3. J. A. MACKAY, L. G. ROSSA, and A. V. ZIMMERMAN, Optimum Low-Acceleration Trajectories for Earth-Mars Transfer. Presented at IAS Meeting on Vehicle Systems Optimization, Garden City, Nov. 28-29, 1961.
4. W. E. MOECKEL, Fast Interplanetary Missions with Low-Thrust Propulsion Systems. NASA TR R-79, 1961.
5. E. LEVIN, Low Acceleration Transfer Orbits. Rand Corporation Report P-2038, July 15, 1960. (To become a chapter in: *Handbook of Astronautical Engineering*. New York-Toronto-London: McGraw-Hill.)
6. E. RODRIGUIZ, Method of Determining Steering Programs for Low-Thrust Interplanetary Vehicles. ARS Journal **29**, 783 (1959).
7. H. R. KAUFMAN and P. D. READER, Experimental Performance of Ion Rockets Employing Electron Bombardment Ion Sources. ARS Paper No. 1374-60, Presented at ARS Electrostatic Propulsion Conference, Monterey, Calif., Nov. 3-4, 1960.
8. R. E. ENGLISH, H. O. SLONE, D. T. BERNATOWICZ, E. H. DAVISON, and S. LIEBLEIN, A 20,000-Kilowatt Nuclear Turboelectric Power Supply for Manned Space Vehicles. NASA MEMO 2-20-59E, 1959.
9. R. C. WEATHERSTON and W. E. SMITH, A Method of Heat Rejection from Space Powerplants. ARS Journal **30**, 268 (1960).
10. J. F. DUGAN, JR., Analysis of Trajectory Parameters for Probe and Round-Trip Missions to Mars. NASA TN D-281, 1960.

### Discussion

Mr. MOECKEL: I may mention that Professor LAWDEN has published several studies of low-thrust trajectories. He found, I believe, that optimal thrust direction for escape is not tangential.

Mr. LAWDEN: Yes, for a given thrust, optimal conditions are obtained by directing the thrust between the circumferential and the tangential direction, but actually the superiority of that optimal program is very marginal indeed and certainly would not be of any practical utility.

Mr. MOECKEL: There is very little difference up to escape conditions, but if excess hyperbolic velocities are required, these differences become increasingly large.

Mr. FRAEIJIS DE VEÛBEKE: Have you compared your results with trajectories using simple navigation device like keeping the same line of sight between the space vehicle, the target planet, and the earth?

Mr. MOECKEL: A group at my laboratory is trying to find systems of programmed thrust which are simpler than the optimal programming, and which yield propellant weight requirements not too much greater than the optimal values. They have found, as I mentioned in the paper, that programs using constant thrust magnitude and direction interspersed with coasting periods, can be used, and that the weight penalties are rather small, at least for one-way planetary missions. Similar studies for round-trip mission are now being carried out.

Mr. STERN: I would like to know with what kind of rocket you can realize these trajectories. Of which kind of practical rocket do you think when you do your calculations?

Mr. MOECKEL: There are numerous research and development programs under way which should produce the powerplants and thrust units needed for these trajectories. At present, for example, we have an ion thrust unit at my laboratory which produces efficiencies in the range 60–80 percent of the specific impulses needed for one-way Mars or Venus trips. The so-called SNAP-8 nuclear-electric power system, which is now under development, is intended to supply the powerplant needed for these early interplanetary trips. As time goes on, we hope to develop larger systems with weight and performance needed for the manned round-trip missions.

## The Stability of the 24-Hour Satellite

By

Ladislav Sehnal<sup>1</sup>

(With 7 Figures)

### Abstract — Zusammenfassung — Résumé

**The Stability of the 24-Hour Satellite.** The perturbations of the 24-hour satellite, produced by the Moon, Sun and the aspherical shape of the Earth, are investigated. The most important influence of the lunar gravitational attraction is studied with the aid of numerical integration of the equations of motion. The shift of the satellite from its initial position is studied for an ideal 24-orbit. The principal shift will have a periodical character with an amplitude of about  $10^\circ$ .

**Die Stabilität des 24-Stunden-Satelliten.** Die Bahnstörungen des 24-Stunden-Satelliten, bewirkt durch Mond, Sonne und durch Abweichungen des irdischen Gravitationsfeldes von der Kugelsymmetrie, werden untersucht. Der wichtigste Fall, der Einfluß des Gravitationsfeldes des Mondes, wird numerisch behandelt. Die Abweichungen von der 24-Stunden-Bahn werden untersucht. Der Hauptanteil der Drift ist periodisch mit einer Amplitude von etwa  $10^\circ$ .

**La stabilité du satellite de 24 heures.** L'auteur étudie le mouvement du satellite de 24 heures dans le champ de gravité de la Terre et l'influence de la Lune sur son orbite. Le calcul est fait par intégration numérique et l'on calcule la trajectoire du satellite durant une révolution de la Lune autour de la Terre.

### I. Introduction

One of the important tasks, for which the artificial satellites are launched, is to establish a communication system. The utilizing of the "24-hour" satellite for this purpose was suggested in many projects of such a system. This satellite would move in the plane of the Earth's equator with the period of 24 sidereal hours, so that it would remain stable with regard to certain place on the Earth's surface.

However, the orbit of such a satellite is also of interest in astrodynamics since, owing to the commensurability of the period of the satellite with the rotation of the Earth, there arise longperiodic perturbations as a result of the asphericity of the Earth's equator. On the other hand, the orbit of the satellite is at such a great distance from the Earth, that the influence of the Moon's and the Sun's gravity will be considerable — the main perturbing force being the lunar attraction. Therefore, in this study of the stability of the 24-hour satellite, the influence of the lunar gravitational attraction is studied in detail, by means of the numerical integration of the equations of motion. The elements of the integrated orbit have been then taken as a basis for further investigations.

<sup>1</sup> C. Sc., Astronomical Institute of the Czechoslovak Academy of Sciences, Ondřejov, Č.S.S.R.

## II. The Orbit in the Earth-Moon System

The influence of the Moon's gravity was studied by numerical integration of the equations, describing the motion of a body in the restricted three-body system — the Earth, the Moon and the satellite. The orbit of the satellite was chosen so that the period of the first revolution be exactly 24 sidereal hours and the shape of the orbit be as nearly circular as possible. Therefore the selected orbit is an idealized one. The initial coordinates of the satellite's position and velocity components were computed from the equations describing the motion of two bodies, the satellite around the Earth. The numerical constants, such as the mass of the Earth and the Moon, the gravitational constant, the distance Earth-Moon were taken from the paper by HERRICK, BAKER and HILTON [1]. The radius of the satellite's circular orbit is  $a = 42\,161.7$  km and the initial velocity is 2.98 km/sec. The inclination of the orbit was obtained as the difference between the inclinations of the Earth's equator and the Moon's orbit to the ecliptic.

The reference frame used is plotted in Fig. 1. The origin of the coordinate system is in the centre of gravity of the Earth and the Moon and the  $x, y$ -plane

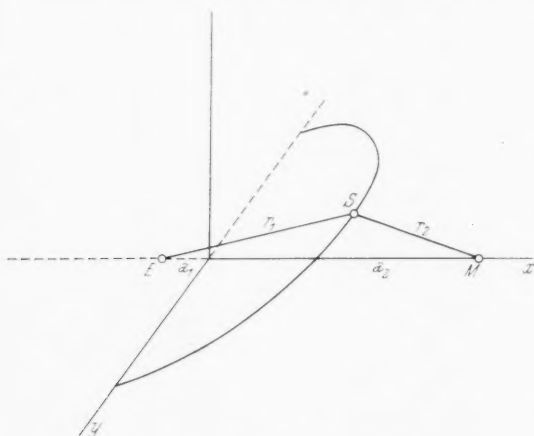


Fig. 1. The rotating reference frame

lies in the plane of the lunar orbit. The reference frame rotates uniformly with the motion of the two bodies around the centre of gravity, the  $z$ -axis being the axis of rotation. Then the initial coordinates of the bodies are as follows: the Earth  $(-a_1, 0, 0)$ , the Moon  $(a_2, 0, 0)$ , the satellite  $(x_0, y_0, z_0)$ , where

$$a_1 = 4666.54 \text{ km},$$

$$a_2 = 379\,740.2 \text{ km},$$

$$x_0 = 35\,363.03 \text{ km},$$

$$y_0 = 0, \quad z_0 = 13\,237.84 \text{ km}.$$

The inclination of the orbit is  $i = 18^\circ 17' 57''$ .

It turned out after the first revolution, that the initial velocity made the orbit elliptical with a period substantially greater than 24 hours. Therefore the initial velocity was successively diminished to get the satellite exactly to the initial position after the first revolution. This new initial velocity is 2.9679 km/sec, so that the initial components of the velocity are  $v_x = 0$ ,  $v_y = 2.9679$ ,  $v_z = 0$ .

The differential equations of the motion of a body in a restricted problem of three bodies were given in a convenient manner by MESSAGE [2]. They are

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2n' \frac{dy}{dt} - n'^2 x &= -\frac{\mu}{r_1^3} (x + a_1) - \frac{\mu k}{r_2^3} (x - a_2) \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n' \frac{dx}{dt} - n'^2 y &= -\frac{\mu}{r_1^3} y - \frac{\mu k}{r_2^3} y \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{\mu}{r_1^3} z - \frac{\mu k}{r_2^3} z \end{aligned} \quad (1)$$

where  $x, y, z$  are the coordinates of the satellite,  $n'$  is the velocity of the rotation of the system Earth-Moon,  $\mu = G \cdot M_e$ ,  $k = M_m/M_e$ ,  $G$  being the constant of gravitation,  $M_m$  and  $M_e$  the masses of the Moon and the Earth, respectively. The radii-vectors  $r_1$  and  $r_2$  are given by

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (x + a_1)^2 + y^2 + z^2 \\ r_2^2 &= (x - a_2)^2 + y^2 + z^2 \end{aligned} \quad (2)$$

The equations of motion were solved by numerical integration, using the RUNGE-KUTTA method with the aid of the "Ural 1" electronic digital computer of the Institute of the Theory of Informations and Automatization of the Czechoslovak Academy of Sciences. There were computed 28 revolutions of the Moon around the Earth. The JACOBIAN constant

$$J = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 - n'^2(x^2 + y^2) - \frac{2\mu}{r_1} - \frac{2\mu k}{r_2} \quad (3)$$

was computed after every step as a check of the accuracy of the results. The step of integration was chosen so as to maintain  $J$  constant to six significant figures.

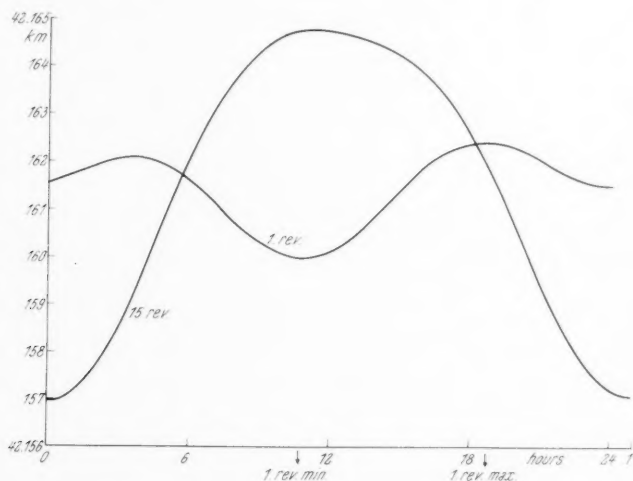


Fig. 2. The course of the radii-vectors of the satellite in the first and 15th revolution

During the first revolution the satellite revolves in a very nearly circular orbit, which is distorted by the lunar gravitational attraction. The distance of the satellite from the Earth (the radius-vector  $r_1$ ) has two peaks and two minima. The eccentricity of the orbit becomes elliptical. If we take the principal maximum of  $r_1$  in the first revolution as the apogee and the principal minimum as the perigee, the effective eccentricity of the orbit is  $e_1 = 0.275 \cdot 10^{-4}$ . In the 15th revolution the eccentricity becomes  $e_{15} = 0.907 \cdot 10^{-4}$  and then it diminishes again till the value  $e_{28} = 0.284 \cdot 10^{-4}$  in the 28th revolution. The course of  $r_1$  in the first and 28th revolution is plotted in Fig. 2, where also the principal maximum and minimum in the first revolution is indicated.

The eccentricity has a periodical course with a period of 1 sidereal month and the amplitude of  $0.6 \cdot 10^{-4}$ , which is shown in Fig. 3. The variation of the heights of the perigee and apogee is shown in Fig. 4. Both these quantities show the same

principal period, 1 sidereal month, which is, in the case of the apogee, interrupted by a small terminal decrease in the peak of the basic curve.

However, we must notice that all these changes of the distance of the satellite from the Earth, the course of the perigee and apogee and also the daily course

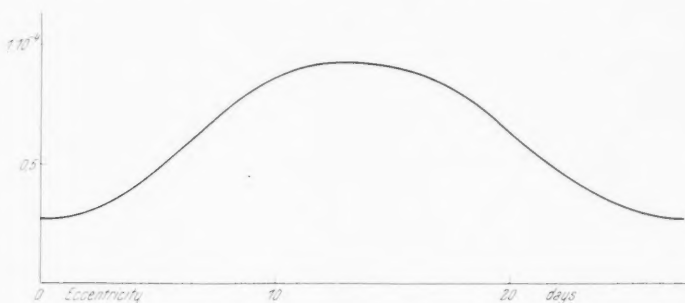


Fig. 3. The course of the eccentricity

of the r.-v.  $v_1$ , occur above nearly the same place on the surface of the Earth, so that the height of the satellite above the subsatellite point changes relatively rapidly within the range of about 8 km.

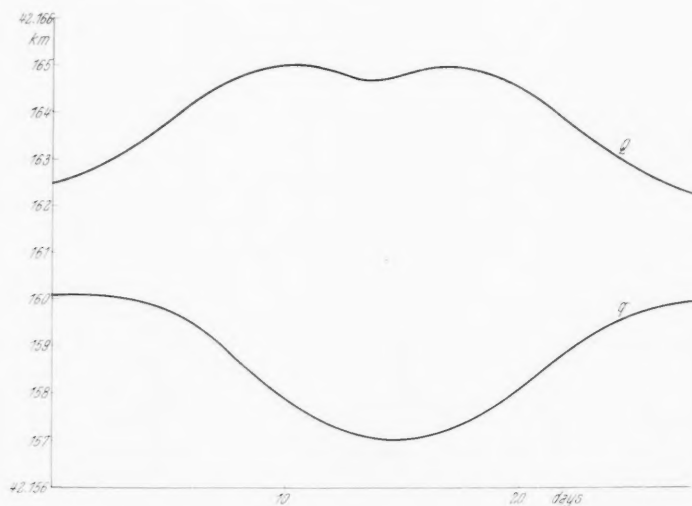


Fig. 4. The variations of the heights of the perigee ( $q$ ) and apogee ( $Q$ )

An interesting feature shows the course of the distance of perigee  $\omega$ , which is always on the other side of the Earth than the Moon. So the distance of perigee has a secular change and on Fig. 5 we see that it has also secondary periodical variation with a period of 1 sidereal month.

The course of the inclination shows only very small periodical changes with a period 1/2 month and with the amplitude of only  $22''$ , as is plotted on Fig. 6.



The data about the changes of these elements enable us to construct the projection of the satellite on a sphere from the centre of the Earth as the centre

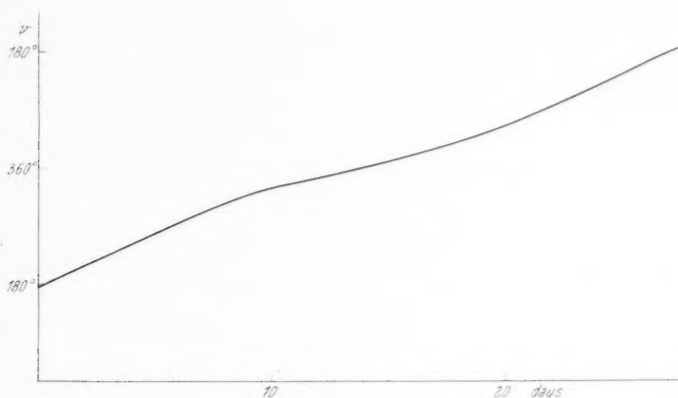


Fig. 5. The course of the distance of the perigee ( $\omega$ )

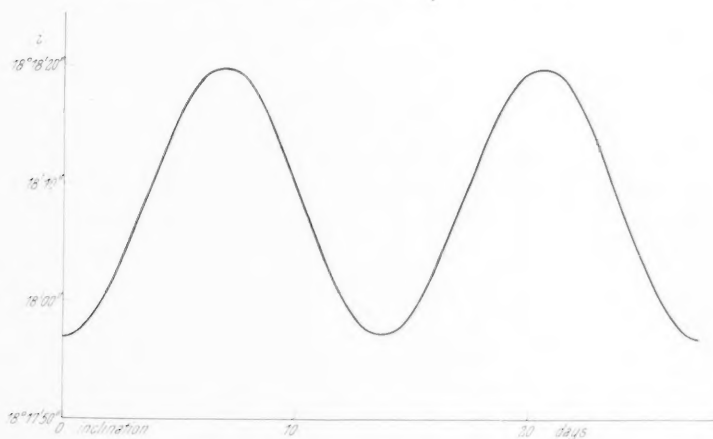


Fig. 6. The variation of the inclination ( $i$ )

of projection. This is plotted in Fig. 7. The scale of the y-axis is 72 times greater than the scale of the x-axis; the projection of the equator would be a line lying at the altitude of  $0^\circ$  in the direction of the x-axis. The satellite makes a pendulum motion around the central position with a semi-amplitude of  $6.8^\circ$  and a period of 1 sidereal month. As seen from the subsatellite point, the amplitude would be a little greater. This motion arises as a result of the changes of the satellite's period.

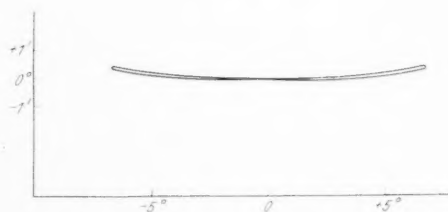


Fig. 7. The projection of the orbit of the satellite on the celestial sphere

The lunar gravitational attraction produces the periodical changes in the elements of the satellite's orbit and it is evident that similar changes will be produced by the attraction of the Sun. Since the disturbing force of the Sun is in our case less than half the disturbing force of the Moon, we may expect changes with about the half-amplitude of the previous changes and with a period of 1 year. The disturbing forces can sometimes act in the same sense and then we may expect a shift of the satellite from its initial position by about 10 degrees.

### III. The Secular Lunisolar Perturbation

A rough picture of the secular changes of the orbital elements can be obtained by the comparing of the values of the elements at the beginning and at the end of each period. But in our case it is better to get the secular changes analytically as we have only one or two periods of the periodical changes at our disposal. So we try to derive the formulae for the secular changes under some simplifying assumptions.

The disturbing function is given in the form

$$R = G M_M \left( \frac{1}{A} - \frac{r r' \cos \psi}{r'^3} \right) \quad (4)$$

where  $A$  is the distance of the satellite from the disturbing body,  $r$  and  $r'$  are the r.v. of the satellite and the Moon respectively, measured from the centre of the Earth,  $\psi$  is the angle subtended by the radii-vectors  $r$  and  $r'$ . We assume circular orbit of the Moon and a nearly circular orbit of the satellite, so that we can retain only the terms till  $e^2$  in the development of the disturbing function. We also limit the expansion to the terms up to  $(r/r')^3$ . For the computation of the changes of the elements we use the LAGRANGIAN equations, where we can drop the derivations in the mean anomaly, as we restrict ourselves to the secular changes only. The equations are then as follows:

$$\frac{de}{dt} = - \frac{\sqrt{1-e^2}}{n a^2 e} \frac{\partial R}{\partial \omega} \quad (5)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\cotg i}{n a^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{\sin i} \frac{1}{n a^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \Omega} \quad (6)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{\sin i} \frac{1}{n a^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} \quad (7)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{n a^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cotg i}{n a^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} \quad (8)$$

The direct part of the disturbing function will be developed in the series of LEGENDRE polynomials:

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{a'} \left[ 1 - 2 \frac{r}{a'} \cos \psi + \left( \frac{r}{a'} \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{1}{a'} \sum_{n=0}^{n=3} \left( \frac{r}{a'} \right)^n P_n(\cos \psi) \quad (9)$$

After substituting into  $R$  we get the disturbing function in the form

$$R = \frac{G M_M}{a'} \left[ - \frac{1}{2} \left( \frac{r}{a'} \right)^2 + \frac{3}{2} \left( \frac{r}{a'} \right)^2 \cos^2 \psi - \frac{3}{2} \left( \frac{r}{a'} \right)^3 \cos \psi + \frac{5}{2} \left( \frac{r}{a'} \right)^3 \cos^3 \psi \right] \quad (10)$$

The  $\cos \psi$  is given by the expression

$$\cos \psi = A \cos u + B \sin u \quad (11)$$

where  $u = (v + \omega)$ ,  $v$  being the true anomaly in the satellite's orbit and  $\omega$  is the distance of the perigee. The coefficients  $A, B$  are the functions of the elements of the orbits of the disturbing and disturbed body;  $A, B = F(\Omega, \Omega', i, i', u')$ . After the substitution of  $\cos \psi$  into  $R$  we can develop the expressions depending on the true anomaly  $v$  according to the CAYLEY's tables [3], and retain only the terms which are not depending on the mean anomaly of the satellite's orbit. So we get the expression for the disturbing function  $R$  in the form

$$\begin{aligned}
 R = & \frac{G M_M}{a'} \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{a}{a'} \right)^2 \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 \right) + \right. \\
 & + \frac{3}{4} \left( \frac{a}{a'} \right)^2 \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 \right) (A^2 + B^2) + \\
 & + \frac{15}{4} \left( \frac{a}{a'} \right)^2 e^2 \left[ \frac{1}{2} (A^2 - B^2) \cos 2\omega + A B \sin 2\omega \right] + \\
 & + \frac{15}{4} \left( \frac{a}{a'} \right)^3 e [A \cos \omega + B \sin \omega] - \\
 & \left. - \frac{75}{16} \left( \frac{a}{a'} \right)^3 e [A (A^2 + B^2) \cos \omega + B (A^2 + B^2) \sin \omega] \right\}.
 \end{aligned} \quad (12)$$

However, we must also remove the terms depending on the mean anomaly of the orbit of the disturbing body. The coefficients  $A$  and  $B$  and their sums and multiples can be expressed as functions of the mean anomaly of the disturbing body:

$$\begin{aligned}
 A &= K \cos u' + l \sin u' \\
 B &= m \cos u' + n \sin u'
 \end{aligned} \quad (13)$$

The secular terms of these expressions can be easily computed. They are

$$\begin{aligned}
 A^2 + B^2 &= \frac{1}{2} (k^2 + l^2 + m^2 + n^2) = K \\
 A^2 - B^2 &= \frac{1}{2} (k^2 + l^2 - m^2 - n^2) = L \\
 A B &= \frac{1}{2} (k m + l n) = M
 \end{aligned} \quad (14)$$

These secular coefficients  $K, L, M$  can be computed from the formulae

$$\begin{aligned}
 k &= \cos(\Omega - \Omega') \\
 l &= \sin(\Omega - \Omega') \cos i' \\
 m &= -\sin(\Omega - \Omega') \cos i' \\
 n &= \cos(\Omega - \Omega') \cos i \cos i' + \sin i \sin i'
 \end{aligned} \quad (15)$$

Now we can substitute into the LAGRANGIAN equations and the expressions for the changes of elements become

$$\begin{aligned}
 \frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2} G M_M}{n a^2 e} \frac{1}{a'} \left\{ \frac{15}{8} \left( \frac{a}{a'} \right)^2 e^2 [-L \sin 2\omega + M \cos 2\omega] \right\} \\
 \frac{di}{dt} &= \frac{\cotg i}{n a^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{G M_M}{a'} \left\{ \frac{15}{8} \left( \frac{a}{a'} \right)^2 e^2 [-L \sin 2\omega + M \cos 2\omega] \right\} - \\
 & - \frac{1}{\sin i} \frac{1}{n a \sqrt{1-e^2}} \frac{G M_M}{a'} \left\{ \frac{3}{8} \left( \frac{a}{a'} \right)^2 \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \frac{\partial}{\partial \Omega} (K) + \right. \\
 & \left. + \frac{15}{16} \left( \frac{a}{a'} \right)^2 e^2 \left[ \cos 2\omega \frac{\partial}{\partial \Omega} (L) + \sin 2\omega \frac{\partial}{\partial \Omega} (M) \right] \right\}
 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} = & \frac{\sqrt{1-e^2} G M_M}{n a^2 e} \frac{1}{a'} \left\{ -\frac{3}{2} e \left( \frac{a}{a'} \right)^2 + \frac{3}{8} e \left( \frac{a}{a'} \right)^2 K + \right. \\ & \left. + \frac{15}{8} \left( \frac{a}{a'} \right)^2 e [\cos 2\omega L + \sin 2\omega M] \right\} - \\ & - \frac{\cotg i}{n a^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{G M_M}{a'} \left\{ \frac{3}{8} \left( \frac{a}{a'} \right)^2 \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \cos 2\omega \frac{\partial}{\partial i} (K) + \right. \\ & \left. + \frac{15}{16} \left( \frac{a}{a'} \right)^2 e^2 \left[ \cos 2\omega \frac{\partial}{\partial i} (L) + \sin 2\omega \frac{\partial}{\partial i} (M) \right] \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} = & \frac{1}{\sin i} \frac{1}{n a^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{G M_M}{a'} \left\{ \frac{3}{8} \left( \frac{a}{a'} \right)^2 \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \frac{\partial}{\partial i} (K) + \right. \\ & \left. + \frac{15}{8} \left( \frac{a}{a'} \right)^2 e^2 \left[ \cos 2\omega \frac{\partial}{\partial i} (L) + \sin 2\omega \frac{\partial}{\partial i} (M) \right] \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

These formulae can be used for the computation of the secular perturbation of the orbits of artificial satellites under the conditions stated above, i. e. the circular orbit of the disturbing body and the nearly-circular orbit of the satellite.

From the obtained expressions we can now compute the change of elements of our satellite's orbit, e. g. the change of the perigee height and the change of the inclination. We can neglect the terms with  $e^2$ , with respect to the small excentricity of our orbit. Some terms also vanish owing to the vanishing inclination of the orbit:

$$\frac{\partial}{\partial \Omega} (K) = 0 \quad (19)$$

The semi-major axis of the satellite's orbit is not subject to secular perturbations, so we can obtain the change of the height of the perigee ( $q$ ) from the expression for the change of the eccentricity. The results of the substitution of numerical values are given in Table I. There are the changes per one month. The changes,

Table I

	Moon (n. i.)	Moon	Sun
$[dq]$	- 190 m	- 20 m	- 9 m
$[di]$	< 1''	< 1''	< 1''

found from the numerical integration are given in the second column. The values of the changes, computed from the analytical equations (16) are given in the third (Moon) and the fourth (Sun) column. We can see that the changes of the elements are very small, which is certainly partly due to the very small excentricity of the satellite's orbit.

#### IV. The Influence of the Non-Spherical Shape of the Earth

The influence of the non-spherical shape of the Earth could be also traced in the motion of the satellite, in spite of its great distance from the Earth. The equatorial ellipticity of the Earth influences the motion of the satellite owing to the commensurability of the period of the satellite with the rotation of the Earth.

The equations are written for  $\omega = \text{const.}$  After the substitution of the numerical values of the elements we obtain the changes of elements of our orbit. The coefficient  $c_{30}$  has been obtained from the measurements made on artificial satellites; according to KOZAĚ [4] it is  $c_{30} = 2.29 \cdot 10^{-6}$ . The coefficients  $c_{22}$  and  $d_{22}$  are given from gravimetrical measurements, e. g. in the paper by JONGOLOVICH [5], although the first attempt to obtain these coefficients has already been performed (IZSAK [6]). But these new values by IZSAK do not introduce serious discrepancies in the results. If we also substitute the numerical value of the secular motion of the distance of perigee, which was found by means of numerical integration, we obtain for the shift of the satellite from its initial position a periodical change of a semi-amplitude of 46 seconds of arc with the period of one sidereal month. All these perturbations are of course very small, but the small value of the eccentricity of the orbit plays here an important role.

Concluding this study, we can say that the main perturbations, which cause the shift of the 24-hour satellite from its initial position are the luni-solar perturbations, of which the perturbations with the period of one sidereal month and the semi-amplitude of  $6.8^\circ$  are the most important ones.

I am greatly indebted to the staff of the Institute of Theory of Information and Automatisation of the Czechoslovak Academy of Sciences and especially to ing. I. MATĚJOVSKÝ for the help with the computations on the "Ural 1" computer.

#### References

1. S. HERRICK, R. M. L. BAKER, JR., and C. G. HILTON, Gravitational and Related Constants for Accurate Space Navigation. VIIIth International Astronautical Congress, Barcelona 1957, p. 197. Wien: Springer, 1958.
2. P. J. MESSAGE, Some Periodic Orbits in the Restricted Problem of Three Bodies and Their Stabilities. *Astronom. J.* **64**, 226 (1957).
3. A. CAYLEY, Tables for Development of Functions in the Theory of Elliptic Motion. *Mem. RAS* **29**, 191 (1861).
4. Y. KOZAĚ, The Gravitational Field of the Earth Derived from the Motion of Three Satellites. *Astronom. J.* **66**, 8 (1961).
5. I. D. JONGOLOVICH, Potentiel de l'attraction terrestre. *Bull. Inst. Theor. Astronomy* **6**, 505 (1957).
6. I. G. IZSAK, A Determination of the Ellipticity of the Earth's Equator from the Motion of Two Satellites. *Smiths. Inst. Spec. Report*, No. 56, 11 (1961).

#### Discussion

Mr. KOVALEVSKY: I notice that you have found a small change in the height of the satellite and therefore there must be also only a small change in the semi-major axis. Then it is a little surprising that the shift in the longitude of the satellite is greater than one might expect.

Mr. SEHNAL: The nature of the oscillations in the longitude of the satellite cannot be exactly explained from the results obtained by numerical integration. In this computation we obtain only the rectangular coordinates of the satellite and the origin of the changes of the elements are very difficult to determine.

Mr. KING-HELE: I should like to ask what is your opinion about the principal gravitational perturbative force, acting on the resonance satellites; is that the lunisolar influence or the irregularities in the gravitational field of the Earth?

Mr. SEHNAL: I can say that in the case of the 24-hour satellite the principal perturbations will be caused by the lunisolar disturbing force. But there might be also the resonance satellites which are in orbits nearer to the Earth and then the influence of the irregularities of the Earth's gravitational field will be increasing.

The secular change of the inclination will be also influenced by the third harmonics of the Earth's gravitational potential.

The gravitational field of the Earth is described by the equation

$$F = \frac{GM_E}{r} \left[ 1 + \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 c_{20} P_{20}(\sin \delta) + \right. \\ \left. + \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 (c_{22} \cos 2\lambda - d_{22} \sin 2\lambda) P_{22}(\sin \delta) + \right. \\ \left. + \left( \frac{r_0}{r} \right)^3 c_{30} P_{30}(\sin \delta) \right] \quad (20)$$

where  $P_{20}$  and  $P_{30}$  are the zonal harmonics and  $P_{22}$  is the tesseral harmonics,  $\lambda$  and  $\delta$  are the geocentric coordinates of the satellite.  $c_{30}$ ,  $c_{22}$  and  $d_{22}$  are the numerical coefficients which determine the values of the asphericity of the Earth. The coordinates must be expressed as the functions of the elements of the orbit of the satellite. Then we can develop the expressions  $r^n \cdot \cos m \cdot v$  ( $v$  is the true anomaly of the satellite's motion) in the terms of the mean anomaly. If we retain the long-period terms only in the expression for the equatorial ellipticity of the Earth, we have for the disturbing function

$$F_{22} = \frac{3}{4} G M_E \frac{r_0^2}{a^3} \left\{ \frac{9}{2} e^2 \sin^2 i [c_{22} \cos 2(M + \Omega) - d_{22} \sin 2(M + \Omega)] + \right. \\ \left. + \left( 1 - \frac{5}{2} e^2 \right) (1 + 2 \cos i + \cos^2 i) [c_{22} \cos 2(M + \Omega + \omega) + \right. \\ \left. + d_{22} \sin 2(M + \Omega + \omega)] \right\} \quad (21)$$

Only the secular term in the third harmonics is of interest here, namely

$$F_{30} = \frac{3}{2} G M_E \frac{r_0^3}{a^4} c_{30} \cdot e \cdot \sin i \cdot \sin \omega \left( \frac{5}{4} \sin^2 i - 1 \right) \quad (22)$$

In the long-period disturbing function  $F_{22}$  there are partly the terms with argument  $(M + \Omega)$  and partly the terms with argument  $(M + \Omega + \omega)$ , where  $M$  is the mean anomaly of the satellite's motion. The former terms are not influenced in their long-periodicity by the motion of the distance of the perigee and so they preserve their long-periodical character even if there is a motion of the distance of the perigee. But this term depends on  $e^2$  so that it will be very small for nearly-circular orbits. From these equations we can derive the changes of the elements that are of importance for the stability of the satellite above the fixed subsatellite point.

$$\Delta P = \frac{9}{2} \pi \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \frac{1}{n + \Omega} \left\{ \frac{9}{2} e^2 \sin^2 i [c_{22} \cos 2(M + \Omega) - d_{22} \sin 2(M + \Omega)] + \right. \\ \left. + \left( 1 - \frac{5}{2} e^2 \right) (1 + 2 \cos i + \cos^2 i) [c_{22} \cos 2(M + \Omega + \omega) + \right. \\ \left. + d_{22} \sin 2(M + \Omega + \omega)] \right\} \quad (23)$$

$$\Delta i = \frac{3}{2} \frac{e}{\sqrt{1 - e^2}} \frac{n}{a^3} r_0^3 c_{30} \left( \frac{5}{4} \sin^2 i - 1 \right) \sin \omega \quad (24)$$

Mr. KOVALEVSKY: I think that there are long-period terms which might be of some importance, related to the motion of lunar node and apogee, especially in the inclination.

Mr. SEHNAL: The next step in the study of the lunisolar perturbations of the 24-hour satellite will be the determination of periodic perturbations from the development of the disturbing function. Then it will be possible to distinguish between individual parts of the perturbations.

Mr. KOVALEVSKY: And I think, it would be very interesting to find out the reason of the shift in longitude that you find.